جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي
السنة 2 ليسانس رياضيات (الطلبة المدينون)

قسم الرياضيات والإعلام الآلي
السنة الجامعية: 2026/2025

إمتحان في مادة "مدخل إلى الطبولوجيا" - المدّة: 90 دقيقة

ملاحظة: يطلب العناية بتعليل الأجوبة.

تمرين 1

نعتبر في $\mathbb{R}$ الجماعة σ المؤلّفة من $\mathbb{R}$ و $\emptyset$ كل جزء من $\mathbb{R}$ متمِّمته مجال مغلق متمركز عند الصفر (نصطلح على أنّ $\{0\} = [0]$ مجال مغلق مركزه 0).

1. أثبت أنّ σ طبولوجيا على $\mathbb{R}$.

2. قارن بين σ والطبولوجيا الإعتيادية τ على $\mathbb{R}$.

3. عيّن ملاصقة جزءٍ غيرِ خالٍ كيفيٍّ A في $(\mathbb{R},\sigma)$.

4. جِدْ **داخلية** و**ملاصقة** و**حافة** المجموعات التالية مع التعليل:

$$\{1\} \qquad \{0,1\} \qquad [0,1[\qquad \mathbb{N} \qquad \mathbb{Q} \qquad \mathbb{R}_+$$

5. هل $(\mathbb{R},\sigma)$ فضاء منفصل؟ قابل للفصل؟

6. ما هي الطبولوجيا الأثر $\sigma_{\mathbb{R}_+}$ المدرجة على $\mathbb{R}_+$ بواسطة σ؟

تمرين 2

ليكن $X =]0,+\infty[$. من أجل $x,y \in X$ ، نضع:

$$d(x,y) = |\ln(x) - \ln(y)|.$$

1. تحقّق من أنّ d مسافة على X.

2. نرمز بِ d_u للمسافة الإعتيادية على $\mathbb{R}$.

أ) بيّن أنّ للفضاءين المِتْرِيَيْن (X,d) و (X,d_u) نفس المتتاليات المتقاربة.

ب) استنتج أنّ التطبيق المطابق $\mathrm{id}_X : (X,d_u) \to (X,d)$ مستمر.

ج) استنتج أن المسافتين d و d_u متكافئتان طبولوجيا على X.

3. بيّن أنّ الفضاء $(\mathbb{R}, d_u)$ تام وأنّ (X, d_u) غير تام.

(**تذكير**: **مبرهنة بولزانو-فيرشتراس**: كل متتالية عددية محدودة في $(\mathbb{R}, d_u)$ تقبل متتالية جزئية متقاربة في $\mathbb{R}$).

4. أ) بيّن أنّ الفضاء المتري (X, d) تام.

(**تلميح:** أثبت أنّ التطبيق $\varphi : t \mapsto \ln(t)$ تقايس (isometry) من (X, d) نحو $(\mathbb{R}, d_u)$ ثمّ استنتج).

ب) هل المسافتان d و d_u متكافئتان (متريا) على X؟

5. نعتبر التطبيق $g: X \to X$ المعرَّف بـ $g(x) = \sqrt{x}$.

أ) هل g تطبيق مقلِّص بالنسبة للمسافة d؟

ب) استنتج أن المتتالية المعرفة بـ $x_0 > 0$ و $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$ تتقارب بالنسبة للمسافة d نحو نهاية يطلب تحديدها.

ج) هل التقارب حاصل بالمعنى المعتاد (أي بالنسبة للمسافة d_u)؟

بالتوفيق