مراجعات وتتمّات

القسم الثالث: التطبيقات (Maps)

نستعرض في هذا القسم المفاهيم والخصائص الأساسية المتعلقة بالتطبيقات، بدءً من تعريفها مرورا بالعمليات التي يمكن إجراؤها عليها (القصر والتمديد والتركيب) وانتهاءً بأنواعها المختلفة. تشكل هذه المفاهيم الأساس الذي تُبنى عليه مفاهيم أكثر تقدماً في مجالات التحليل والجبر، مما يبرز الدور المحوري للتطبيقات كلغة أساسية في الرياضيات الحديثة.

1. المفاهيم الأولية (Preliminary Concepts)

تؤسس هذه الفقرة للمفاهيم الأولية للتطبيقات، حيث يقدم تعريفًا دقيقًا لماهية التطبيق ومكوناته الأساسية مثل مجموعة البدء، ومجموعة الوصول، وصورة العنصر، وسابقته.

يُستخدم مفهوم التطبيق لربط كل عنصر من مجموعة ما بعنصر وحيد من مجموعة أخرى. هناك أمثلة عن تطبيقات من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$، ولكن لا ينبغي أن نقتصر عليها؛ يمكن تعريف التطبيقات على جميع أنواع المجموعات.

تعريف 1: (تطبيق = map) ليكن E و F مجموعتين. نسمي تطبيقاً (map) $f: E \to F$ من E في F كل قانون (قاعدة) يرفق بكل عنصر x من E عنصراً وحيداً في F، نرمز له بـ $f(x)$.

المصطلحات الأساسية:

- E تسمى مجموعة البدء (domain) و F مجموعة الوصول (codomain) للتطبيق f.
- $f(x)$ تسمى صورة العنصر x بالتطبيق f (Image of element x).
- إذا كان y عنصراً من F، فإن أي عنصر x من E بحيث $y = f(x)$ (إذا وجد) يسمى سابقة لـ y بالتطبيق f (Preimage of y).

نرمز لذلك بـ :

$$f: \begin{array}{l} E \to F \\ x \mapsto f(x) \end{array} \quad \text{أو} \quad f: E \to F,\ x \mapsto f(x)$$

ملاحظة: (بيان التطبيق) يتم تعريف التطبيق في الواقع من خلال بيانه. البيان هو مجموعة جزئية من $E \times F$ معرّفة بـ :

$$G = \{(x, y);\ x \in E \text{ and } y = f(x)\} = \{(x, f(x));\ x \in E\}.$$

أمثلة:

1. لتكن $E = \{1, 2, 3, 4\}$ و $F = \{a, b, c\}$. نعتبر البيانات التالية:

$$G_{f_1} = \{(1, a), (2, c), (3, a), (4, a)\},$$
$$G_{f_2} = \{(1, a), (2, c), (4, a)\},$$
$$G_{f_3} = \{(1, a), (2, c), (2, b), (3, a), (4, a)\}.$$

نلاحظ أنّ:

- f_1 هو تطبيق. a صورة لـ 1 و3 و4 بواسطة f_1 والعناصر 1 و3 و4 هي سوابق a بواسطة f_1 والعنصر b ليس له سوابق بواسطة f_1.
- f_2 ليس تطبيقاً لأن العنصر 3 ليس له صورة.
- f_3 ليس تطبيقاً لأن للعنصر 2 صورتين.

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 2x - 5$ تطبيق.
3. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto |x|$ تطبيق.
4. نرمز بـ $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ إلى مجموعة المتتاليات الحقيقية. يمكن أن نعتبر التطبيق الذي يرفق بكل متتالية حقيقية $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حدَّها الأول u_0 :

$$f: \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$$
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto u_0$$

ملاحظة: في بعض الأحيان، نرغب في النظر إلى تطبيقات غير معرّفة في "كل مكان"، على سبيل المثال التطبيق $x \mapsto \frac{1}{x}$ غير معرّف على $\mathbb{R}$ كله لكن فقط على $\mathbb{R}^*$ (لأنّ 0 العنصر ليس له صورة). نتحدّث حينئذ عن دالة: الدالة على E هي تطبيق معرّف على مجموعة جزئية من E. هذه المجموعة الجزئية تسمى ميدان تعريف الدالة.

بعد تحديد مفهوم التطبيق، من المهم تحديد متى يمكن اعتبار تطبيقين متطابقين.

تعريف 2: (تَساوي تطبيقين، Equality) نقول عن تطبيقين $f: E \to F$ و $g: E' \to F'$ إنهما متساويان ونكتب $f = g$ إذا كان $E = E'$ و $F = F'$ و $\forall x \in E: f(x) = g(x)$.

أمثلة :

1. التطبيقان $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$ و $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$ غير متساويين (لأنه ليس لديهما نفس مجموعة الانطلاق.

بينما التطبيقان $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$ و $g: \mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \sin x$ غير متساويين لأنه ليس لهما نفس مجموعة الوصول.

2. التطبيقان $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin^2 x + \cos^2 x$ و $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1$ متساويان لأنّ لهما نفس مجموعة البدء ونفس مجموعة الوصول و $\forall x \in \mathbb{R}: \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

3. التطبيقان $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 2n + 3$ و $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ غير متساويين لأن $f(1) = 5 \neq 2 = g(1)$.

2. عمليات على التطبيقات

تستكشف هذه الفقرة كيفية تعديل مجموعة بدء تطبيق ما، إما عن طريق تقليصها (المقصور) أو توسيعها (التمديد)، مما يسمح بمرونة أكبر في التعامل مع التطبيقات.

تعريف3: (مقصور تطبيق = Restriction) ليكن $f: E \to F$ تطبيقاً ولتكن E' مجموعة جزئية من E. التطبيق $g: E' \to F$ حيث: $\forall x \in E': g(x) = f(x)$، يسمى مقصور (أو اقتصار) التطبيق f على المجموعة E' ويرمز إليه بالرمز $f|_{E'}$.

أمثلة:

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto |x|$ مقصوره على $\mathbb{R}^+$ هو التطبيق $f|_{\mathbb{R}^+}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \mapsto x$
2. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$ مقصوره على $\mathbb{N}$ هو $f|_{\mathbb{N}}: \mathrm{N} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$

تعريف 4: (تمديد تطبيق = Extension) ليكن $f: E \to F$ تطبيقاً ولتكن X مجموعة تحوي E. كل تطبيق $h: X \to F$ حيث: $\forall x \in E: h(x) = f(x)$، يسمى تمديداً (امتداداً) للتطبيق f إلى المجموعة X.

مثال: لنعتبر التطبيق $h: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto 3x^2 + 5x - 1$.

التطبيق $h_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3x^2 + 5x - 1$ **تمديد للتطبيق** h إلى المجموعة $\mathbb{R}$.

والتطبيق $h_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرّف كالتالي:

$$h_2(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5x - 1, & \text{if } x > 0 \\ x^2, & \text{if } x \leq 0 \end{cases}$$

هو أيضا تمديد للتطبيق h إلى المجموعة $\mathbb{R}$.

ننتقل إلى عملية **التركيب** التي تسمح بإنشاء تطبيقات جديدة من خلال دمج عدة تطبيقات موجودة بشكل متسلسل.

تعريف5: (تركيب التطبيقات = Composition of maps) لتكن E, F, G مجموعات. إذا كان $f: E \to F$ و $g: F \to G$ تطبيقين، فإن التطبيق $h: E \to G$ المعرف كما يلي:

$$\forall x \in E: \ h(x) = g[f(x)]$$

يسمى مركب التطبيقين g و f ويرمز إليه بالرمز $g \circ f$.

أمثلة :

1. لتكن $E = \{\alpha, \beta, \gamma\}$، $F = \{a, b, c, d, e\}$ و $G = \{1, 2, 3, 4\}$. نعرّف التطبيقين $f: E \to F$ و $g: F \to G$ كما يلي:

$$f: \quad E \to F \qquad \alpha \mapsto b, \quad \beta \mapsto a, \quad \gamma \mapsto d$$

$$g: \quad F \to G \qquad a \mapsto 2, \quad b \mapsto 1, \quad c \mapsto 4, \quad d \mapsto 3, \quad e \mapsto 1$$

التطبيق $g \circ f: E \to G$ يعطي الارتباطات التالية:

$$\begin{aligned} \alpha &\mapsto g(f(\alpha)) = g(b) = 1 \\ \beta &\mapsto g(f(\beta)) = g(a) = 2 \\ \gamma &\mapsto g(f(\gamma)) = g(d) = 3 \end{aligned}$$

2. ليكن التطبيقين $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2 + 1$ و $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-, x \mapsto -x^2$.

مركب g و f هو التطبيق:

$$\begin{aligned} g \circ f: \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R}^- \\ & x \mapsto -(x^2 + 1)^2 = -x^4 - 2x^2 - 1 \end{aligned}$$

ملاحظات:

- التركيب $g \circ f$ لا يكون له معنى إلا إذا كانت مجموعة وصول f جزء من مجموعة انطلاق g.
- حتى حينما يكون $g \circ f$ و $f \circ g$ معرّفين جيداً، فإنّ $f \circ g \neq g \circ f$ عموماً.

قضية 1: (تجميعية التركيب) لتكن $f: E \to F$، $g: F \to G$ و $h: G \to H$ ثلاثة تطبيقات. عندئذ لدينا:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

وهذا التطبيق يرمز له بـ $h \circ g \circ f$.

إثبات: لدينا بمقتضى تعريف مركّب تطبيقين:

$$h \circ (g \circ f)(x) = h\big(g \circ f(x)\big) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)$$

$$(h \circ g) \circ f(x) = h \circ g\big(f(x)\big) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)$$

من أجل كل $x \in E$، ومنه المساواة المطلوبة.

3. الصورة المباشرة والصورة العكسية

تعرّف هذه الفقرة مفهومي الصورة المباشرة والصورة العكسية، اللذين يصفان كيفية نقل تطبيق ما للمجموعات الجزئية بين مجموعة انطلاقه ومجموعة وصوله.

تعريف 6: ليكن $f: E \to F$ تطبيقاً و $A \subset E$ و $B \subset F$.

- الصورة المباشرة: (Direct Image) صورة A بواسطة f هي المجموعة المرموز لها بالرمز $f(A)$ والمعرّفة بـ :

$$f(A) = \{f(x);\ x \in A\} = \{y \in F;\ \exists x \in A: f(x) = y\}.$$

- الصورة العكسية: (Inverse Image) الصورة العكسية لـ B بواسطة f هي المجموعة المرموز لها بالرمز $f^{-1}(B)$ والمعرّفة بـ : $f^{-1}(B) = \{x \in E;\ f(x) \in B\}$.

أمثلة:

1. ليكن $E = \{1, 2, 3, 4\}$ و $F = \{a, b, c\}$. نعتبر التطبيق f المعرف بالبيان:
$$G_f = \{(1, a), (2, c), (3, a), (4, a)\}.$$

لدينا:

- $f(\{1\}) = \{a\}$ ، $f(\{1,4\}) = \{a\}$ ، $f(\{1,2,3\}) = \{a,c\}$
- $f^{-1}(\{a\}) = \{1,3,4\}$ ، $f^{-1}(\{a,c\}) = \{1,2,3,4\} = E$
- $f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$ ، $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ، $f^{-1}(\{b,c\}) = \{2\} = f^{-1}(\{c\})$.

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$.

لدينا:

$$f(\mathbb{Z}) = \{f(x);\ x \in \mathbb{Z}\} = \{|x|;\ x \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{N}.$$

3. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$

لدينا:

$$g(\mathbb{Z}) = \{x+1;\ x \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$$
$$g^{-1}(\mathbb{N}^*) = \{x \in \mathbb{R};\ x+1 \in \mathbb{N}^*\} = \mathbb{N}.$$

4. **ليكن التطبيق** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3x$.

$$f^{-1}(\mathbb{Z}) = \{x \in \mathbb{R};\ 3x \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{Z}: y = 3x\}$$
$$= \left\{x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{Z}: x = \frac{y}{3}\right\} = \{y/3; y \in \mathbb{Z}\}.$$

5. ليكن التطبيق $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, x \mapsto |2x| + 1$ وليكن $A = \{-1,-2,2,4,5\}$ جزء من $\mathbb{Z}$ و $B = \{3,4,5,7,8\}$ جزء من $\mathbb{N}$. لدينا:

$$f(A) = \{f(x);\ x \in A\} = \{3,5,9,11\}.$$
$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{Z}; f(x) \in B\}$$
$$= \{x \in \mathbb{Z}; f(x) = 3 \text{ or } f(x) = 4 \text{ or } f(x) = 5 \text{ or } f(x) = 7 \text{ or } f(x) = 8\}$$
$$= \{-1,1,-2,2,-3,3\}.$$

6. **ليكن التطبيق** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

$$f^{-1}([-1,1]) = \{x \in \mathbb{R}; f(x) \in [-1,1]\} = \{x \in \mathbb{R};\ -1 \le x^2 \le 1\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}; x^2 \le 1\} = [-1,1].$$

تنبيه: الرمز $f^{-1}(B)$ قد يكون مضللاً، إذ قد يوحي بأننا نفترض أنّ f تطبيق تقابلي وأنّنا نستخدم التطبيق العكسي لـ f. بالطبع، هذا ليس هو الحال، والصورة العكسية لمجموعة جزئية من F بواسطة f معرّفة جيداً، سواء كان f تقابلياً أم لا.

وبالطبع إذا كان $f: E \to F$ تطبيقا تقابليا فإنّ:

$$\forall B \subset F:\ f^{-1}(B) = (f^{-1})(B)$$

أي الصورة العكسية لـ B بواسطة f هي الصورة المباشرة لـ B بواسطة التطبيق العكسي f^{-1}.

قضية 2: (خواص الصور) ليكن $f: E \to F$ تطبيقاً و A_1, A_2 مجموعتين جزئيتين من E و B_1, B_2 مجموعتين جزئيتين من F. لدينا الخواص التالية:

(i) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$

(ii) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$

(iii) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

(iv) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(v) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

(vi) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

ملاحظة: الاحتواء الوارد في البند (iii) ليس مساواة في الحالة العامة، كما يتبيّن من خلال المثال المضاد:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

لدينا: $f([0,1]) = [0,1]$ و $f([-1,0]) = [0,1]$. نلاحظ أن $[0, 1] \cap [-1, 0] = \{0\}$ في حين أن $f([0,1] \cap [-1,0]) = f(\{0\}) = \{0\}$ بينما $f([0,1]) \cap f([-1,0]) = [0,1]$.

4. أنواع التطبيقات (Types of Applications)

تُصنّف التطبيقات إلى ثلاثة أنواع رئيسية: الغمر (surjection)، والتباين (injection)، والتقابل (bijection) بناءً على سلوكها في الربط بين العناصر. هذه التصنيفات أساسية لفهم بنية التطبيقات وخصائصها.

تعريف 7: (الغمر = Surjection) نقول إنّ التطبيق $f: E \to F$ غامر إذا كان لكل عنصر من مجموعة الوصول F سابقة على الأقل في E، أي:

$$\forall y \in F, \exists x \in E: y = f(x)$$

بعبارة أخرى، f غامر إذا كان $f(E) = F$.

تعريف 8: (التباين = Injection) نقول إنّ التطبيق $f: E \to F$ متباين إذا كان لكل عنصر من مجموعة الوصول F سابقة على الأكثر في E، أي:

$$\forall x, x' \in E: x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

أو بصيغة مكافئة:

$$\forall x, x' \in E: f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

تعريف 9: (التقابل = Bijection) نقول إنّ التطبيق $f: E \to F$ تقابلي إذا كان متبايناً وغامراً في آن واحد، أي إذا كان لكل عنصر من F سابقة وحيدة في E:

$$\forall y \in F, \exists! \, x \in E: y = f(x).$$

التطبيق العكسي (Application réciproque - Reciprocal map)

نختم هذا القسم بمفهوم **التطبيق العكسي**، الذي يعكس عملية الربط التي يقوم بها تطبيق تقابلي، حيث يعيد كل عنصر في مجموعة الوصول إلى سابقته الوحيدة في مجموعة البدء.

تعريف 10: (التطبيق العكسي = Reciprocal map) ليكن $f: E \to F$ تطبيقاً تقابلياً. بما أن لكل عنصر من F سابقة وحيدة في E، فإن العلاقة العكسية لـ f ترفق بكل عنصر من F عنصرا وحيدا في E، فهي إذن تطبيق. نسمي هذا التطبيق: التطبيق العكسي للتقابل f و نرمز له بالرمز $f^{-1}: F \to E$.لدينا:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

أمثلة:

1. التطبيق $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n + 1$ تقابلي وتطبيقه العكسي هو التطبيق:

$$f^{-1}: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n - 1.$$

2. التطبيق $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$ متباين ولكنه غير غامر.

بالفعل، إذا كان $f(n) = f(m)$ فإن $n + 1 = m + 1$ ومنه $n = m$. بالمقابل، 0 ليس له سابقة بواسطة f لأنّ: $\forall n \in N: f(n) \geq 1$.

3. التطبيق $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*, n \mapsto n + 1$ تقابلي.

ملاحظة: يتبيّن من الأمثلة أعلاه، أنّ كون التطبيق متبايناً أو غامراً من عدمه يرتبط ارتباطا وثيقا باختيار مجموعتي الانطلاق والوصول.

كما يمكن دائماً جعل التطبيق غامراً بتقليص مجموعة الوصول.

مثال مفصل: التطبيق $f: \mathbb{R}^+ \to]0, 1], x \mapsto 1/(1 + x)$ تقابلي.

بالفعل، من جهة من أجل كل $x \in \mathbb{R}^+$ لدينا: $0 < 1/(1+x) \leq 1$، ما يبيّن أن f تطبيق من $\mathbb{R}^+$ في $]0,1]$.

من جهة أخرى، ليكن $y \in]0,1]$، لدينا:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{1+x} \Leftrightarrow y(1+x) = 1 \Leftrightarrow y + yx = 1$$

$$\Leftrightarrow yx = 1 - y \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{y}$$

مع ملاحظة أن $\frac{1-y}{y} \in \mathbb{R}^+$ إذا كان $y \in]0,1]$.

من أجل كل $y \in]0,1]$، المعادلة $y = f(x)$ تقبل حلاً وحيداً في $\mathbb{R}^+$ هو $x = \frac{1-y}{y}$. إذًا:

$$f^{-1}:]0,1] \to \mathbb{R}^+, x \mapsto \frac{1-x}{x}.$$

أمثلة أخرى للتطبيقات العكسية :

- $\arcsin = (\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]})^{-1}$
- $\arccos = (\cos|_{[0,\pi]})^{-1}$
- $\arctan = (\tan|_{]-\pi/2,\pi/2[})^{-1}$.

قضية 3: إذا كان $f: E \to F$ تطبيقاً تقابليا، فإنّ $f^{-1}: F \to E$ تطبيق تقابلي.

قضية 4: يكون التطبيق $f: E \to F$ تقابلياً إذا وفقط إذا وجد تطبيق $g: F \to E$ بحيث

$$f \circ g = \mathrm{id}_F \quad \text{و} \quad g \circ f = \mathrm{id}_E$$

حيث يرمز id_E و id_F للتطبيق المطابق في المجموعة E و F على التوالي، وحينئذ $g = f^{-1}$.

قضية 5: ليكن $f: E \to F$ و $g: F \to G$ تطبيقين تقابليين. عندئذ المركب $g \circ f$ تطبيق تقابلي ولدينا: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

إثبات: لدينا

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_G$$

وبالمثل لدينا:

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E.$$