ESPACES METRIQUES

Prof. N. Merazga

18 décembre 2023

Table des matières

Ce chapitre constitue une introduction aux espaces métriques, lesquels sont des espaces topologiques particulièrement importants.

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Distances, boules

Définition 1 (Distance, espace métrique) *Soit X un ensemble non vide. Une distance ou métrique sur X est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ qui satisfait les propriétés suivantes pour tous $x, y, z \in X$:*

(D1) $d(x,y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$, [Séparation]

(D2) $d(x,y) = d(y,x)$, [Symétrie]

(D3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, [Inégalité triangulaire].

Muni de la distance d, l'ensemble X est appelé espace métrique et est noté (X,d).

Exemple 1 Sur un ensemble non vide X,

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & \text{si } x=y\\ 1 & \text{si } x\neq y.\end{cases}$$

est une distance dite *discrète* ou *triviale*, et (X,d) est appelé *espace métrique discret*.

Exemple 2 Sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'application $d:\mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{R}_+$ définie par

$$d(x,y)=|x-y|$$

est une distance appelée *distance usuelle* ou *naturelle* de $\mathbb{K}$.

Exemple 3 Sur l'espace $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on définit, en notant $x=(x_1,...,x_n)$ et $y=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{K}^n$, les distances principales suivantes :

$$\begin{aligned}
d_1(x,y) &= \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|\,, \\
d_2(x,y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} && \text{(distance euclidienne)}\\
d_p(x,y) &= \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p}\,,\ p\geq 1 && \text{(distance höldérienne d'ordre } p\text{)}\\
d_\infty(x,y) &= \max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|\,.
\end{aligned}$$

Pour $n=1$, on a $d_1=d_2=d_p=d_\infty$.
L'inégalité triangulaire pour d_p découle de l'inégalité classique (1) appelée *inégalité de Minkowski*.

Théorème 1 (Inégalité de Minkowski, version discrète) *Soit $p\in[1,+\infty[$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Alors, pour tous $a_i,b_i\in\mathbb{K}$, $i=1,...,n$, on a*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

Exemple 4 Considérons l'ensemble $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ des applications réelles bornées sur un ensemble X. On rappelle que

$$\begin{aligned}
f:X\to\mathbb{R} \textit{ est bornée} &\iff f(X) \textit{ est une partie bornée de } \mathbb{R}\\
&\iff \exists C>0 \textit{ tel que } |f(x)|\leq C \textit{ pour tout } x\in X.
\end{aligned}$$

Sur l'ensemble $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$, on définit la distance

$$d_\infty(f,g)=\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|\,.$$

Exemple 5 Sur l'ensemble $C([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\ ;\ f \text{ continue}\}$, on définit les distances principales suivantes en posant pour $f, g \in C([a,b],\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
d_1(f,g) &= \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt \\
d_2(f,g) &= \sqrt{\int_a^b (f(t) - g(t))^2\, dt} \\
d_\infty(f,g) &= \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)| \qquad \text{[distance de la convergence uniforme]} \\
d_p(f,g) &= \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^p\, dt\right)^{1/p},\ p \geq 1.
\end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire pour d_p se réduit à l'inégalité de Minkowski pour les intégrales.

Théorème 2 (Inégalité de Minkowski, version continue) *Si $p \in [1, +\infty[$ et $f, g \in C([a,b], \mathbb{K})$, alors*

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

Proposition 1 *Pour tous points x, y et z d'un espace métrique (X,d), on a*

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y). \tag{3}$$

Définition 2 (Distance induite, sous-espace métrique) *Si (X,d) est un espace métrique et A une partie non vide de X, la restriction d_A de d à $A \times A$ est une distance sur A. L'espace métrique (A, d_A) est dit sous-espace métrique de (X,d).*

Définition 3 (Espace métrique produit) *Soit (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques. On définit les distances principales suivantes en posant pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$:*

$$\begin{aligned}
D_1(x,y) &= d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2) \\
D_2(x,y) &= \sqrt{(d_1(x_1,y_1))^2 + (d_2(x_2,y_2))^2} \\
D_p(x,y) &= \left[(d_1(x_1,y_1))^p + (d_2(x_2,y_2))^p\right]^{1/p}, \qquad p \geq 1 \\
D_\infty(x,y) &= \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\}
\end{aligned}$$

Muni de l'une des distances ci-dessus, $X_1 \times X_2$ est appelé espace métrique produit.

Définition 4 (Boule et sphère) *Soit (X,d) un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$. On définit :*

- *Boule ouverte :* $B(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) < r\}$
- *Boule fermée :* $\overline{B}(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) \leq r\}$
- *Sphère :* $S(a,r) = \{x \in X \mid d(a,x) = r\}$

Dans les trois cas, a est appelé le centre et r le rayon.

L'égalité

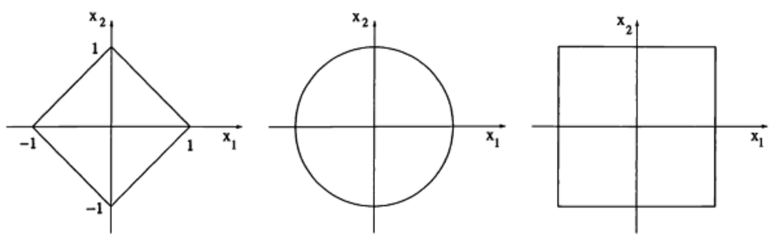
$$S(a,r) = \overline{B}(a,r) \setminus B(a,r)$$

est une conséquence directe de la définition.

Exemple 6 Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$, on a pour $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$:

$$B(a,r) =]a-r, a+r[, \quad \overline{B}(a,r) = [a-r, a+r] \quad \text{et} \quad S(a,r) = \{a-r, a+r\}$$

Exemple 7 Dans $\mathbb{R}^2$, les boules ouvertes (resp. fermées) de centre 0 de rayon 1 ont les formes suivantes pour les distances d_1, d_2 et d_∞ (resp. y compris les frontières) :

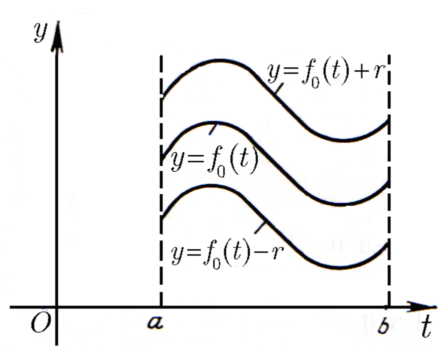


Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$d_2(x,0) \leq 1 \iff \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1 \iff x_1^2 + x_2^2 \leq 1,$$

$$d_\infty(x,0) \leq 1 \iff \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 1 \iff (|x_1| \leq 1 \text{ et } |x_2| \leq 1) \iff \begin{cases} -1 \leq x_1 \leq 1, \\ -1 \leq x_2 \leq 1. \end{cases}$$

Exemple 8 Dans $C([a,b],\mathbb{R})$ muni de la distance de la convergence uniforme d_∞, la boule $B(f_0, r)$ de centre f_0 et de rayon r est l'ensemble des fonctions $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ dont les courbes sont situées strictement entre celles des fonctions $f_0 - r$ et $f_0 + r$.



Exemple 9 Dans un espace métrique discret (X,d), on a pour tout $a \in X$:

– si $r < 1$: $B(a,r) = \overline{B}(a,r) = \{a\}$ et donc $S(a,r) = \varnothing$;

– si $r = 1$: $B(a,r) = \{a\}$, $\overline{B}(a,r) = X$ et donc $S(a,r) = X \setminus \{a\}$;

– si $r > 1$: $B(a,r) = \overline{B}(a,r) = X$ et donc $S(a,r) = \varnothing$.

Définition 5 *Soit (X, d) un espace métrique et A une partie non vide de X.*

- *On appelle distance d'un point x à A, le nombre positif ou nul*

$$d(x, A) = \inf \{d(x, y) \; ; \; y \in A\}.$$

- *On appelle diamètre de A et on note* $\mathrm{diam}(A)$*, la quantité positive ou égale à $+\infty$:*

$$\mathrm{diam}\, A = \sup \{d(x, y) \; ; \; x, y \in A\}.$$

- *Une partie A de X est dite bornée si son diamètre est fini.*

Exemple 10 Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, on a

$$d\left(0,]1, 3[\right) = \inf_{1<x<3} x = 1, \qquad \mathrm{diam}\left(]1, 3[\right) = \sup_{1<x,y<3} |x - y| = 2.$$

On vérifie immédiatement que

Proposition 2 *Une partie non vide A de X est bornée si et seulement si il existe une boule contenant A.*

Preuve. Supposons A bornée, donc $\mathrm{diam}\, A < +\infty$. Soit a un point arbitraire de A, alors $A \subset \overline{B}(a, \mathrm{diam}\, A)$ car $\forall x \in A : \; d(x, a) \leq \mathrm{diam}\, A$.

Inversement, supposons $A \subset B(a, r)$. Pour $x, y \in A$, on a :

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < 2r$$

d'où,

$$\mathrm{diam}\, A = \sup_{(x,y) \in A^2} d(x, y) \leq 2r < +\infty,$$

d'où la bornitude A. ■

Proposition 3 *Soit (X, d) un espace métrique et soit A et B deux parties non vides de X. On a :*

- $\forall x, y \in X, \; |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.
- $\mathrm{diam}\, A = 0 \iff$ *A est réduit à un point.*
- $A \subset B \implies \mathrm{diam}\, A \leq \mathrm{diam}\, B$.
- *A et B bornées $\implies$ $A \cup B$ bornée (la réunion de deux parties bornées est bornée).*
- *Toute partie finie de X est bornée.*

Définition 6 *Soit X un ensemble et (Y, d) un espace métrique. Une application $f : X \to Y$ est dite bornée si son image $f(X)$ est bornée dans (Y, d).*

On note $\mathcal{B}(X, Y)$ l'ensemble des applications $f : X \to Y$ bornées. La formule

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)),$$

définit une distance sur $\mathcal{B}(X, Y)$, appelée distance de la convergence uniforme.

2 Topologie d'un espace métrique

Proposition 4 *Soit (X, d) un espace métrique. La famille τ des parties $\mathcal{O}$ de X qui vérifient la propriété :*

$$\forall x \in \mathcal{O},\ \exists r > 0 \quad \text{tel que} \quad B(x, r) \subset \mathcal{O},$$

est une topologie sur X, appelée <u>topologie associée à la distance d</u>.
Les éléments de τ sont dits <u>ouverts</u> et leurs complémentaires <u>fermés</u>.

Preuve. Il suffit de vérifier que τ satisfait les trois propriétés d'une topologie, i.e.

(O1) X et $\varnothing$ sont des éléments de τ ;

(O2) Une union quelconque d'éléments de τ est un élément de τ ;

(O3) Une intersection finie d'éléments de τ est un élément de τ.

■

Remarque 1 La topologie associée à la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ n'est rien d'autre que la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

Proposition 5 *Dans un espace métrique (X, d),*
- *toute boule ouverte est un ouvert ;*
- *toute boule fermée est un fermé ;*
- *toute sphère est un fermé.*

Proposition 6 *Dans un espace métrique (X, d), une partie est ouverte si et seulement si elle est réunion de boules ouvertes.*
Autrement dit, la famille des boules ouvertes est une base d'ouverts de la topologie associée à la distance d.

Preuve. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de (X, d). Pour tout $x \in \mathcal{O}$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset \mathcal{O}$. Par suite, $\mathcal{O} = \bigcup\limits_{x \in \mathcal{O}} \{x\} \subset \bigcup\limits_{x \in \mathcal{O}} B(x, r_x) \subset \mathcal{O}$. ■

Proposition 7 (Caractérisation d'un voisinage d'un point) *Soit (X, d) un espace métrique, V une partie de X et x un point de X. Alors,*

$$V \in \mathcal{V}(x) \iff \exists\, \varepsilon > 0 : \quad B(x, \varepsilon) \subset V.$$

Proposition 8 *Un espace métrique est séparé, i.e. pour tout couple de points $x, y \in X$ distincts, $x \neq y$, il existe deux boules ouvertes disjointes contenant respectivement x et y.*

Preuve. Soit (X, d) un espace métrique et soit x, y deux points distincts de X. On pose $r = d(x, y)$, alors les boules $B\left(x, \frac{r}{3}\right)$ et $B\left(y, \frac{r}{3}\right)$ sont disjointes. En effet, si $z \in B\left(x, \frac{r}{3}\right) \cap B\left(y, \frac{r}{3}\right)$, alors on a

$$r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{r}{3} + \frac{r}{3} = \frac{2}{3} r,$$

ce qui est impossible pour $r > 0$. ■

Corollaire 1 *Toute partie finie d'un espace métrique est fermée.*

Proposition 9 *Un espace métrique (X, d) est normal.*

Proposition 10 (Point intérieur, point adhérent, point d'accumulation) *Soit (X, d) un espace métrique, A une partie de X et x un point de X.*

- *x est un point intérieur à A si et seulement si :*

$$\exists r > 0 \quad \text{tel que} \quad B(x, r) \subset A.$$

- *x est un point adhérent à A si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset,$$

  i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists y \in A \quad \text{tel que} \quad d(x, y) < \varepsilon.$$

- *x est un point d'accumulation de A si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists y \in A \quad \text{tel que} \quad 0 < d(x, y) < \varepsilon.$$

Proposition 11 *Soit (X, d) un espace métrique, A une partie de X et x un point de X. On a*

1. $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.
2. $\operatorname{diam}(\overline{A}) = \operatorname{diam}(A)$.

Proposition 12 *Si (X, d) est un espace métrique, alors*

1. *Tout point $x \in X$ admet une base dénombrable de voisinages : $\mathcal{B}(x) = \left\{B\left(x, \frac{1}{n}\right) \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.*
2. *La famille $\mathcal{B} = \left\{B\left(x, \frac{1}{n}\right) \ ; \ x \in X, \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est une base d'ouverts de (X, d).*

Preuve. Si V est un voisinage de x, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset V$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nr > 1$ soit $\frac{1}{n} < r$ d'où $B(x, \frac{1}{n}) \subset B(x, r) \subset V$. ■

3 Equivalence de distances

Il y a au moins 2 façons de comparer deux distances définies sur un même ensemble X. On peut se contenter de comparer les topologies associées ou faire une comparaison plus quantitative.

Définition 7 *Soient d et d' deux distances sur un ensemble X.*

- *On dit que d est plus fine que d' si tout ouvert pour d' est ouvert pour d.*
- *On dit que d et d' sont topologiquement équivalentes si chacune est plus fine que l'autre ; i.e. qu'elles définissent la même topologie (la même famille d'ouverts).*

Ces notions se caractérisent aisément avec les boules comme ceci :

Proposition 13 *d est plus fine que d' si et seulement si toute boule ouverte pour d' contient une boule ouverte pour d et de même centre.*

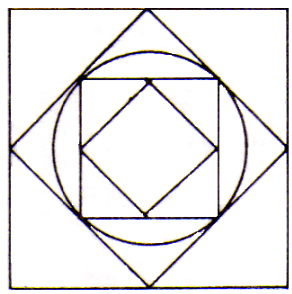
Exemple 11 Dans $\mathbb{R}^n$, les distances d_1, d_2 et d_∞ sont topologiquement équivalentes deux à deux. Comparons d_1 et d_∞ par exemple. On a d'une part, $d_\infty \leq d_1$ ce qui entraîne que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall r > 0 : B_1(x,r) \subset B_\infty(x,r).$$

D'autre part, on a $d_1 \leq n d_\infty$ ce qui se traduit par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall r > 0 : B_\infty\left(x, \frac{r}{n}\right) \subset B_1(x,r).$$

Pour $n = 2$, on voit l'équivalence topologique des distances d_1, d_2 et d_∞ sur la figure ci-dessous



Définition 8 *On dit que deux distances d et d' sur un ensemble X sont* <u>*(métriquement) équivalentes*</u> *s'il existe deux constantes réelles $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que*

$$\forall x,y \in X : \quad \alpha d(x,y) \leq d'(x,y) \leq \beta d(x,y) \tag{4}$$

soit

$$\forall x,y \in X, \text{ avec } x \neq y : \alpha \leq \frac{d'(x,y)}{d(x,y)} \leq \beta.$$

Proposition 14 *Si les distances d et d' sont équivalentes, alors elles sont topologiquement équivalentes.*

Preuve. Supposons que la double inégalité (4) a lieu. Pour tout $x \in X$ et $r > 0$, on a

$$B_d\left(x, \frac{r}{\beta}\right) \subset B_{d'}(x,r) \subset B_d\left(x, \frac{r}{\alpha}\right).$$

■

Exemple 12 Les distances d_1, d_2 et d_∞ sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes en vertu des inégalités suivantes

$$d_\infty \leq d_1 \leq \sqrt{n} d_2 \leq n d_\infty.$$

Exemple 13 Les distances D_1, D_2 et D_∞ définies sur l'espace métrique produit $X_1 \times X_2$ (cf. exemple 3) sont équivalentes en vertu des inégalités suivantes

$$D_\infty \leq D_1 \leq \sqrt{2} D_2 \leq 2 D_\infty.$$

4 Suites dans un espace métrique

Définition 9 (Suite convergente) *Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments d'un espace métrique (X, d) et soit $a \in X$. On dit que a est une limite de $(x_n)_n$ quand n tend vers l'infini si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N_ε à partir duquel tous les termes de la suite sont dans la boule $B(a, \varepsilon)$, ce qui se résume par*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N_\varepsilon : \ d(x_n, a) < \varepsilon.$$

On dit aussi que $(x_n)_n$ converge vers a quand n tend vers l'infini et on note $x_n \to a$.

Ainsi,

$$x_n \to a \overset{\text{déf}}{\iff} \lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0.$$

Exemple 14 La suite de terme général $x_n = (e^{-n}, \frac{1}{n})$ converge vers $(0, 0)$ dans l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de l'une quelconque des distances principales.

Comme tout espace métrique est séparé, on a :

Proposition 15 *Toute suite $(x_n)_n \subset (X, d)$ a au plus une limite. Si une telle limite $a \in X$ existe, on dit que a est **la** limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers l'infini et on note $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.*

La notion de convergence d'une suite permet de caractériser l'adhérence $\overline{A}$ d'une partie A d'un espace métrique de la manière suivante :

Proposition 16 *Soit A une partie non vide d'un espace métrique (X, d) et soit $x \in X$. On a*

$$x \in \overline{A} \iff \text{Il existe une suite de points de } A \text{ qui converge vers } x.$$

Preuve. Conséquence immédiate de la proposition 23 du chapitre 1 jointe à la proposition 12. ∎

Corollaire 2 (Caractérisation séquentielle d'un fermé) *Soit A une partie non vide d'un espace métrique. A est fermée si et seulement si toute suite convergente de points de A a sa limite dans A.*

Preuve. Notons par $L(A)$ l'ensemble des limites des suites convergentes de A, i.e.

$$L(A) = \left\{ x \in X \, ; \, \exists \, (x_n) \subset A : \lim_{n\to\infty} x_n = x \right\}.$$

La proposition 16 signifie que $L(A) = \overline{A}$. Par conséquent, si $A \supset L(A) = \overline{A}$ alors $A = \overline{A}$ et donc A est fermée. Réciproquement, si A est fermée alors $A = \overline{A} = L(A)$ et A contient donc les limites de toutes ses suites convergentes. ∎

Définition 10 (Suite de Cauchy) *On dit qu'une suite* (x_n) *d'un espace métrique* (X, d) *est* *de Cauchy* *si elle vérifie la propriété suivante (condition de Cauchy) :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall m, n \geq N_\varepsilon : \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

c'est-à-dire si, dans $\mathbb{R}$*, on a :*

$$\lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0.$$

Ceci peut aussi s'écrire comme ceci en posant $m = n + k$ *:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall k \in \mathbb{N} : \quad d(x_{n+k}, x_n) < \varepsilon.$$

Exemple 15 La suite de terme général $x_n = \frac{1}{n}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle. Il en est de même pour la suite de terme général $x_n = e^{-n}$.

Voici une autre condition équivalente :

Proposition 17 *Une suite* (x_n) *d'un espace métrique* (X, d) *est de Cauchy si et seulement si*

$$\lim_{p\to\infty} \operatorname{diam}(S_p) = 0$$

où $S_p = \{x_n \ ;\ n \geq p\}$*.*

Preuve. Il suffit d'observer que la condition de Cauchy équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \operatorname{diam}(S_{N_\varepsilon}) \leq \varepsilon$$

ou de manière équivalente (compte tenu de la décroissance de la suite de parties $\left(S_p\right)_p$)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p \geq N_\varepsilon : \quad \operatorname{diam}(S_p) \leq \varepsilon. \tag{5}$$

$\left(\operatorname{diam}(S_p)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels positifs et la condition (5) signifie que sa limite est nulle quand $p \to \infty$. ■

Exemple 16 Dans $\mathbb{R}$, la suite de terme général $x_n = (-1)^n$ n'est pas de Cauchy car, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $S_p = \{-1, 1\}$ d'où $\operatorname{diam}(S_p) = 2$.

Notons les propriétés suivantes des suites de Cauchy.

Proposition 18 *Dans un espace métrique,*

1. *Toute suite convergente est de Cauchy. La réciproque est fausse.*
2. *Toute suite de Cauchy est bornée. La réciproque est fausse.*
3. *Toute suite extraite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.*
4. *Toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente est convergente.*