

ESPACES METRIQUES

Prof. N. Merazga

11 novembre 2025

Table des matières

1	Distances, boules	2
2	Topologie d'un espace métrique	7
3	Suites dans un espace métrique	13
4	Continuité et uniforme continuité	17
4.1	Continuité	17
4.2	Uniforme continuité	18
5	Espaces métriques complets	21

Préambule

Ce chapitre fondamental qui constitue une introduction aux espaces métriques, jette les bases de l'étude de la **Topologie** et de l'**Analyse Fonctionnelle**. Si jusqu'à présent votre parcours mathématique s'est principalement déroulé dans l'espace $\mathbb{R}^n$, ce chapitre vous ouvrira de nouvelles perspectives en généralisant les notions de **distance**, de **continuité** et de **limite** à des contextes plus vastes et plus abstraits.

Pourquoi étudier les espaces métriques ?

En mathématiques, l'idée de "proximité" entre des points ne se limite pas aux trois dimensions de notre espace familier. Elle s'étend aux espaces de fonctions, de suites et d'objets mathématiques abstraits. Les espaces métriques offrent un cadre conceptuel qui nous permet de :

1. **Définir une distance de manière flexible**, adaptée à des contextes variés.
2. **Étudier la convergence et la continuité** dans des espaces parfois inhabituels.
3. **Poser les bases de concepts avancés** tels que les **espaces vectoriels normés** et les **espaces de Hilbert**.

Qu'allons-nous apprendre dans ce chapitre ?

Nous commencerons par la définition d'un espace métrique et par des exemples classiques (comme $\mathbb{R}^n$, les espaces de fonctions, l'espace discret). Nous aborderons ensuite des concepts clés tels que :

- Boules ouvertes et fermées.
- Ensembles ouverts et fermés.
- Points intérieurs, points adhérents, points d'accumulation et points isolés.
- Convergence dans les espaces métriques.
- Continuité des applications agissant entre espaces métriques.

En quoi ces concepts seront-ils utiles ?

Ces outils seront essentiels pour comprendre :

- Le théorème du point fixe.
- Les principes de l'analyse fonctionnelle.
- Les applications aux équations différentielles et à la physique mathématique.

Pour conclure

Dans ce chapitre, nous verrons comment des concepts comme la "distance" ou la "proximité" sont unifiés sous une même structure, malgré la diversité de leurs applications. Je vous souhaite une exploration passionnante dans le monde de l'abstraction et de la beauté mathématique !

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Distances, boules

Définition 1 (Distance, espace métrique) Soit X un ensemble non vide. Une distance ou métrique sur X est une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui satisfait les propriétés suivantes pour tous $x, y, z \in X$:

(D1) $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$, [Séparation]

(D2) $d(x, y) = d(y, x)$, [Symétrie]

(D3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, [Inégalité triangulaire].

Muni de la distance d , l'ensemble X est appelé espace métrique et est noté (X, d) .

Exemple 1 Sur un ensemble non vide X , l'application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

est une distance dite discrète ou triviale, et (X, d) est appelé espace métrique discret.

Exemple 2 Sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'application $d : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$d(x, y) = |x - y|$$

est une distance appelée distance usuelle ou naturelle de $\mathbb{K}$.

Exemple 3 Sur l'espace $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on définit, en notant $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, les distances principales suivantes :

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \\ d_2(x, y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad (\text{distance euclidienne}) \\ d_p(x, y) &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1 \quad (\text{distance höldérienne d'ordre } p) \\ d_\infty(x, y) &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|. \end{aligned}$$

Pour $n = 1$, on a $d_1 = d_2 = d_p = d_\infty$.

L'inégalité triangulaire pour d_p découle de l'inégalité classique (1) appelée inégalité de Minkowski.

Théorème 1 (Inégalité de Minkowski, version discrète) Soit $p \in [1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tous $a_i, b_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, n$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1)$$

Exemple 4 Considérons l'ensemble $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ des applications réelles bornées sur un ensemble X . On rappelle que

$$\begin{aligned} f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ est bornée} &\iff f(X) \text{ est une partie bornée de } \mathbb{R} \\ &\iff \exists C > 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq C \text{ pour tout } x \in X. \end{aligned}$$

Sur l'ensemble $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, on définit la distance

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Exemple 5 Sur l'ensemble $C([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ continue}\}$, on définit les distances principales suivantes en posant pour $f, g \in C([a, b], \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} d_1(f, g) &= \int_a^b |f(t) - g(t)| dt \\ d_2(f, g) &= \sqrt{\int_a^b (f(t) - g(t))^2 dt} \\ d_\infty(f, g) &= \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)| \quad [\text{distance de la convergence uniforme}] \\ d_p(f, g) &= \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad p \geq 1. \end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire pour d_p se réduit à l'inégalité de Minkowski pour les intégrales.

Théorème 2 (Inégalité de Minkowski, version continue) Si $p \in [1, +\infty[$ et $f, g \in C([a, b], \mathbb{K})$, alors

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2)$$

Proposition 1 Pour tous points x, y et z d'un espace métrique (X, d) , on a

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y). \quad (3)$$

Définition 2 (Distance induite, sous-espace métrique) Si (X, d) est un espace métrique et A une partie non vide de X , la restriction d_A de d à $A \times A$ est une distance sur A . L'espace métrique (A, d_A) est dit sous-espace métrique de (X, d) .

Définition 3 (Espace métrique produit) Soit (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques. On définit sur l'ensemble produit $X_1 \times X_2$ les distances principales suivantes en posant pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$:

$$\begin{aligned} D_1(x, y) &= d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \\ D_2(x, y) &= \sqrt{(d_1(x_1, y_1))^2 + (d_2(x_2, y_2))^2} \\ D_p(x, y) &= [(d_1(x_1, y_1))^p + (d_2(x_2, y_2))^p]^{1/p}, \quad p \geq 1 \\ D_\infty(x, y) &= \max \{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\} \end{aligned}$$

Muni de l'une des distances ci-dessus, $X_1 \times X_2$ est appelé espace métrique produit.

Définition 4 (Boule et sphère) Soit (X, d) un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$. On définit :

- Boule ouverte : $B(a, r) = \{x \in X ; d(a, x) < r\}$
- Boule fermée : $\bar{B}(a, r) = \{x \in X ; d(a, x) \leq r\}$
- Sphère : $S(a, r) = \{x \in X ; d(a, x) = r\}$

Dans les trois cas, a est appelé le centre et r le rayon.

Comme conséquences directes de la définition ci-dessus, on a :

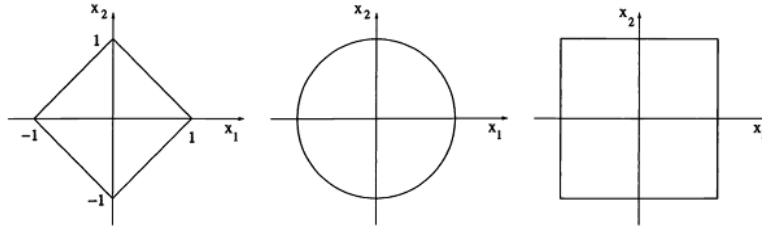
Remarque 1 Pour tout $a \in X$ et tous réels strictement positifs r et r' , on a :

- i) $S(a, r) = \bar{B}(a, r) \setminus B(a, r)$,
- ii) $r < r' \implies B(a, r) \subset \bar{B}(a, r) \subset B(a, r')$.

Exemple 6 Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$, on a pour $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$:

$$B(a, r) =]a - r, a + r[, \quad \bar{B}(a, r) = [a - r, a + r] \quad \text{et} \quad S(a, r) = \{a - r, a + r\}$$

Exemple 7 Dans $\mathbb{R}^2$, les boules ouvertes (resp. fermées) de centre 0 de rayon 1 ont les formes suivantes pour les distances d_1 , d_2 et d_∞ (resp. y compris les frontières) :

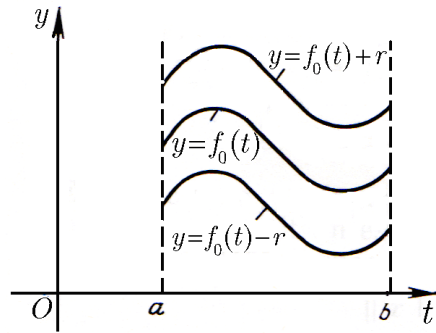


Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$d_2(x, 0) \leq 1 \iff \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1 \iff x_1^2 + x_2^2 \leq 1,$$

$$d_\infty(x, 0) \leq 1 \iff \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 1 \iff (|x_1| \leq 1 \text{ et } |x_2| \leq 1) \iff \begin{cases} -1 \leq x_1 \leq 1, \\ -1 \leq x_2 \leq 1. \end{cases}$$

Exemple 8 Dans $C([a, b], \mathbb{R})$ muni de la distance de la convergence uniforme d_∞ , la boule $B(f_0, r)$ de centre f_0 et de rayon r est l'ensemble des applications $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ dont les courbes sont situées strictement entre celles des applications $f_0 - r$ et $f_0 + r$.



Exemple 9 Dans un espace métrique discret (X, d) , on a pour tout $a \in X$:

- si $r < 1$: $B(a, r) = \overline{B}(a, r) = \{a\}$ et donc $S(a, r) = \emptyset$;
- si $r = 1$: $B(a, r) = \{a\}$, $\overline{B}(a, r) = X$ et donc $S(a, r) = X \setminus \{a\}$;
- si $r > 1$: $B(a, r) = \overline{B}(a, r) = X$ et donc $S(a, r) = \emptyset$.

Définition 5 Soit (X, d) un espace métrique et A une partie non vide de X .

- On appelle distance d'un point x à A , le nombre positif ou nul

$$d(x, A) = \inf \{d(x, y) ; y \in A\}.$$

- On appelle diamètre de A et on note $\text{diam}(A)$, la quantité positive ou égale à $+\infty$:

$$\text{diam } A = \sup \{d(x, y) ; x, y \in A\}.$$

- Une partie A de X est dite bornée si son diamètre est fini.

Exemple 10 Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, on a

$$d(0,]1, 3[) = \inf_{x \in]1, 3[} x = \inf]1, 3[= 1, \quad \text{diam}(]1, 3[) = \sup_{x, y \in]1, 3[} |x - y| = 2.$$

On vérifie immédiatement que

Proposition 2 Une partie non vide A de X est bornée si et seulement si il existe une boule contenant A .

Preuve. Supposons A bornée, donc $\text{diam } A < +\infty$. Soit a un point arbitraire de A , alors $A \subset \overline{B}(a, \text{diam } A)$ car $\forall x \in A : d(a, x) \leq \text{diam } A$.

Inversement, supposons $A \subset B(a, r)$. Pour $x, y \in A$, on a :

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < 2r$$

d'où,

$$\text{diam } A = \sup_{(x, y) \in A^2} d(x, y) \leq 2r < +\infty,$$

d'où la bornitude de A . ■

Proposition 3 Soit (X, d) un espace métrique et soit A et B deux parties non vides de X . On a :

- $\forall x, y \in X, |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.
- $\text{diam } A = 0 \iff A$ est réduit à un point.
- $A \subset B \implies \text{diam } A \leq \text{diam } B$.
- A et B bornées $\implies A \cup B$ bornée (la réunion de deux parties bornées est bornée).
- Toute partie finie de X est bornée.

Définition 6 Soit X un ensemble et (Y, d) un espace métrique. Une application $f : X \rightarrow Y$ est dite bornée si son image $f(X)$ est bornée dans (Y, d) , i.e. $\text{diam } f(X) < +\infty$.

On note $\mathcal{B}(X, Y)$ l'ensemble des applications $f : X \rightarrow Y$ bornées. La formule

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)),$$

définit une distance sur $\mathcal{B}(X, Y)$, appelée distance de la convergence uniforme.

Définition 7 (Equivalence de distances) On dit que deux distances d et d' sur un ensemble X sont métriquement équivalentes s'il existe deux constantes réelles $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que

$$\forall x, y \in X : \alpha d(x, y) \leq d'(x, y) \leq \beta d(x, y), \quad (4)$$

soit

$$\forall x, y \in X, \text{ avec } x \neq y : \alpha \leq \frac{d'(x, y)}{d(x, y)} \leq \beta.$$

Exemple 11 Les distances d_1, d_2 et d_∞ sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes en vertu des inégalités suivantes

$$d_\infty \leq d_1 \leq \sqrt{n}d_2 \leq nd_\infty. \quad (5)$$

Exemple 12 Les distances D_1, D_2 et D_∞ définies sur l'espace métrique produit $X_1 \times X_2$ (cf. exemple 3) sont équivalentes en vertu des inégalités suivantes

$$D_\infty \leq D_1 \leq \sqrt{2}D_2 \leq 2D_\infty. \quad (6)$$

Remarque 2 Pour établir la seconde inégalité dans (5) et (6), on a besoin de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous scalaires $a_i, b_i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, n$.

Remarque 3 On peut vérifier que deux distances équivalentes ont les mêmes parties bornées.

2 Topologie d'un espace métrique

Définition 8 (Ouvert, fermé) Soit (X, d) un espace métrique. On appelle ouvert (ou partie ouverte) de (X, d) toute partie $\mathcal{O}$ de X qui vérifie la propriété :

$$\forall x \in \mathcal{O}, \exists r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \subset \mathcal{O}. \quad (8)$$

Un sous-ensemble de X est dit fermé si son complémentaire est ouvert.

La famille τ des ouverts de (X, d) est appelée topologie associée à la distance d .

Proposition 4 Soit (X, d) un espace métrique. La famille τ des ouverts $\mathcal{O}$ de X satisfait les trois propriétés principales suivantes :

- (O1) X et $\emptyset$ sont des éléments de τ ;
- (O2) τ est stable par union quelconque ; i.e. une union quelconque d'éléments de τ est un élément de τ ;
- (O3) τ est stable par intersection finie ; i.e. une intersection finie d'éléments de τ est un élément de τ .

Preuve.

(O1) X et $\emptyset$ sont des éléments de τ car vérifient la propriété 8.

(O2) Soit $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de τ , et soit x un élément arbitraire de $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$. Alors, $x \in \mathcal{O}_{i_0}$ pour un certain $i_0 \in I$. Comme $\mathcal{O}_{i_0} \in \tau$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \mathcal{O}_{i_0}$, et par conséquent $B(x, r) \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$. Ceci montre que $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \in \tau$.

(O3) Soit $(\mathcal{O}_i)_{i=1}^n$ une famille finie d'éléments de τ , et soit x un élément arbitraire de $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{O}_i$. Alors, $x \in \mathcal{O}_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Par suite,

$$\forall i = 1, \dots, n, \exists r_i > 0 : B(x, r_i) \subset \mathcal{O}_i$$

ce qui entraîne en posant $r = \min_{1 \leq i \leq n} r_i > 0$:

$$B(x, r) = \bigcap_{i=1}^n B(x, r_i) \subset \bigcap_{i=1}^n \mathcal{O}_i.$$

Ceci montre que $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{O}_i \in \tau$.

■

Des égalités bien connues (lois de De Morgan)

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

on déduit des propriétés (O1), (O2) et (O3) celles des fermés.

Proposition 5 La famille de tous les fermés d'un espace métrique (X, d) vérifie

(F1) $\emptyset$ et X sont des fermés.

(F2) Toute intersection de fermés est un fermé.

(F3) Une réunion finie de fermés est un fermé.

Exemple 13 Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, on a pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$:

- les intervalles ouverts $]a, b[,]a, +\infty[$ et $]-\infty, a[$ sont des ouverts. En effet, pour tout $x \in]a, b[$ on peut prendre $r = \min \{x - a, b - x\}$, pour $x \in]a, +\infty[$ on peut prendre $r = x - a$ et pour $x \in]-\infty, a[$ on peut prendre $r = a - x$.
- L'union $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ est un ouvert comme réunion de deux ouverts.
- Les intervalles fermés $[a, +\infty[$ et $]-\infty, a]$ sont des fermés comme complémentaires des ouverts $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$ respectivement.
- l'intervalle fermé $[a, b]$ est un fermé comme complémentaire de l'ouvert $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$. $[a, b]$ n'est pas un ouvert car pour le point a il n'existe aucun réel $r > 0$ tel que $]a - r, a + r[$ soit inclus dans $[a, b]$.
- l'intervalle $]a, b]$ n'est pas un ouvert car pour le point b il n'existe aucun réel $r > 0$ tel que $]b - r, b + r[$ soit inclus dans $]a, b]$. Ce n'est pas un fermé car son complémentaire $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ n'est pas un ouvert.
- l'ensemble $\{a\}$ n'est pas un ouvert et, plus généralement, toute partie finie non vide de $\mathbb{R}$ n'est pas un ouvert car ne contient aucun intervalle ouvert. $\{a\}$ est un fermé comme complémentaire de l'ouvert $]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$. Il s'ensuit que toute partie finie de $\mathbb{R}$ est un fermé.

- l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels n'est pas un ouvert, car en raison de la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il n'existe aucun intervalle ouvert inclus dans $\mathbb{Q}$. Idem pour l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels en raison de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ne sont pas des fermés.

Proposition 6 Dans un espace métrique (X, d) ,

- toute boule ouverte est un ouvert ;
- toute boule fermée est un fermé ;
- toute sphère est un fermé.

Preuve. Soit $a \in X$ et $r > 0$ arbitraires.

- $x \in B(a, r) \implies d(a, x) < r \implies r - d(a, x) > 0$. Posons $r' = r - d(a, x)$; alors $B(x, r') \subset B(a, r)$.
- $x \in \overline{B(a, r)}^c \implies d(a, x) > r \implies d(a, x) - r > 0$. Posons $r'' = d(a, x) - r$; alors $B(x, r'') \subset \overline{B(a, r)}^c$. Ainsi, $\overline{B(a, r)}^c$ est un ouvert et par conséquent, $\overline{B(a, r)}$ est un fermé.
- $S(a, r) = \overline{B(a, r)} \setminus B(a, r) = \overline{B(a, r)} \cap B(a, r)^c$. Ainsi, $S(a, r)$ est un fermé comme intersection de deux fermés.

■

Proposition 7 (Caractérisation d'un ouvert) Dans un espace métrique (X, d) , une partie est ouverte si et seulement si elle est réunion de boules ouvertes (par convention $\bigcup_{\emptyset} = \emptyset$).

Preuve. D'après les propositions 4 et 6, une réunion de boules ouvertes est un ouvert de (X, d) . Réciproquement, soit $\mathcal{O}$ un ouvert de (X, d) ; pour tout $x \in \mathcal{O}$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset \mathcal{O}$. Par suite, $\mathcal{O} = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} \{x\} \subset \bigcup_{x \in \mathcal{O}} B(x, r_x) \subset \mathcal{O}$. ■

Proposition 8 Toute partie finie d'un espace métrique est fermée.

On peut comparer deux distances définies sur un même ensemble X en comparant les topologies associées à chacune d'elles.

Définition 9 Soient d et d' deux distances sur un ensemble X .

- On dit que d est plus fine que d' si tout ouvert pour d' est ouvert pour d .
- On dit que d et d' sont topologiquement équivalentes si chacune est plus fine que l'autre ; i.e. qu'elles définissent la même topologie (la même famille d'ouverts).

Ces notions se caractérisent aisément avec les boules comme ceci :

Proposition 9 d est plus fine que d' si et seulement si toute boule ouverte pour d' contient une boule ouverte pour d et de même centre.

Preuve. Notons $B_d(x)$ (resp. $B_{d'}(x)$) une boule ouverte quelconque de centre x pour d (resp. d'). Supposons d plus fine que d' . Chaque boule $B_{d'}(x)$ est un ouvert pour d' , donc pour d , et contient une boule $B_d(x)$. Réciproquement, soit $\mathcal{O}$ un ouvert pour d' et $x \in \mathcal{O}$; alors $\mathcal{O}$ contient une boule $B_{d'}(x)$ donc aussi une boule $B_d(x)$. Ceci est vrai pour tout x dans $\mathcal{O}$; donc $\mathcal{O}$ est ouvert pour d . ■

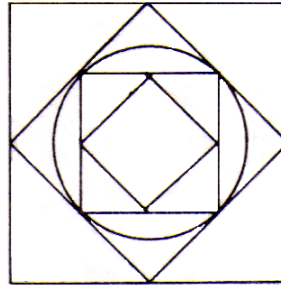
Exemple 14 Dans $\mathbb{R}^n$, les distances d_1 , d_2 et d_∞ sont topologiquement équivalentes deux à deux. Comparons d_1 et d_∞ par exemple. On a d'une part, $d_\infty \leq d_1$ ce qui entraîne que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall r > 0 : B_1(x, r) \subset B_\infty(x, r).$$

D'autre part, on a $d_1 \leq nd_\infty$ ce qui se traduit par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall r > 0 : B_\infty\left(x, \frac{r}{n}\right) \subset B_1(x, r).$$

Pour $n = 2$, on voit l'équivalence topologique des distances d_1 , d_2 et d_∞ sur la figure ci-dessous



Proposition 10 Si les distances d et d' sont équivalentes, alors elles sont topologiquement équivalentes. La réciproque est fausse.

Preuve. Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ deux constantes telles que

$$\forall x, y \in X : \quad \alpha d(x, y) \leq d'(x, y) \leq \beta d(x, y). \quad (9)$$

Pour tout $x \in X$ et $r > 0$, on a alors

$$B_d\left(x, \frac{r}{\beta}\right) \subset B_{d'}(x, r) \subset B_d\left(x, \frac{r}{\alpha}\right).$$

Par ailleurs, sur tout espace métrique (X, d) , la distance bornée $d' = \frac{d}{1+d}$ est topologiquement équivalente à d compte tenu de ce que $B_{d'}\left(x, \frac{r}{1+r}\right) \subset B_d(x, r) \subset B_{d'}(x, r)$, mais d' n'est pas équivalente à d en général, car d' est bornée alors que d ne l'est pas forcément. ■

Définition 10 (Voisinage d'un point) Soit (X, d) un espace métrique et x un point donné de X . Une partie V de X est dite un voisinage de x si elle contient un boule centrée en x .

On note $\mathcal{V}(x)$ la famille des voisinages de x . Ainsi,

$$V \in \mathcal{V}(x) \iff \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset V.$$

Définition 11 (Point intérieur, point adhérent, point d'accumulation, point isolé) Soit (X, d) un espace métrique, A une partie de X et x un point de X .

- x est dit un point intérieur à A si A est un voisinage de x , i.e.

$$\exists r > 0 : B(x, r) \subset A.$$

L'ensemble des points intérieurs à A est appelé intérieur de A et est noté $\overset{\circ}{A}$.

- x est dit un point adhérent à A si toute boule centrée en x rencontre A , i.e.

$$\forall \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset,$$

soit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists y \in A : d(x, y) < \varepsilon.$$

L'ensemble des points adhérents à A est appelé adhérence de A et est noté $\overline{A}$.

- x est dit un point d'accumulation de A si toute boule centrée en x rencontre A en un point autre que x , i.e.

$$\forall \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \text{et} \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \{x\},$$

soit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists y \in A : 0 < d(x, y) < \varepsilon.$$

- x est dit un point isolé de A s'il existe une boule centrée en x qui ne rencontre A qu'au point x lui-même, i.e.

$$\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}.$$

Remarque 4 Par définition, il vient immédiatement

$$\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A},$$

i.e. tout point intérieur à A appartient à A , et tout point de A est adhérent à A .

Remarque 5 Tout point isolé de A est un point de A .

Remarque 6 Les points isolés de A sont les éléments de $\overline{A}$ qui ne sont pas des points d'accumulation de A .

Exemple 15 Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, on a pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$:

- $\overset{\circ}{\{a\}} = \emptyset, \quad \overline{\{a\}} = \{a\},$
- $\overset{\circ}{[a, b]} = \overset{\circ}{[a, b[} = \overset{\circ}{]a, b]} = \overset{\circ}{]a, b[} =]a, b[, \quad \overline{[a, b]} = \overline{[a, b[} = \overline{]a, b]} = \overline{]a, b[} = [a, b],$
- $\overset{\circ}{[a, +\infty[} = \overset{\circ}{]a, +\infty[} =]a, +\infty[, \quad \overset{\circ}{]-\infty, b]} = \overset{\circ}{]-\infty, b[} =]-\infty, b[,$
- $\overline{[a, +\infty[} = \overline{]a, +\infty[} = [a, +\infty[, \quad \overline{]-\infty, b]} = \overline{]-\infty, b[} =]-\infty, b],$

- $\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \widehat{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \emptyset$, (tout intervalle ouvert contient des nombres rationnels et des nombres irrationnels)
- $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}, \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}, \overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
- $\overline{\left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\}} = \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \{0\}$.

Exemple 16 Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle,

- i) 0 et 1 sont des points isolés de l'ensemble $A = \{0, 1\}$. Plus généralement, tous les points d'un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$ sont isolés dans cet ensemble.
- ii) 2 est un point isolé de l'ensemble $A = [0, 1] \cup \{2\}$. Le reste des points de A sont des points d'accumulation : $A' = [0, 1]$.
- iii) tout point de $\mathbb{Z}$ est isolé dans $\mathbb{Z}$.
- iv) tout point de $\mathbb{R}$ est un point d'accumulation de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exemple 17 Dans un espace métrique discret, tous les points sont isolés.

Proposition 11 Soit (X, d) un espace métrique, A une partie non vide de X et x un point de X . On a

1. $x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$ (Caractérisation d'un point adhérent),
2. $\text{diam}(\overline{A}) = \text{diam}(A)$.

Proposition 12 Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X .

1. $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert de X contenu dans A .
2. A est ouverte si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.
3. $\overline{A}$ est le plus petit fermé de X contenant A .
4. A est fermée si et seulement si $\overline{A} = A$.

Comme une partie A d'un espace métrique contient ses points isolés, il résulte du point 4. de la proposition 12 que

Corollaire 1 Une partie A d'un espace métrique est fermée si et seulement si A contient ses points d'accumulation.

Preuve. A contient ses points d'accumulation $\iff \overline{A} \subset A \iff \overline{A} = A \iff A$ fermée. ■

Définition 12 (Densité) Soient A et B deux parties d'un espace métrique (X, d) . On dit que A est dense dans B si $\overline{A} \supset B$, i.e. si tout point de B est adhérent à A .

Si A est dense dans X , i.e. $\overline{A} = X$, on dit que A est partout dense.

Exemple 18 Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, on a

- $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont partout denses.
- $A =]0, 1[$ est dense dans $B = [0, 1[$ car $\overline{A} = [0, 1] \supset B$.

3 Suites dans un espace métrique

Une suite d'éléments d'un ensemble non vide X est une application s de $\mathbb{N}$ dans X . L'image $s(n)$ d'un $n \in \mathbb{N}$ par s sera notée x_n et sera appelée terme d'ordre n de la suite s . La suite s sera notée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(x_n)_n$ ou $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$. On ne doit pas confondre la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec l'ensemble de ses termes $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$. Par exemple, l'ensemble des termes de la suite $(1, -1, 1, -1, \dots)$ définie par $x_n = (-1)^n$ est $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\} = \{-1, +1\}$.

Une suite constante est une suite dont les termes ont tous la même valeur. Une suite stationnaire est une suite constante à partir d'un certain rang.

Si $(x_n)_n$ est une suite de X , on appellera sous-suite (ou suite extraite) de $(x_n)_n$ une suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_n$ où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. Par exemple, $(x_{2n})_n$, $(x_{2n+1})_n$, $(x_{n+1})_n \dots$ sont des sous-suites de $(x_n)_n$.

Une sous-suite de $(x_n)_n$ est généralement notée $(x_{n_k})_k$ avec $n_k = \varphi(k)$ ($(n_k)_k$ est alors une suite strictement croissante d'entiers naturels).

Définition 13 (Suite bornée) Une suite $(x_n)_n$ d'un espace métrique (X, d) est dite bornée si l'ensemble de ses termes $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ est borné dans (X, d) , i.e. si

$$\exists a \in X, \exists r > 0 : \{x_n ; n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{B}(a, r),$$

soit

$$\exists a \in X, \exists r > 0, \forall n \in \mathbb{N} : d(a, x_n) \leq r.$$

Exemple 19 Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, la suite de terme général $x_n = \frac{1}{n}$ est bornée du moment que $|x_n| = \frac{1}{n} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, i.e. $\{x_n ; n \in \mathbb{N}^*\} \subset]-1, 1[= B(0, 1)$.

Définition 14 (Suite convergente) Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments d'un espace métrique (X, d) et soit $a \in X$. On dit que a est une limite de $(x_n)_n$ quand n tend vers l'infini si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon : d(x_n, a) < \varepsilon, \quad (10)$$

i.e. si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon : x_n \in B(a, \varepsilon). \quad (11)$$

On dit aussi que $(x_n)_n$ converge vers a quand n tend vers l'infini et on note $x_n \rightarrow a$.

Si $(x_n)_n$ n'a pas de limite, elle est dite divergente.

Ainsi,

$$x_n \rightarrow a \stackrel{\text{déf}}{\iff} \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0.$$

Remarque 7 On peut reformuler (11) en disant "Toute boule de centre a contient tous les termes de la suite $(x_n)_n$ à partir d'un certain rang".

Exemple 20 La suite de terme général $x_n = (e^{-n}, \frac{1}{n})$ converge vers $(0,0)$ dans l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de l'une quelconque des distances principales.

Proposition 13 (Unicité de la limite) Toute suite $(x_n)_n$ d'un espace métrique (X, d) a au plus une limite. Si une telle limite $a \in X$ existe, on dit que a est la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers l'infini et on note $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Preuve. Supposons que $(x_n)_n$ admette deux limites distinctes a et b . Posons $r = d(a, b) > 0$. Comme $x_n \rightarrow a$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(a, \frac{r}{3})$ pour tout $n \geq N_1$. Par ailleurs, comme $x_n \rightarrow b$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(b, \frac{r}{3})$ pour tout $n \geq N_2$. Il s'ensuit que pour tout $n \geq N := \max(N_1, N_2)$, on a $x_n \in B(a, \frac{r}{3}) \cap B(b, \frac{r}{3})$ ce qui est absurde puisque $B(a, \frac{r}{3}) \cap B(b, \frac{r}{3}) = \emptyset$. ■

La notion de convergence d'une suite permet de caractériser l'adhérence $\overline{A}$ d'une partie A d'un espace métrique de la manière suivante :

Proposition 14 (Caractérisation séquentielle d'un point adhérent à un ensemble) Soit A une partie non vide d'un espace métrique (X, d) et soit $x \in X$. On a

$$x \in \overline{A} \iff \text{Il existe une suite de points de } A \text{ qui converge vers } x.$$

Preuve.

$\left[\begin{smallmatrix} ? \\ \Rightarrow \end{smallmatrix} \right]$ Soit $x \in \overline{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi définie est une suite de points de A et elle converge vers x puisque $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$.

$\left[\begin{smallmatrix} ? \\ \Leftarrow \end{smallmatrix} \right]$ Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de points de A telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, alors toute boule $B(x, \varepsilon)$ contient tous les éléments de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang, donc rencontre A ce qui signifie que $x \in \overline{A}$. ■

Corollaire 2 (Caractérisation séquentielle d'un fermé) Soit A une partie non vide d'un espace métrique. A est fermée si et seulement si toute suite convergente de points de A a sa limite dans A .

Preuve. Notons par $L(A)$ l'ensemble des limites des suites convergentes de A , i.e.

$$L(A) = \left\{ x \in X ; \exists (x_n) \subset A : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \right\}.$$

La proposition 14 signifie que $L(A) = \overline{A}$. Par conséquent, si $A \supset L(A) = \overline{A}$ alors $A = \overline{A}$ et donc A est fermée. Réciproquement, si A est fermée alors $A = \overline{A} = L(A)$ et A contient donc les limites de toutes ses suites convergentes. ■

Définition 15 (Suite de Cauchy) On dit qu'une suite (x_n) d'un espace métrique (X, d) est de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante (condition de Cauchy) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_\varepsilon : d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

i.e. si, dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) = 0.$$

Ceci peut aussi s'écrire comme ceci en posant $m = n + k$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall k \in \mathbb{N} : d(x_{n+k}, x_n) < \varepsilon.$$

Exemple 21 La suite de terme général $x_n = \frac{1}{n}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle ($N_\varepsilon = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$). Il en est de même pour la suite de terme général $x_n = e^{-n}$.

Voici une autre condition équivalente :

Proposition 15 Une suite (x_n) d'un espace métrique (X, d) est de Cauchy si et seulement si

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \text{diam}(S_p) = 0,$$

où $S_p = \{x_n ; n \geq p\}$.

Preuve. Il suffit d'observer que la condition de Cauchy équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \text{diam}(S_{N_\varepsilon}) \leq \varepsilon$$

ou de manière équivalente (compte tenu de la décroissance de la suite de parties $(S_p)_p$)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p \geq N_\varepsilon : \text{diam}(S_p) \leq \varepsilon. \quad (12)$$

Ainsi, $(\text{diam}(S_p))_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels positifs et la condition (12) signifie que sa limite est nulle quand $p \rightarrow \infty$. ■

Exemple 22 Dans $\mathbb{R}$, la suite de terme général $x_n = (-1)^n$ n'est pas de Cauchy car, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $S_p = \{-1, 1\}$ d'où $\text{diam}(S_p) = 2$.

Notons les propriétés suivantes des suites de Cauchy.

Proposition 16 Dans un espace métrique,

1. Toute suite convergente est de Cauchy. La réciproque est fausse.
2. Toute suite de Cauchy est bornée. La réciproque est fausse.
3. Toute suite extraite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.
4. Toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente est convergente.