الاسم واللقب: .... الفوج: ....

جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي قسم الرياضيات والإعلام الآلي

السنة 2 ليسانس رياضيات السنة الجامعية: 2025/2024

امتحان في مادة "مدخل إلى الطبولوجيا" – المدّة: 90 دقيقة

ملاحظات:

1. يطلب العناية بتعليل الأجوبة.
2. يتم تخصيص نقطة واحدة لتحرير الأجوبة ونظافة الورقة.

التمرين 1 (3 نقاط)

1. أذكر تعريف المسافة d_∞ في $\mathbb{R}^2$.

$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 : \quad d_\infty\big((x,y),(x',y')\big) =$ ....

2. ليكن a و b عددين حقيقيين. أثبت أنّ التطبيق $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرّف بـ $f(x,y) = ax + by$

مستمرّ بانتظام من $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ في $\mathbb{R}$ المزوّدة بمسافتها الإعتيادية.

....

....

....

....

....

3. لتكن المجموعة $X = \{1,2,3,4,5\}$.

جِدْ الطبولوجيا المولَّدة على X بواسطة الجماعة $\mathcal{P} = \big\{\{1\},\{1,5\},\{4,5\}\big\}$.

....

....

....

....

....

الاسم واللقب: .... الفوج: ....

التمرين 2 (6 نقاط)

ليكن (X,d) فضاء متريا.

1. أثبت أن $d' = \frac{d}{3+2d}$ مسافة أخرى على X.

2. بيّن أنّ $d' < \frac{1}{2}$ ، ثُمّ عيّن الكرة المفتوحة $B_{d'}(a,1)$ حيث a عنصر كيفي من X.

3. بيّن أنّ d أدقّ من d'.

4. بيّن أنّه إذا كانت $(x_n)_n$ متتالية كوشية في (X,d) فهي تبقى كذلك في (X,d').

5. عبّر عن d بدلالة d' : $d = \psi \circ d'$ حيث $\psi : \left[0,\frac{1}{2}\right[\to \mathbb{R}$ دالة مستمرة عند 0.

6. استنتج أنّ الفضاء (X,d) تامّ إذا كان الفضاء (X,d') تامّاً.

تمرين 3 (10 نقاط)

من أجل كل عدد حقيقي a نضع $I_a =]-\infty, a]$، ونرمز بـ τ للجماعة المكوَّنة من المجموعة الخالية $\emptyset$ وكل اتحادات المجالات I_a.

1. بيّن أنّ:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} I_a \qquad \text{و} \qquad \bigcup_{a\in\mathbb{R}_-^*} I_a =]-\infty, 0[$$

2. أثبت أنّ الجماعة τ طبولوجيا على $\mathbb{R}$.

3. وضّح أشكال المفتوحات في الفضاء $(\mathbb{R},\tau)$، ثمّ استنتج أشكال المغلقات في الفضاء $(\mathbb{R},\tau)$.

4. قارن بين الطبولوجيا τ وطبولوجيا المتممات المنتهية σ على $\mathbb{R}$.

5. هل $(\mathbb{R},\tau)$ فضاء منفصل؟ علّل إجابتك.

6. عيّن جماعة جوارات نقطة كيفية a من $\mathbb{R}$، ثُمّ جِدْ أساسا $\mathcal{B}(a)$ لجوارات a.

7. عيّن الداخلية والملاصقة والمجموعة المشتقة لكل واحدة من المجموعات التالية:

$$A = \{-5,1\}, \qquad B =]-5,1[, \qquad C = \mathbb{N}.$$

8. عيّن ملاصقة المجموعة $\mathbb{Z}$. هل $(\mathbb{R},\tau)$ فضاء قابل للفصل؟ علّل إجابتك.

9. أثبت أنّ $\frac{1}{2}$ نهاية في $(\mathbb{R},\tau)$ للمتتالية ذات الحد العام $x_n = \frac{1}{n}$ لمّا n يؤول إلى ∞.

بالتوفيق

تصحيح امتحان مادة "مدخل إلى الطبولوجيا"

التمرين 1 3

1. تعريف المسافة d_∞ في $\mathbb{R}^2$:

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 : \quad d_\infty\big((x,y),(x',y')\big) = \max\{|x-x'|,|y-y'|\}.$$ 0,25

2. إثبات أنّ التطبيق $f:(\mathbb{R}^2,d_\infty) \to \mathbb{R}$ المعرّف بـ $f(x,y) = ax+by$ مستمرّ بانتظام.

من أجل كل عنصرين $(x,y),(x,y)$ من $\mathbb{R}^2$، لدينا:

$$|f(x,y)-f(x',y')| = |a(x-x')+b(y-y')| \le |a||x-x'| + |b||y-y'|$$

$$\le (|a|+|b|)\, d_\infty\big((x,y),(x',y')\big)$$ 1

وهو ما يبيّن أنّ f تطبيق ليبشيتزي (نسبته $|a|+|b|$) ومن ثَمَّ فهو تطبيق مستمر بانتظام. 0,25

3. تعيين الطبولوجيا المولّدة على $X=\{1,2,3,4,5\}$ بواسطة الجماعة $\mathcal{P}=\{\{1\},\{1,5\},\{4,5\}\}$.

0,75 جماعة التقاطعات المنتهية لعناصر $\mathcal{P}$ هي $\mathcal{B}=\{X,\{1\},\{1,5\},\{4,5\},\{5\},\emptyset\}$.

بتشكيل كل اتحادات عناصر $\mathcal{B}$، نحصل على الطبولوجيا المولدة بواسطة $\mathcal{P}$:

$$\tau = \big\{\emptyset, X, \{1\},\{1,5\},\{4,5\},\{5\},\{1,4,5\}\big\}.$$ 0,75

التمرين 2 6

ليكن (X,d) فضاء متريا.

1. إثبات أن $d' = \frac{d}{3+2d}$ مسافة أخرى على X.

بملاحظة أنّ $d' = \varphi \circ d$ حيث $\varphi(s) = \frac{s}{3+2s}$ ، يكفي لإثبات أنّ d' مسافة على X. بيان أنّ الدالة $\varphi:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ موجبة، لا تنعدم إلا عند 0، متزايدة على $\mathbb{R}_+$ وتحقق المتراجحة التالية: 0,5

$$\forall s,t \in \mathbb{R}_+ : \quad \varphi(s+t) \le \varphi(s)+\varphi(t).$$

- من الواضح أنّ φ موجبة على $\mathbb{R}_+$، وأنّ $\varphi(s)=0 \Leftrightarrow s=0$. 0,25

- φ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+$، ولدينا $\forall s \in \mathbb{R}_+ : \quad \varphi'(s) = \frac{3}{(3+2s)^2} > 0$. ومنه φ متزايدة على $\mathbb{R}_+$. 0,25

- من أجل s,t من $\mathbb{R}_+$، لدينا: 0,5

$$\varphi(s+t) = \frac{s+t}{3+2(s+t)} = \frac{s}{3+2(s+t)} + \frac{t}{3+2(s+t)} \le \frac{s}{3+2s} + \frac{t}{3+2t} = \varphi(s)+\varphi(t).$$

خلاصة: d' مسافة أخرى على X.

0,25 **2.** إذا كان $d = 0$ فإنّ $d' = 0 < \frac{1}{2}$. وإذا كان $d > 0$ فإنّ $d' = \frac{d}{3+2d} < \frac{d}{2d} = \frac{1}{2}$.

0,5 وعليه، من أجل أيّ عنصر a من X، لدينا: $B_{d'}(a,1) = \{x \in X \,;\, d'(a,x) < 1\} = X$.

3. بيان أنّ d أدقّ من d'.

0,5 من الواضح أنّ : $d' < d$ وهو ما يستلزم أنّ $\forall a \in X, \forall r > 0 :\ B_d(a,r) \subset B_{d'}(a,r)$. بالفعل:

$$\forall x \in X : x \in B_d(a,r) \Rightarrow d(a,x) < r \Rightarrow d'(a,x) < r \Rightarrow x \in B_{d'}(a,r).$$

0,5 إذن كل كرة مفتوحة بالنسبة للمسافة d' تحوي كرة مفتوحة بالنسبة للمسافة d وبذات المركز، ما يعني أنّ d أدقّ من d'.

4. بيان أنّه إذا كانت $(x_n)_n$ متتالية كوشية في (X,d) فهي تبقى كذلك في (X,d').

0,5 لنفرض أنّ $(x_n)_n$ متتالية كوشية في (X,d)، أي

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m,n \geq N :\ \ d(x_m, x_n) \leq \varepsilon.$$

ومنه، بالنظر إلى أنّ $d' < d$، يأتي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m,n \geq N :\ \ d'(x_m, x_n) \leq \varepsilon$$

0,25 ما يعني أنّ المتتالية $(x_n)_n$ كوشية في (X,d') كذلك.

5. التعبير عن d بدلالة d'. لدينا:

0,5

$$d' = \frac{d}{3+2d} \Leftrightarrow d = 3d' + 2dd' \Leftrightarrow d(1-2d') = 3d' \Leftrightarrow d = \frac{3d'}{1-2d'}$$

إذن $d = \psi \circ d'$ حيث $\psi : \left[0, \frac{1}{2}\right[\to \mathbb{R}$ دالة معرّفة بـ $\psi(s) = \frac{3s}{1-2s}$ وهي مستمرة عند 0 بوصفها دالة ناطقة معرّفة عند 0. 0,25

0,5 **6.** لنفرض أنّ الفضاء (X,d') تامّ، ولتكن $(x_n)_n$ متتالية كوشية في (X,d). استنادا إلى السؤال 5، $(x_n)_n$ متتالية كوشية في (X,d') ومن ثَمّ فهي متقاربة بالنسبة للمسافة d' نحو عنصر ℓ من X، أي $\lim\limits_{n\to\infty} d'(x_n, \ell) = 0$. وعليه

0,5 بالنظر إلى استمرار ψ عند 0، يأتي:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, \ell) = \lim_{n\to\infty} \psi\big(d'(x_n,\ell)\big) = \psi\left(\lim_{n\to\infty} d'(x_n,\ell)\right) = \psi(0) = 0$$

0,25 ما يبيّن أنّ $(x_n)_n$ متقاربة في (X,d) نحو ℓ.

تمرين 3 10

من أجل كل عدد حقيقي a نضع $I_a = \left]-\infty, a\right]$، ونرمز بـ τ للجماعة المكوّنة من المجموعة الخالية $\emptyset$ وكل اتحادات المجالات I_a.

1. بيان أنّ $\mathbb{R} = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} I_a$ و $\bigcup_{a\in\mathbb{R}_-^*} I_a =]-\infty, 0[$.

- لدينا من جهة : $\forall a \in \mathbb{R} : I_a \subset \mathbb{R}$ ومنه $\bigcup_{a\in\mathbb{R}} I_a \subset \mathbb{R}$.

ومن جهة أخرى، لدينا: $\forall a \in \mathbb{R} : a \in I_a$ ومنه $\mathbb{R} \subset \bigcup_{a\in\mathbb{R}} I_a$. 0,25

إذاً $\mathbb{R} = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} I_a$.

- لدينا من جهة : $\forall a \in \mathbb{R}_-^* : I_a \subset]-\infty, 0[$ ومنه $\bigcup_{a\in\mathbb{R}_-^*} I_a =]-\infty, 0[$.

ومن جهة أخرى، لدينا: $\forall a \in]-\infty, 0[: a \in I_a$ ومنه $]-\infty, 0[\subset \bigcup_{a\in\mathbb{R}_-^*} I_a$. 0,25

إذاً $\bigcup_{a\in\mathbb{R}_-^*} I_a =]-\infty, 0[$.

2. إثبات أنّ الجماعة τ طبولوجيا على $\mathbb{R}$.

0,25 - $\emptyset$ عنصر من τ فرضا و $\mathbb{R}$ عنصر من τ بناء على السؤال السابق.

0,5 - τ مستقرة إزاء الاتحاد الكيفي بمقتضى الإنشاء.

- τ مستقرة إزاء التقاطع المنتهي. بالفعل ليكن O_1 و O_2 عنصرين غير خاليين من $\mathbb{R}$، يوجد عندئذ جزءان غير خاليين K_1 و K_2 من $\mathbb{R}$ بحيث: $O_1 = \bigcup_{a\in K_1} I_a$ و $O_2 = \bigcup_{b\in K_2} I_b$.

بما أنّ $I_a \cap I_b = I_{\min(a,b)}$، يأتي: 1

$$O_1 \cap O_2 = \bigcup_{a\in K_1} I_a \cap \bigcup_{b\in K_2} I_b = \bigcup_{(a,b)\in K_1\times K_2} I_a \cap I_b = \bigcup_{(a,b)\in K_1\times K_2} I_{\min(a,b)} \in \tau.$$

<u>خلاصة</u>: τ طبولوجيا على $\mathbb{R}$.

3. توضيح أشكال المفتوحات وأشكال المغلقات في الفضاء $(\mathbb{R}, \tau)$.

ليكن O مفتوحا غير خال في الفضاء $(\mathbb{R}, \tau)$، يوجد عندئذ جزء غير خال K من $\mathbb{R}$ بحيث $\bigcup_{a\in K} I_a = O$. ولكن

$$\bigcup_{a\in K} I_a = \begin{cases} \mathbb{R} & if \sup K = +\infty, \\ ]-\infty, \sup K] & if \sup K \in K, \\ ]-\infty, \sup K[& if \sup K < +\infty \ and \ \sup K \notin K, \end{cases}$$

0,75

إذاً مفتوحات الفضاء $(\mathbb{R}, \tau)$ هي: $\emptyset$ و $\mathbb{R}$ وكل المجالات من الشكل $]-\infty, a]$ و $]-\infty, a[$ حيث a عدد حقيقي.

بالمرور إلى المتمّم، نستنتج أنّ مغلقات الفضاء $(\mathbb{R}, \tau)$ هي: $\emptyset$ و $\mathbb{R}$ وكل المجالات من الشكل $]a, +\infty[$ و $[a, +\infty[$ حيث a عدد حقيقي. 0,25

4. المقارنة بين الطبولوجيا τ وطبولوجيا المتممات المنتهية σ على $\mathbb{R}$.

0,25 لدين من جهة: $]-\infty, 1] \in \tau$ ولكن $]-\infty, 1] \notin \sigma$ لأنّ متمّمته $]1, +\infty[$ غير منتهية.

0,25 من جهة أخرى، $\mathbb{R}^* \in \sigma$ ولكن $\mathbb{R}^* \notin \tau$.

0,25 إذاً، τ و σ طبولوجيتان غير قابلتين للمقارنة بينهما.

5. هل $(\mathbb{R},\tau)$ فضاء منفصل؟

0,75 نلاحظ أنّ كل المفتوحات غير الخالية في الفضاء $(\mathbb{R},\tau)$ تتقاطع مثنى مثنى، وهو الشأن الذي يحرم أيّ نقطتين متمايزتين من $\mathbb{R}$ من امتلاك جوارين منفصلين. إذاً، $(\mathbb{R},\tau)$ فضاء غير منفصل.

6. تعيين جماعة الجوارات و أساسا لجوارات نقطة كيفية a من $\mathbb{R}$.

0,5 لتكن a نقطة كيفية من $\mathbb{R}$. من الواضح أنّ I_a هو أصغر مفتوح يحوي النقطة a، ومن ثَمَّ فإنّ جماعة جوارات a مؤلّفة من كل أجزاء $\mathbb{R}$ التي تحوي I_a، أي:

$$\mathcal{V}(a) = \{V \subset \mathbb{R}\,;\ I_a \subset V\}$$

0,5 وهو ما يبيّن أنّ $\mathcal{B}(a) = \{I_a\}$ أساس لجوارات a.

7. تعيين الداخلية والملاصقة والمجموعة المشتقة لمجموعات معطاة.

0,25 - المجموعة $A = \{-5,1\}$ لا تحوي أي مفتوح غير خال، إذاً داخلية A هي: $A^\circ = \emptyset$.

0,25 أصغر مغلق يحوي A هو $[-5,+\infty[$ ، إذاً ملاصقة A هي: $\bar{A} = [-5,+\infty[$.

0,25 -5 نقطة معزولة في A لأنّ $I_{-5} =]-\infty,-5]$ جوار لها وهو لا يقطع A إلا في النقطة -5 ذاتها.

0,25 بقية النقاط الملاصقة لِ A كلها تراكمية، لأنّ:

$$I_a \cap A = \begin{cases} \{-5\} \neq \{a\} & if\ -5 < a < 1, \\ \{-5,1\} \neq \{a\} & if\ a \geq 1, \end{cases}$$

إذاً، المجموعة المشتقة لِ A هي: $A' =]-5,+\infty[$.

0,25 - المجموعة $B =]-5,1[$ لا تحوي أي مفتوح غير خال، إذاً داخلية B هي: $B^\circ = \emptyset$.

0,25 أصغر مغلق يحوي B هو $]-5,+\infty[$ ، إذاً ملاصقة B هي: $\bar{B} =]-5,+\infty[$.

0,25 جميع النقاط الملاصقة لِ B تراكمية لأنّ

$$I_a \cap B = \begin{cases}]-5,a] \neq \{a\} & if\ -5 < a < 1, \\ ]-5,1[\neq \{a\} & if\ a \geq 1, \end{cases}$$

إذاً، المجموعة المشتقة لِ B هي: $B' =]-5,+\infty[$.

0,25 - المجموعة $\mathbb{N}$ لا تحوي أي مفتوح غير خال، إذاً داخلية $\mathbb{N}$ هي: $\mathbb{N}^\circ = \emptyset$.

0,25 أصغر مغلق يحوي $\mathbb{N}$ هو $[0,+\infty[$ ، إذاً ملاصقة $\mathbb{N}$ هي: $\overline{\mathbb{N}} = [0,+\infty[$.

0 نقطة معزولة في $\mathbb{N}$ لأنّ $I_0 =]-\infty, 0[$ جوار لها وهو لا يقطع $\mathbb{N}$ إلا في النقطة 0 ذاتها. 0,25

بقية النقاط الملاصقة لِ $\mathbb{N}$ كلها تراكمية، لأنّ: $\forall n \in \mathbb{N}^* : \ I_n \cap \mathbb{N} = \{0, \dots, n\} \neq \{n\}$. 0,25

إذاً، المجموعة المشتقة لِ $\mathbb{N}$ هي: $\mathbb{N}' =]0, +\infty[$.

8. تعيين ملاصقة المجموعة $\mathbb{Z}$.

أصغر مغلق يحوي $\mathbb{Z}$ هو $\mathbb{R}$، إذاً ملاصقة $\mathbb{Z}$ هي: $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$. 0,25

بما أنّ $\mathbb{Z}$ مجموعة قابلة للعدّ وكثيفة في $(\mathbb{R}, \tau)$، فإنّ هذا الأخير فضاء قابل للفصل. 0,5

9. إثبات أنّ $\frac{1}{2}$ نهاية في $(\mathbb{R}, \tau)$ للمتتالية ذات الحد العام $x_n = \frac{1}{n}$ لمّا n يؤول إلى ∞.

يكون العدد الحقيقي a نهاية للمتتالية $(x_n)_n$ لمّا n يؤول إلى ∞ إذا وفقط إذا تحقّق ما يلي:

$$\forall V \in \mathcal{B}(a), \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N : \ x_n \in V$$

حيث $\mathcal{B}(a)$ أساس لجوارات النقطة a. 0,25

وحيث أنّ $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right) = \{I_{1/2}\}$ أساس لجوارات العدد $\frac{1}{2}$ و $I_{1/2} = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ يحوي جميع عناصر المتتالية ذات الحد العام $x_n = \frac{1}{n}$ ابتداء من الرتبة $N = 2$، فإنّ $\frac{1}{2}$ نهاية في $(\mathbb{R}, \tau)$ للمتتالية $(x_n)_n$ لمّا n يؤول إلى ∞. 0,5