(2) On considère un champ de vecteurs de classe C^1 *ne s'annulant pas sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^2$*, dont toute courbe intégrale est fermée dans* Ω*. Soit* $\sim$ *la relation d'équivalence sur* Ω *définie par* $x \sim y$ *si et seulement s'il existe une courbe intégrale de* X *passant par* x *et* y*. Montrer que l'espace topologique quotient* $\Omega/\!\sim$ *est localement homéomorphe à* $\mathbb{R}$*. Plus généralement (voir le paragraphe 4.8 pour les définitions), si* $\mathcal{F}$ *est un feuilletage* C^1 *de codimension* k *à feuilles fermées dans une variété différentielle* Ω *de classe* C^1*, alors l'espace des feuilles de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *(i.e. l'espace topologique quotient de* Ω *par la relation d'équivalence « être dans la même feuille ») est localement homéomorphe à* $\mathbb{R}^k$*. Dans les deux exemples de la figure ci-dessus, montrer que* $\Omega/\sim$ *est une variété topologique non séparée de dimension* 1 *(mais séparable).*

Exercice E.4 *(Voir l'appendice A.1 pour des rappels sur les ordres.) Soit* β *un ordinal, et* β_- *l'ensemble ordonné des ordinaux strictement inférieurs à* β*. On considère l'ensemble* $X = (\beta_- \times [\,0,1[) - \{(0,0)\}$ *muni de la topologie de l'ordre induite par l'ordre lexicographique. Montrer que si* β *est l'ordinal de l'ordre usuel sur* $\mathbb{N}$*, alors* X *est homéomorphe à* $]0,+\infty\,[$*. Montrer que si* β *est le plus petit ordinal non dénombrable, alors* X *est une variété topologique non paracompacte (mais séparée), appelée la* longue (demi-)droite.

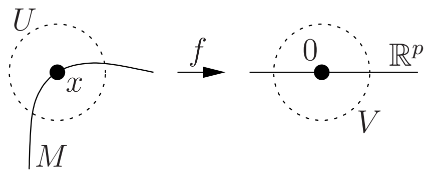
2.2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Nous renvoyons par exemple à [Ave, CarH, Die1] pour des rappels de calcul différentiel, ainsi qu'à l'appendice A.3. Sauf mention explicite du contraire, on identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ de manière usuelle par $(x_1, \dots, x_n) \mapsto ((x_1, \dots, x_p), (x_{p+1}, \dots, x_n))$ pour $0 \le p \le n$ (avec convention immédiate pour $p = 0$ ou $p = n$).

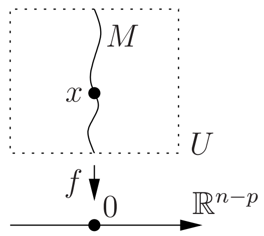
Le premier exemple, et celui qu'il faut garder en tête, de sous-variété d'un espace vectoriel de dimension finie est un sous-espace vectoriel, par exemple $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ contenu dans $\mathbb{R}^n$. Nous allons définir une sous-variété générale comme obtenue par difféomorphismes locaux ambiants à partir un tel exemple, et donner des caractérisations équivalentes. Rappelons que le *graphe* d'une application $f : A \to B$ est la partie de $A \times B$ formée des couples $(x, f(x))$ pour x dans A.

Théorème 2.5 *Soit* $n \ge p$ *dans* $\mathbb{N}$ *et* k *dans* $(\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$*. Les propriétés suivantes d'une partie* M *de* $\mathbb{R}^n$ *sont équivalentes :*

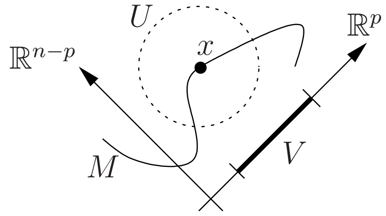
- **(Définition locale par redressement)** *Pour tout* x *dans* M*, il existe un voisinage* U *de* x *dans* $\mathbb{R}^n$*, un voisinage* V *de* 0 *dans* $\mathbb{R}^n$ *et un* C^k*-difféomorphisme* $f : U \to V$ *tels que* $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$*.*



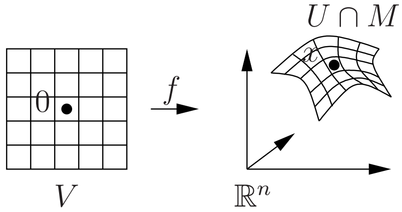
- **(Définition locale par fonction implicite)** *Pour tout* x *dans* M*, il existe un voisinage* U *de* x *dans* $\mathbb{R}^n$*, et une application* $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ *de classe* C^k *qui est une submersion en* x*, tels que* $U \cap M = f^{-1}(0)$*.*



• **(Définition locale par graphe)**
Pour tout x dans M, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$, une identification par un automorphisme linéaire $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ et une application $f : V \to \mathbb{R}^{n-p}$ de classe C^k tels que $U \cap M = \mathrm{graphe}(f)$.



• **(Définition locale par paramétrage)**
Pour tout x dans M, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et une application $f : V \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k tels que $f(0) = x$, f soit une immersion en 0, et f soit un homéomorphisme de V sur $U \cap M$.



Preuve. Numérotons de (1) à (4) ces assertions dans cet ordre.

Montrons que (1) implique (2). Si x, U, f sont comme dans (1), alors on peut supposer que $f(x) = 0$, et en notant $f_1, \dots, f_n$ les composantes de f, et $g : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ l'application de composantes $f_{p+1}, \dots, f_n$, alors g est une submersion de classe C^k telle que $g^{-1}(0) = U \cap M$.

Montrons que (1) implique (4). Si x, U, V, f sont comme dans (1), alors on peut supposer que $f(x) = 0$, et la restriction de f^{-1} à l'ouvert $W = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ de $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ est une application de classe C^k envoyant 0 sur x, qui est une immersion en 0, et qui est un homéomorphisme de W sur $U \cap M$.

Montrons que (4) implique (1) (cette implication est parfois utilisée sous le nom de théorème des immersions dans les exercices). Si x, U, V, f sont comme dans (4), alors par le théorème A.5 de forme normale locale des immersions, quitte à restreindre U et V, il existe un C^k-difféomorphisme ψ de U sur un voisinage ouvert W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que, sur V, on ait l'égalité $\psi \circ f\ (x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_p, 0 \dots, 0)$, et donc en particulier $\psi(U \cap M) = \psi \circ f(V) = W \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$.

Le fait que (2) implique (1) (cette implication est parfois utilisée sous le nom de théorème des submersions dans les exercices) se montre de même, en utilisant le théorème A.6 de forme normale locale des submersions.

Le fait que (3) implique (4) est immédiat, car si x, U, V, f sont comme dans (3), alors on peut supposer que $x = 0$ et que $f(0) = 0$, et l'application $F : y \mapsto (y, f(y))$ est alors un homéomorphisme de V sur $U \cap M$, qui est une immersion C^k en 0 avec $F(0) = 0$.

Montrons pour terminer que (2) implique (3). Soient x, U, f comme dans (2), et notons $f_1, \dots, f_{n-p}$ les composantes de f. On peut supposer que $x = 0$. Quitte à permuter les coordonnées, comme f est une submersion en x, on peut supposer que la matrice $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{j+p}}(x)\right)_{1 \leq i,j \leq n-p}$ (extraite de la matrice jacobienne de f en x) soit inversible. Notons pr_1 la projection sur le premier facteur de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$. La différentielle en x de l'application $F : y \mapsto (pr_1(y), f(y))$ est inversible. Donc par le théorème A.2 d'inversion locale, F est un difféomorphisme local en 0. L'inverse de F est de la forme $y \mapsto (pr_1(y), G(y))$ avec G une application d'un voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{n-p}$. Donc, quitte à restreindre U, la partie $U \cap M = f^{-1}(0) = F^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$ est le graphe de la fonction G restreinte à $W \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$. $\square$

On dit qu'une partie M de $\mathbb{R}^n$ est une *sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et de classe* C^k (et tout simplement *sous-variété* par abus, par exemple quand k est sous-entendu) si

3 Fibrés vectoriels

3.1 Sous-espaces tangents d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$

La notion de vecteur tangent (et, si ce vecteur tangent est non nul, de droite tangente) en un point d'une courbe de classe C^1 dans $\mathbb{R}^n$ est bien connue. Elle permet de définir, de manière élémentaire, la notion de vecteur tangent, et partant de sous-espace tangent, en un point d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

Soient $p \leq n$ dans $\mathbb{N}$, M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 et de dimension p, et x un point de M.

Un vecteur v de $\mathbb{R}^n$ est dit *tangent à* M *en* x s'il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et une courbe $c : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, à valeurs dans M, telle que

$$c(0) = x \quad \text{et} \quad \dot{c}(0) = v \ .$$

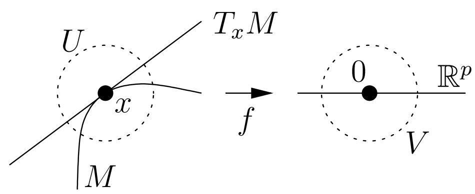
On note T_xM l'ensemble des vecteurs tangents à M en x.

Le résultat suivant donne le calcul de T_xM, en fonction des différentes caractérisations locales des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ (voir théorème 2.5).

Proposition 3.1

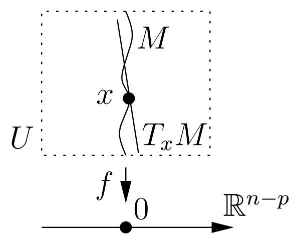
• **(Définition par redressement)**
Si U est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$, si V est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to V$ un C^1-difféomorphisme tels que $f(x) = 0$ et $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$, alors

$$T_xM = {df_x}^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\}) \ .$$



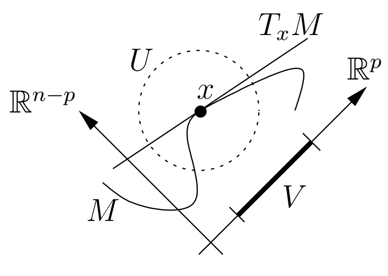
• **(Définition par fonction implicite)**
Si U est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$, et si $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ est une application de classe C^1 qui est une submersion en x avec $f(x) = 0$, tels que $U \cap M = f^{-1}(0)$, alors

$$T_xM = \mathrm{Ker}\ df_x \ .$$



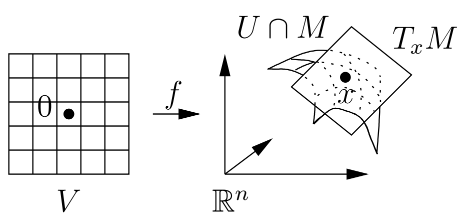
• **(Définition par graphe)**
Si U est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, si V est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et $f : V \to \mathbb{R}^{n-p}$ une application de classe C^1, tels que $U \cap M = \mathrm{graphe}(f)$ et $x = (0, f(0))$, alors

$$T_xM = \mathrm{Im}\ \{v \mapsto (v, df_0(v))\} \ .$$



• **(Définition par paramétrage)**
Si U est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$, si V est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et $f : V \to \mathbb{R}^n$, avec $f(0) = x$, est un paramétrage local C^1 de $U \cap M$ en x, alors

$$T_xM = \mathrm{Im}\ df_0 \ .$$



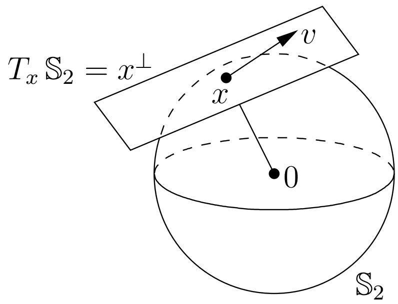
Preuve. (1) Puisque f est un difféomorphisme C^1 tel que $f(x) = 0$, une courbe c est tracée sur $U \cap M$ avec $c(0) = x$ et $\dot{c}(0) = v$ si et seulement si la courbe $f \circ c$ est tracée sur $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ avec $f \circ c(0) = 0$ et $(f \circ c)'(0) = df_x(v)$. Puisque l'ensemble des vecteurs tangents en 0 à $V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ est $\mathbb{R}^p \times \{0\}$, le résultat en découle. En particulier, T_xM est un sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{R}^n$.

(2) Si c est une courbe tracée sur M telle que $c(0) = x$, alors $f \circ c(t) = 0$ pour tout t assez petit, donc en dérivant $df_x(\dot{c}(0)) = 0$ et le sous-espace vectoriel T_xM est contenu dans $\mathrm{Ker}\, df_x$. Comme df_x est surjective, les dimensions de T_xM et de $\mathrm{Ker}\, df_x$ sont toutes les deux égales à p, et le résultat en découle.

(4) Pour tout v dans $\mathbb{R}^p$, soit c une courbe dans V telle que $c(0) = 0$ et $\dot{c}(0) = v$. Alors $f \circ c$ est une courbe C^1 tracée sur $f(V) = U \cap M$ telle que $f \circ c(0) = x$ et $(f \circ c)'(0) = df_x(v)$, donc le sous-espace vectoriel T_xM contient $\mathrm{Im}\, df_x$. Par injectivité de df_x, les dimensions de T_xM et de $\mathrm{Im}\, df_x$ sont toutes les deux égales à p, et le résultat en découle. L'assertion (3) découle immédiatement de (4). $\square$

Comme montré dans la preuve, l'ensemble T_xM est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension p, appelé le *sous-espace vectoriel tangent* à M en x. On appelle $x + T_xM$ le *sous-espace affine tangent* à M en x. Lorsque l'on remplace $\mathbb{R}^n$ par $\mathbb{C}^n$ et la régularité C^1 par la régularité analytique complexe, alors T_xM est un sous-espace vectoriel complexe de $\mathbb{C}^n$.

Exemples. (1) La sphère $\mathbb{S}_n$ est définie comme la préimage de 1 par la submersion $x \mapsto ||x||^2$ de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ (où $||\ ||$ est la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$). Donc le sous-espace tangent à $\mathbb{S}_n$ en x est le noyau de l'application linéaire $v \mapsto \langle v, x\rangle$, i.e. $T_x\mathbb{S}_n$ est l'orthogonal de x (pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$).



(2) Plus généralement, si $f : U \to \mathbb{R}^q$ est une submersion C^1, avec U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, pour tout $y \in f(U)$ et $x \in f^{-1}(y)$, avec $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)\right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ la matrice jacobienne de f en x, il découle du deuxième point de la proposition 3.1 que le sous-espace vectoriel $T_x\big(f^{-1}(y)\big)$ tangent en x à la sous-variété $f^{-1}(y)$ admet le système d'équations suivant :

$$\forall\, j,\ 1 \leq j \leq q, \quad \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) X_i = 0\ .$$

(3) Par l'assertion (3) ci-dessus, si M est localement défini comme le graphe d'une application $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{n-p}$ dans une décomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ de coordonnées (x, y), alors l'équation du sous-espace affine tangent en $(x_0, y_0 = f(x_0))$ est

$$y - y_0 = df_{x_0}(x - x_0)\ .$$