5.1 Solutions

Solution 5.1

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - xy^2 - y \\ \dot{y} = -y^3 - yx^2 + x, \end{cases} \quad (5.15)$$

1) La matrice Jacobienne en point d'équilibre $(0,0)$ *est donnée comme suivante*

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} -3x^2 - y^2 & -2xy - 1 \\ -2xy + 1 & -3y^2 - x^2, \end{pmatrix}$$

alors

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont solutions du polynôme caractéristique $M(\lambda)$ *avec*

$$\det[J(0,0)] - \lambda.I = 0,$$

alors

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

donc les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i.$$

le partie réel des valeurs propres λ_1, λ_2 *est nul donc on ne peut pas savoir la stabilité du système en l'origine.*

2) En étudier la stabilité en l'origine avec fonction de Lyapunov,

soit $V(x,y) = x^2 + y^2$ *alors*

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,y) &= 2x\dot{x} + 2y\dot{x} \\ &= 2x(-x^3 - xy^2 - y) + 2y(-y^3 - yx^2 + x) \\ &= -2x^4 - x^2y^2 - xy - 2y^4 - y^2x^2 + xy \\ &= -2(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) \\ &= -2(x^2 + y^2)^2 \end{aligned}$$

alors la fonction de Lyapunov $V(x,y) = x^2 + y^2$ *est vérifiée*

$$\Longrightarrow \begin{cases} V(x,y) = x^2 + y^2 > 0, \forall (x,y) \neq (0,0) \\ V(0,0) = 0 \\ \dot{V}(x,y) = -2(x^2+y^2)^2 < 0, \forall (x,y) =\neq (0,0) \\ \lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} V(x,y) = +\infty. \end{cases}$$

Alors $(0,0)$ *est asymptotiquement stable.*

Solution 5.2

1) *On pose*

$$\begin{cases} x = x_1 \\ x_2 = \dot{x}_1 \end{cases} \quad alors \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -5x_1^2 x_2 - x_1 \end{cases}$$

2). *Soit la fonction de Lyapunov* $V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$ *alors*

$$V(x_1,x_2) > 0 \quad si \quad (x_1,x_2) \neq (0,0) \quad et \quad V(0,0) = 0 \quad et \quad \lim_{\|x\| \to +\infty} V(x_1,x_2) = +\infty.$$

$$\dot{V}(x_1,x_2) = -10x_1^2 x_{2<0}^2$$

alors le point d'équilibre $(0,0)$ *est asymptotiquement stable.*

b). 1)

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y^2 \\ \dot{y} = -3y \end{cases} \quad tel\ que \quad \begin{cases} x_0 = c_1 \\ y_0 = c_2 \end{cases}$$

donc $\dot{y} = -3y \Rightarrow y(t) = \alpha_2 e^{-3t} \Rightarrow y(t) = c_2 e^{-3t}$ *car* $y_0 = c_2$
er $\dot{x} = 2x + y^2$ *on obtien la solution homogène* x_h *alors*
$\dot{x} = 2x \Rightarrow x_h = \alpha_1 e^{2t}, \alpha_1 \in \mathbb{R}$, *on cherche la solution générale,*
la solution particulaireest $x_p = -\frac{c_2^2}{8} e^{-6t}$.
Donc la solution générale est $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

$$x(t) = (c_1 + \frac{c_2^2}{8}) e^{2t} - \frac{c_2^2}{8} e^{-6t}.$$

Alors le flot Φ *du système (5.3) est*

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1 + \frac{c_2^2}{8}) e^{2t} - \frac{c_2^2}{8} e^{-6t} \\ c_2 e^{-3t} \end{pmatrix}$$

2) *S est un ensemble invariant*

$$c_1 = -\frac{c_2^2}{8} \Rightarrow x(t) = -\frac{c_2^2}{8}e^{-6t} \Rightarrow x(t) = -\frac{y^2(t)}{8},$$

donc $\Phi_t(S) \subset S$ *alors* S *un ensemble invariant par* Φ.

Solution 5.3

1) $x(t)$ *esr croissant alors*

$$\dot{x}(t) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \quad et \quad 3 - x - 2y \geq 0 \\ \qquad ou \\ x \leq 0 \quad et \quad 3 - x - 2y \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \quad et\ y \leq \frac{3-x}{2} \\ \qquad ou \\ x \leq 0 \quad et \quad y \geq \frac{3-x}{2} \end{cases}$$

$$x(t) \ \ esr\ décroissant\ \dot{x}(t) \leq 0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \quad et\ y \geq \frac{3-x}{2} \\ \qquad ou \\ x \leq 0 \quad et \quad y \leq \frac{3-x}{2} \end{cases}$$

$$y(t) \ \ esr\ croissant\ \dot{x}(t) \geq 0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \quad et\ y \leq 3 - 2x \\ \qquad ou \\ y \leq 0 \quad et \quad y \geq 3 - 2x \end{cases}$$

$$y(t) \ \ esr\ décroissant\ \dot{x}(t) \leq 0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \quad et\ y \leq 3 - 2x \\ \qquad ou \\ y \leq 0 \quad et \quad y \leq 3 - 2x \end{cases}$$

2) *Points d'équilibres du système (5.3) sont*

$$(0,0), (0,3), (3,0), (1,1),$$

3) *Matrice jacobienne*

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 3 - 2x - 2y & -2x \\ -2y & 3 - 2x - 2y \end{pmatrix}$$

3)

La nature du points d'quilibre

$J(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *alors les valeurs propres sont* $\lambda_1 = 3$ *et* $\lambda_2 = 3$, *donc* $(0,0)$ *est point noeud instable.*

$J(0,3) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$ *alors les valeurs propres sont* $\lambda_1 = -3$ *et* $\lambda_2 = -3$, *donc* $(0,3)$ *est point noeud stable.*

$J(3,0) = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ *alors les valeurs propres sont* $\lambda_1 = -3$ *et* $\lambda_2 = -3$, *donc* $(3,0)$ *est point noeud stable.*

$J(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ *alors les valeurs propres sont* $\lambda_1 = 1$ *et* $\lambda_2 = -3$, *donc* $(1,1)$ *est point col.*

Solution 5.4

1) *Points fixes du système (5.5) sont* $0, \pm\sqrt{1-\frac{1}{r}}$.

$f'(0) = r$ *alors 0 est stable si* $r \in [-1,1]$ *et instable si* $r \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

$f'(\pm\sqrt{1-\frac{1}{r}}) = -2r+3$ *alors* $\pm\sqrt{1-\frac{1}{r}}$ *sont stables si* $r \in]1,2[$ *et instable si* $r \in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. *Le point fixe n'existe pas pour* $r \in [0,1]$.

Solution 5.5

1) *Points d'équilibres du système (5.6) on pose* $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ *et* $\dot{z} = 0$ *alors*

$$(x-c)x + ba = 0, y = -\frac{1}{a}x, z = -y, \quad \text{et} \quad \Delta = c^2 - 4ba.$$

- *Si* $\Delta > 0$ *alos existe deux points fixes tel que* $a \neq 0$.

$$\left(\frac{c+\sqrt{\Delta}}{2}, \frac{-c-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{c+\sqrt{\Delta}}{2a}\right), \left(\frac{c-\sqrt{\Delta}}{2}, \frac{-c+\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{c-\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

- *Si* $\Delta < 0$ *pas de point fixe.*
- *Si* $\Delta = 0$ *alos existe un point fixe tel que* $a \neq 0$, *est* $\left(\frac{c}{2}, \frac{-c}{2a}, \frac{c}{2a}\right)$.
- *Si* $a = 0$ *et* $c \neq 0$ *alos existe un point fixe est* $(0, \frac{b}{c}, -\frac{b}{c})$,
- *Si* $a = 0, b = 0$ *et* $c = 0$ *alos existe un point fixe est* $(0,0,0)$,
- *Si* $a = 0, b = 0$ *et* $c \neq 0$ *pas de point fixe.*

2) $a = -3$ *et* $b = c = 0$ *alos existe un point fixe du système (5.6) est* $(0,0,0)$,

Matrice jacobienne $J(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$

$\det(J(0,0,0)-\lambda I)=0$ *donc* $-\lambda(\lambda^2+3\lambda+1)=0$.

Alors existe trois valeurs propres réels

$$\lambda_1=0, \lambda_2=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}<0, \lambda_3=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}<0.$$

Ne pas déduire la stabilité.

Solution 5.6

1) *Points fixes du système (5.7) si* $y_n=0$, $x^2-x+c=0$ *et* $\Delta=1-4c$,

- *Si* $\Delta>0$ *donc* $c<\frac{1}{4}$ *implique existe deux points fixes*

$$x_1^*=\frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}, x_2^*=\frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$$

- *Si* $\Delta=0$ *donc* $c=\frac{1}{4}$ *implique existe un point fixe est* $x^*=\frac{1}{2}$
- *Si* $\Delta<0$ *donc* $c>\frac{1}{4}$ *implique pas de point fixe.*

Ls stabilité on pose $f(x)=x^2+c$

- *Si* $c<\frac{1}{4}$ $f'(x_1^*)=2x_2^*=1-\sqrt{1+4c}$ *alors* x_1^* *instable*
- *Si* $c<\frac{1}{4}$ $f'(x_2^*)=2x_2^*=1-\sqrt{1-4c}$ *alors*
  x_2^* *stable si* $-\frac{3}{4}<c<\frac{1}{4}$,
  x_2^* *instable si* $-\frac{3}{4}<-\frac{3}{4}$.

2) $y_n\neq 0$ *il existe deux points fixes du système (5.7) sont*

$$(\frac{1}{2},\sqrt{c-\frac{1}{4}}),(\frac{1}{2},-\sqrt{c-\frac{1}{4}})$$

- *Si* $c<\frac{1}{4}$ *implique pas de point fixe.*
- *Si* $c=\frac{1}{4}$ *implique existe un point fixe est* $(\frac{1}{2},0)$

3) $J(x_n,y_n)=\begin{pmatrix} 2x_n & -2y_n \\ 2y_n & 2x_n \end{pmatrix}$

$J(\frac{1}{2},\sqrt{c-\frac{1}{4}})=\begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{c-\frac{1}{4}} \\ 2\sqrt{c-\frac{1}{4}} & 1 \end{pmatrix}$ *et les valeurs propres sont* $\lambda_1=1+\sqrt{1-4c}, \lambda_2=1-\sqrt{1-4c}$.

$J(\frac{1}{2},-\sqrt{c-\frac{1}{4}})=\begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{c-\frac{1}{4}} \\ -2\sqrt{c-\frac{1}{4}} & 1 \end{pmatrix}$ *et les valeurs propres sont* $\lambda_1=1+\sqrt{1-4c}, \lambda_2=1-\sqrt{1-4c}$

$J(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et les valeurs propres sont* $\lambda_{1,2} = 1$.

4) $z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + c + ix_ny_n$ *alors*

$z_{n+1} = (x_n + iy_n)(x_n + iy_n) + c.$