الاسم واللقب: .... **الفوج:** ......

جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي | قسم الرياضيات والإعلام الآلي

السنة 2 ليسانس رياضيات (الطلبة المنتقلون بدين) | السنة الجامعية: 2025/2024

امتحان في مادة "مدخل إلى الطبولوجيا" - المدّة: 90 دقيقة

التمرين 1

1. لتكن d و d' مسافتين على مجموعة X. أعط تمييزا لمفهوم <u>d أدقّ من d'</u>.

d أدقّ من d' $\Leftrightarrow$ ....

....

2. بيّن أنّ جماعة الكرات المفتوحة في فضاء متري (X,d) تشكّل أساسا للطبولوجيا المُلْحَقة بالمسافة d.

....

....

....

....

3. اعط تعريف "فضاء تام".

تعريف: ....

....

4. أجب بـ "**صحيح**" أو "**خطأ**" دون تعليل (<u>نظام التنقيط سلبي</u>):

الفضاء المتري الجزئي $\mathbb{N}$ من $\mathbb{R}$ الاعتيادي تامّ: ....

الفضاء المتري $\mathbb{R}^n$ المزوّد بالمسافة d_1 تامّ: ....

الفضاء المتري $\mathbb{R}^n$ المزوّد بالمسافة d_∞ تامّ: ....

الفضاء المتري $C([0,1],\mathbb{R})$ المزوّد بالمسافة d_1 تام: ....

تذكير: $d_1(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|\,dx$.

الفضاء المتري $C([0,1],\mathbb{R})$ المزوّد بمسافة التقارب المنتظم d_∞ تامّ: ....

الاسم واللقب: .... الفوج: ......

التمرين 2

1. أثبت المتراجحة:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ : \ln(1+t) \leq t.$$

2. بيّن أنّه إذا كانت d مسافة على مجموعة X فإنّ $d' = \ln(1+d)$ هي مسافة أخرى على X.

3. بيّن أنّ d أدقّ من d'.

4. بيّن أنّه إذا كان (X, d') فضاء تامّاً فإنّ (X, d) تامّ أيضا.

تمرين 3

لتكن τ الجماعة المكوَّنة من المجموعة الخالية $\emptyset$ وكل جزء $\mathcal{O}$ من $\mathbb{R}$ متممته $C_{\mathbb{R}}\mathcal{O}$ محتواة في $\mathbb{N}$.

1. بيّن أنّ τ طبولوجيا على $\mathbb{R}$.

2. قارن بين الطبولوجيا τ وطبولوجيا المتممات المنتهية σ على $\mathbb{R}$.

3. بيّن أنّ المفتوحات غير الخالية في $(\mathbb{R}, \tau)$ تتقاطع مثنى مثنى. هل $(\mathbb{R}, \tau)$ فضاء منفصل؟ علّل إجابتك.

4. ميّز مغلقات الفضاء $(\mathbb{R}, \tau)$.

5. استنتج ملاصقتي المجموعتين $A = \{1\}$ و $B = \{-1\}$. هل $(\mathbb{R}, \tau)$ فضاء منفصل؟ علّل إجابتك.

6. عيّن الطبولوجيا الأثر $\tau_{\mathbb{N}}$ المُحْدَثة بـ τ على $\mathbb{N}$.

7. نرمز بـ τ_u إلى الطبولوجيا الإعتيادية لـ $\mathbb{R}$، وليكن $f: (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ التطبيق المعرّف بـ

$$f(x) = \begin{cases} 0 & if\ x \in \mathbb{N}, \\ 1 & if\ x \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

أدرس استمرارية f عند كل نقطة x_0 من $\mathbb{R}$.

(**إرشاد**: يمكنك التمييز بين الحالتين: $x_0 \in \mathbb{N}$ و $x_0 \notin \mathbb{N}$).

بالتوفيق

الاسم واللقب: التصحيح النموذجي .... الفوج: ......

جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي
قسم الرياضيات والإعلام الآلي
السنة 2 ليسانس رياضيات (الطلبة المنتقلون بدين)
السنة الجامعية: 2025/2024

امتحان في مادة "مدخل إلى الطبولوجيا" - المدّة: 90 دقيقة

35

التمرين 1

1. لتكن d و d' مسافتين على مجموعة X. أعط تمييزا لمفهوم d أدقّ من d'.

d أدقّ من d' $\Leftrightarrow$ كل كرة مفتوحة بالنسبة لـ d' تحوي كرة مفتوحة بالنسبة لـ d وبنفس المركز.

0,5

2. بيّن أنّ جماعة الكرات المفتوحة في فضاء متري (X,d) تشكّل أساسا للطبولوجيا الملحقة بالمسافة d.

نعلم أن كل كرة مفتوحة جزء مفتوح في (X,d)، كما أن كل مفتوح في (X,d) عبارة عن اتحاد كرات مفتوحة. بالفعل، ليكن O جزءاً مفتوحا في (X,d). من أجل كل $x\in O$ يوجد $r_x>0$ بحيث $B(x,r_x)\subset O$، ومنه $O=\bigcup_{x\in O}\{x\}\subset\bigcup_{x\in O}B(x,r_x)\subset O$ أي $O=\bigcup_{x\in O}B(x,r_x)$.

0,5

0,75

3. اعط تعريف "فضاء تام".

تعريف: نقول إن الفضاء المتري (X,d) تام إذا كانت كل متتالية كوشية في X متقاربة.

0,5

4. أجب بـ"صحيح" أو "خطأ" دون تعليل (نظام التنقيط سلبي):

الفضاء المتري الجزئي $\mathbb{N}$ من $\mathbb{R}$ الاعتيادي تامّ: صحيح ±0,25

الفضاء المتري $\mathbb{R}^n$ المزوّد بالمسافة d_1 تامّ: صحيح ±0,25

الفضاء المتري $\mathbb{R}^n$ المزوّد بالمسافة d_∞ تامّ: صحيح ±0,25

الفضاء المتري $C([0,1],\mathbb{R})$ المزوّد بالمسافة d_1 تام: خطأ ±0,25

تذكير: $d_1(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|\,dx$.

الفضاء المتري $C([0,1],\mathbb{R})$ المزوّد بمسافة التقارب المنتظم d_∞ تام: صحيح ±0,25

التمرين 2 :

① المتراجحة بديهية من أجل $t=0$.

بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $t \mapsto \ln(1+t)$ في المجال $[0,t]$ $(t>0)$ نحصل على $\ln(1+t) = \frac{1}{1+c}\, t$ 0,5

حيث c عدد حقيقي موجب تماما (أقل من t)، وبملاحظة $\frac{1}{1+c} \leq 1$ يأتي:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ : \ln(1+t) \leq t$$

② ليكن x، y و z ثلاثة عناصر من X. بفضل خاصيتي الفصل والتناظر للمسافة d، لدينا:

- $d'(x,y) = 0 \iff \ln(1+d(x,y)) = 0 \iff d(x,y) = 0 \iff x = y$ 0,25
- $d'(x,y) = \ln(1+d(x,y)) = \ln(1+d(y,x)) = d'(y,x)$. 0,25

استنادا إلى خاصية المتراجحة المثلثية لـ d وتزايد الدالة $t \mapsto \ln(1+t)$ يأتي:

$$\begin{aligned} d'(x,z) + d'(z,y) &= \ln(1+d(x,z)) + \ln(1+d(z,y)) \\ &= \ln\big((1+d(x,z)) \cdot (1+d(z,y))\big) \\ &= \ln\big(1+d(x,z)+d(z,y)+\underbrace{d(x,z)\,d(z,y)}_{\geq 0}\big) \\ &\geq \ln\big(1+d(x,z)+d(z,y)\big) \\ &\geq \ln\big(1+d(x,y)\big) = d'(x,y) \end{aligned}$$ 1,25

وهو المطلوب .

الخلاصة : d' مسافة على X.

③ بالاستفادة من السؤال الأول نكتب:

$$\forall x,y \in X : d'(x,y) = \ln(1+d(x,y)) \leq d(x,y)$$

وهو ما يستلزم أن

$$\forall a \in X, \ \forall r>0 : B_d(a,r) \subset B_{d'}(a,r).$$ 0,75

بالفعل

$$x \in B_d(a,r) \Rightarrow d(a,x) < r \Rightarrow d'(a,x) < r \Rightarrow x \in B_{d'}(a,r)$$

إذن كل كرة مفتوحة بالنسبة للمسافة d' تحوي كرة مفتوحة بالنسبة للمسافة d ولنفس المركز، ما يعني أن d أدق من d'. 0,5

④ لنفرض أنّ (X,d') فضاء تام و لنبيّن حينئذٍ أنّ (X,d) تام أيضًا.

لنعتبر متتالية كوشية $(x_n)_n$ في (X,d)، أي:

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall m,n\geq N:\ d(x_m,x_n)\leq\varepsilon$$ 0,5

وبفضل العلاقة $d'\leq d$ يأتي:

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall m,n\geq N:\ d'(x_m,x_n)\leq\varepsilon$$ 0,25

ما يعني أنّ $(x_n)_n$ كوشية في (X,d') الذي هو تام، ومنه (x_n) متقاربة في (X,d') نحو عنصر a من X، أي: 0,25

$$\lim_{n\to\infty} d'(a,x_n)=0.$$ 0,25

منه بفضل استمرارية الدالة الأسية:

$$\lim_{n\to\infty} e^{d'(a,x_n)}=e^{\lim_{n\to\infty} d'(a,x_n)}=e^0=1$$ 0,25

أي:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+d(a,x_n)\right)=1$$

ومن ثمّ 0,25

$$\lim_{n\to\infty} d(a,x_n)=0$$

ما يبيّن أنّ $(x_n)_n$ متقاربة في (X,d).

خلاصة: كل متتالية كوشية في (X,d) متقاربة، ما يعني أنّ (X,d) تام.

التمرين 3 :

$$\tau=\{\phi\}\cup\{O\subset\mathbb{R};\ C_{\mathbb{R}}O\subset\mathbb{N}\}$$

1/ τ طبولوجيا على $\mathbb{R}$ ؟

* $\phi\in\tau$ فرضا. (0,25)

$\mathbb{R}\in\tau$ لأنّ $C_{\mathbb{R}}\mathbb{R}=\phi\subset\mathbb{N}$.

* الاستقرار بالنسبة للاتحاد الكيفي: لتكن $(O_i)_{i\in I}$ جماعة عناصر من τ.

. إذا كانت جميع الأجزاء O_i خالية فإنّ $\bigcup_{i\in I}O_i=\phi\in\tau$.

. لنفرض أنّه يوجد $i_0\in I$ بحيث $O_{i_0}\neq\phi$ ، عندئذ $CO_{i_0}\subset\mathbb{N}$ ولدينا: (1)

$$O_{i_0}\subset\bigcup_{i\in I}O_i$$

ومنه

$$CO_{i_0}\supset C\bigcup_{i\in I}O_i$$

ما ينتج عنه $C\bigcup_{i\in I}O_i\subset\mathbb{N}$ أي $\bigcup_{i\in I}O_i\in\tau$.

* الاستقرار بالنسبة للتقاطع المنتهي: ليكن O_1 و O_2 عنصرين من τ.

إذا كان $O_1=\phi$ أو $O_2=\phi$ فإنّ $O_1\cap O_2=\phi\in\tau$.

لنفرض أنّ $O_1\neq\phi$ و $O_2\neq\phi$ ، عندئذ $C(O_1\cap O_2)=CO_1\cup CO_2\subset\mathbb{N}$ (1)

لأنّ $CO_1\subset\mathbb{N}$ و $CO_2\subset\mathbb{N}$. إذن $O_1\cap O_2\in\tau$.

خلاصة : τ تتوفر على جميع الشروط المطلوبة لتكون طبولوجيا على $\mathbb{R}$.

2/ المقارنة بين الطبولوجيا τ وطبولوجيا المتممات المنتهية σ على $\mathbb{R}$.

لنتذكر بأنّ جزء A من $\mathbb{R}$ يكون مفتوحا في $(\mathbb{R},\sigma)$ إذا كان $A=\phi$

أو كانت متممته $C_{\mathbb{R}}A$ منتهية. (0,25)

* المجموعة $\mathbb{R}\setminus\{-1\}\in\sigma$ لأنّ متممتها $\{-1\}$ منتهية ، ولكن $\mathbb{R}\setminus\{-1\}\notin\tau$ (0,5)

لأنّ متممتها $\{-1\}$ ليست محتواة في $\mathbb{N}$.

من جهة أخرى $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}\in\tau$ ولكن $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}\notin\sigma$. (0,5)

نستنتج أنّ τ و σ غير قابلتين للمقارنة بينهما. (0,25)

3/ ليكن O_1 و O_2 مفتوحين في $(\mathbb{R},\tau)$ غير خاليين.

لنفرض أنّ $O_1\cap O_2=\phi$ ، عندئذ $C_{\mathbb{R}}(O_1\cap O_2)=\mathbb{R}$ ومنه $C_{\mathbb{R}}(O_1\cap O_2)\not\subset\mathbb{N}$ (0,5)

وهذا تناقض . نستنتج أنّ كل المفتوحات غير الخالية في $(\mathbb{R},\tau)$ متقاطعة مثنى مثنى،

وعليه فإنّ $(\mathbb{R},\tau)$ فضاء غير منفصل. بالفعل ليكن a و b عنصرين (0,5)

مختلفين من $\mathbb{R}$ وليكن O_a مفتوحاً يشمل a و O_b مفتوحاً يشمل b. بناء على ما سبق $O_a \cap O_b \neq \phi$.

/4 مغلقات $(\mathbb{R},\tau)$.

ليكن F جزءاً من $\mathbb{R}$. لدينا:

F مغلق في $(\mathbb{R},\tau)$ $\Longleftrightarrow C_{\mathbb{R}}F \in \tau \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_{\mathbb{R}}F = \phi \\ \text{أو} \\ C_{\mathbb{R}}(C_{\mathbb{R}}F) \subset \mathbb{N} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F = \mathbb{R} \\ \text{أو} \\ F \subset \mathbb{N} \end{array} \right.$

إذن مغلقات $(\mathbb{R},\tau)$ هي $\mathbb{R}$ وكل أجزاء المجموعة $\mathbb{N}$.

1

/5 بناء على ما سبق $A=\{1\}$ جزء مغلق (باعتباره جزء من $\mathbb{N}$) ومنه $\bar{A}=\{1\}$ 0,5،
وأصغر مغلق يحوي $B=\{-1\}$ هو $\mathbb{R}$ نفسه، إذن $\bar{B}=\mathbb{R}$ 0,5.
$(\mathbb{R},\tau)$ يقبل جزء منتهيا ($B=\{-1\}$) كثيفا حيثما كان، إذن $(\mathbb{R},\tau)$ قابل للفصل.

/6 بما أن مغلقات $(\mathbb{R},\tau)$ هي $\mathbb{R}$ وكل أجزاء المجموعة $\mathbb{N}$، فإن كل أجزاء $\mathbb{N}$ مغلقات في $\mathbb{N}$ المزود بالطبولوجيا الأثر $\tau_{\mathbb{N}}$ المحدثة بواسطة الطبولوجيا τ.
ومن ثمّ كل أجزاء $\mathbb{N}$ مفتوحة في $(\mathbb{N},\tau_{\mathbb{N}})$ مما يعني أنّ $\tau_{\mathbb{N}}$ هي الطبولوجيا الانقطاعية على $\mathbb{N}$: $\tau_{\mathbb{N}} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

1,5

/7 نرمز بـ τ_u للطبولوجيا الاعتيادية لـ $\mathbb{R}$، ونعتبر التطبيق $f:(\mathbb{R},\tau)\to(\mathbb{R},\tau_u)$
المعرّف بـ:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{if } x \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

نميّز حالتين:

الحالة 1: إذا كان $x_0 \in \mathbb{N}$ فإنّ $f(x_0)=0$. نلاحظ أنّ $]-1,1[$ جوار لـ $f(x_0)=0$ في $(\mathbb{R},\tau_u)$ في حين أنّ $f^{-1}(]-1,1[)=\{x\in\mathbb{R};\ -1<f(x)<1\}=\mathbb{N}$ ليس جواراً لـ x_0 لأنه لا يحوي أي مفتوح في $(\mathbb{R},\tau)$. إذن، f غير مستمر عند أي نقطة من $\mathbb{N}$.

1

الحالة 2: إذا كان $x_0\notin\mathbb{N}$ فإنّ $f(x_0)=1$. ~~[illegible]~~ الجماعة $\{]1-\varepsilon,1+\varepsilon[;\ \varepsilon>0\}$ أساس لجوارات النقطة 1 في $(\mathbb{R},\tau_u)$، ولدينا:

$$f^{-1}(]1-\varepsilon,1+\varepsilon[) = \{x\in\mathbb{R};\ 1-\varepsilon<f(x)<1+\varepsilon\}$$

$$= \begin{cases} \{x\in\mathbb{R};\ f(x)=1\} & \text{if } \varepsilon\le 1 \\ \{x\in\mathbb{R};\ f(x)=1 \text{ or } f(x)=0\} & \text{if } \varepsilon>1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\mathbb{N} & \text{if } \varepsilon\le 1 \\ \mathbb{R} & \text{if } \varepsilon>1 \end{cases}$$

في كلتا الحالتين، $f^{-1}(]1-\varepsilon,1+\varepsilon[)$ جوار لـ x_0 في $(\mathbb{R},\tau)$.
إذن f مستمر عند كل نقطة من $C_{\mathbb{R}}\mathbb{N}$

1,25