كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات والإعلام الآلي
السنة الثالثة رياضيات **S5**

جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي

الامتحان

في مادة المعادلات التفاضلية

مقياس: المعادلات التفاضلية
2022 – 2023
يوم: الثلاثاء **24** جمادى الثانية **1444** هـ
الموافق لـ **17** جانفي **2023**

التمرين01:

I) لتكن مسألة كوشي (1) التالية: $\begin{cases} \acute{y} = f(t,y) \\ y(t_\circ) = y_\circ \end{cases}$ حيث: $f: I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ و I مجال مفتوح من $\mathbb{R}$ و Ω مفتوح من $\mathbb{R}$، $(t_\circ, y_\circ) \in I \times \Omega$.

ليكن J مجال من $\mathbb{R}$ و الدالة $y: J \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. عرف (y,J) حل مسألة كوشي (1).
2. عرف الحل الأعظمي والكلي لمسألة كوشي (1)، والعلاقة بينهما.
3. لنفرض أن (y_1, J_1) و (y_2, J_2) حلين لمسألة كوشي (1)، عرف وحدانية الحل لهما.
4. لنفرض الآن أن y_1 و y_2 حلين أعظمين لمسألة كوشي (1)، عرف وحدانية الحل الأعظمي.

II) مسألة كوشي التالية: $\begin{cases} \acute{Y} = AY + B \\ Y(t_\circ) = Y_\circ \end{cases}$ أوجد عبارة الحل مع البرهان.

التمرين02:

لتكن مسألة كوشي (2) التالية: $\begin{cases} \acute{y} = y^2 + t^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

1. ليكن (y,J) حل مسألة كوشي، برهن أنه متزايدة تماما على J .
2. برهن انه $(\check{y}, \check{J})$ حل كذلك لمسألة كوشي المعرف كما يلي $\check{J} = -J$

$$\check{y}(t) = -y(-t) \qquad ; \forall t \in \check{J}$$

3. برهن أن مسألة كوشي (2) تقبل حل أعظمي، ثم برهن أنها فردية.

التمرين03:

حل مسألة كوشي التالية: $\begin{cases} \acute{Y} = AY \\ Y(t_\circ) = Y_\circ \end{cases}$ حيث: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$، و $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$، و $Y_\circ = \begin{pmatrix} x_\circ \\ y_\circ \\ z_\circ \end{pmatrix}$.

بالتوفيق

تمرين 02 [07 نقاط]

1) (y, J) حل لمسألة كوشي (1) $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 01 \quad (t, y(t)) \in I \times \Omega, \ \forall t \in J & (1) \\ 01 \quad y'(t) = f(t, y(t)), \ \forall t \in J & (2) \\ 01 \quad y(t_0) = y_0 & (3) \end{cases}$$

2) الحل الأعظمي لمسألة كوشي (1) هو كل حل لمسألة كوشي (1) المعرف على أكبر مجال ممكن J_{max}. 01

الحل الكلي لمسألة كوشي (1) هو كل حل لمسألة كوشي (1) معرف على I 01

01 كل حل كلي هو حل أعظمي والعكس ليس صحيح دوما

3/ وحدانية الحل بالنسبة للحلين (y_1, J_1) و (y_2, J_2) هي

01 $y_1(t) = y_2(t), \ \forall t \in J_1 \cap J_2 \neq \phi$ 01

4/ وحدانية الحل بالنسبة للحلين الأعظميين y_1 و y_2 هي

01 $y_1(t) = y_2(t), \ \forall t \in J_{max}$ (J_{max} وحيد) 01

II) حل مسألة كوشي التالية

$$\begin{cases} Y' = AY + B \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

لنضع $R(t, t_0)$ النواة الحالة المرفقة بالجملة 0,25

Y_H حل للجملة من دون طرف ثاني

$Y_H = R(t, t_0) Y_0$ 0,25

نستعمل طريقة تغيير الثابت ومنه الحل هو

$Y = R(t, t_0) X(t)$ 0,25

$Y' = A R(t, t_0) X(t) + R(t, t_0) X'(t)$ 0,25

$X'(t) = R(t_0, t) B(t)$ 0,25

$X(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t_0, s) B(s) \, ds \quad [X(t_0) = Y_0]$ 0,25

$Y = R(t, t_0) Y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s) B(s) \, ds$ 0,5

حل التمرين 02 ـ [5 نقاط]

مسألة كوشي (2)

$$\begin{cases} y' = y^2 + t^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1/ كل (y, J) حل لمسألة (2) y متزايد تماما على J.

$$y'(t) = y^2(t) + t^2 \geq 0 \quad , \forall t \in J . \quad 0{,}1$$

$$y'(t) = y^2(t) + t^2 > 0 \quad \forall t \neq 0 \ ? \quad 0{,}1$$

$$t \neq 0 \Rightarrow t^2 > 0 \Rightarrow y'(t) = y^2(t) + t^2 > 0 .$$

إذن y متزايدة تماما على J.

2) البرهان $(\tilde{y}, \tilde{J})$ حل لمسألة (2):

حيث $\tilde{J} = -J$ و $\tilde{y}(t) = -y(-t), \forall t \in \tilde{J}$.

ش1/ $0{,}1$: $\forall t \in \tilde{J}, (t, \tilde{y}(t)) \in I \times \Omega = \mathbb{R}^2$.

ش2/ $0{,}1$ $\tilde{y}'(t) = f(t, \tilde{y}(t)), \forall t \in \tilde{J}$ ؟

$$\forall t \in \tilde{J} = -J \Rightarrow -t \in J .$$

$$\tilde{y}'(t) = \frac{d}{dt}\left[-y(-t)\right] = -\frac{d(-t)}{dt}\, y'(-t) = y'(-t) .$$

وبما أن (y, J) حل لمسألة (2) إذن

$$y'(t) = y^2(t) + t^2 \Rightarrow y'(-t) = y^2(-t) + (-t)^2 .$$

$$\tilde{y}'(t) = y'(-t) = \left[-y(-t)\right]^2 + (-t)^2$$

$$\tilde{y}'(t) = \tilde{y}^2(t) + t^2 = f(t, \tilde{y}(t)) . \quad 0{,}1$$

ش3/ $\tilde{y}(0) = 0$ ؟ $0{,}1$

$$0 \in J \Rightarrow 0 \in \tilde{J} \ , \ \tilde{y}(0) = -y(0) = 0 .$$

$\boxed{2/5}$

ومنه $(\tilde{y}, \tilde{J})$ حل لمسألة كوشي (2).

3/ البرهان ان المسألة (2) تقبل حل أعظمي وأنه فردي؟

لنستعمل نظرية كوشي - ليبشيتز.

لنضع $f(t,y)=t^2+y^2$ و $I\times\Omega=\mathbb{R}^2$ ،

1/ f مستمرة على $I\times\Omega$ ؟ (0,5)

f كثير حدود. إذن f مستمر على $I\times\Omega=\mathbb{R}^2$ ،

2/ f لبشيتزية محليا بالنسبة لـ y وبانتظام بالنسبة لـ t على $\mathbb{R}^2$

f كثير حدود إذن $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ (0,5). إذن f لبشيتزية محليا بالنسبة لـ y وبانتظام بالنسبة لـ t على $\mathbb{R}^2$.

ومنه حسب نظرية كوشي - ليبشيتز مسألة كوشي (2) تقبل حل أعظمي y_{max} وحيد معرف على J_{max} .

لنبرهن أن (y_{max},J_{max}) فردية؟

$$\forall t\in J_{max} \Rightarrow -t\in J_{max} \ ? \quad (0,5)$$

$$\forall t\in J_{max},\ y_{max}(t)=-y_{max}(-t) \ ? \quad (0,5)$$

من أجل $t\in J_{max}$ إذن يوجد (y,J) حل لمسألة كوشي (2) حسب السؤال (1) لدينا $(\tilde{y},\tilde{J}=-J)$ حل لمسألة كوشي (2) حيث: $-t\in\tilde{J}$ ، ومنه $-t\in J_{max}$

$$y_{max}(t)=y(t)=-\tilde{y}(-t)=-\tilde{y}(-t)$$

حسب وحدانية الحل (لأن $-t\in\tilde{J}\cap J_{max}$).

إذن y_{max} فردي.

$\boxed{3/5}$

حل التمرين 03

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$Y=R(t,t_0)\,Y_0$ 0,5

$R(t,t_0)=e^{(t-t_0)A}$ 0,5

$P_A(\lambda)=(2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1)=(2-\lambda)(\lambda-1)^2$ 0,5

$E_2=\left\langle\left\{e_1=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$ 0,5 $\quad\lambda_1=2$ 0,5

$E_1=\left\langle\left\{e_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$ 0,5 $\quad\lambda_2=1$ 0,5

$E_2^2=\left\langle\left\{u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$ 0,5

$Q=\begin{pmatrix}2&1&1\\4&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 0,5 $\Rightarrow Q^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-4\\1&-1&2\end{pmatrix}$ 0,5

$D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&D_1\end{pmatrix}$ 0,5 $\quad D_1=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$

$A=QDQ^{-1}\Rightarrow\alpha A=Q\,\alpha D\,Q^{-1}\Rightarrow e^{\alpha A}=Q\,e^{\alpha D}\,Q^{-1}$ 0,5

$e^{\alpha D}=\begin{pmatrix}e^{2\alpha}&0\\0&e^{\alpha D_1}\end{pmatrix}\quad D_1=I_2+N\quad N=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}.$

$N^2=0\Rightarrow N^k=0,\ \forall k\geq 2$

4/5

$$e^{\alpha D_2} = e^{\alpha I_2 + \alpha N} = e^{\alpha} e^{\alpha N} = e^{\alpha}(I_2 + \alpha N) = \begin{pmatrix} e^{\alpha} & -\alpha e^{\alpha} \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}$$

0,1

$$e^{\alpha A} = Q \begin{pmatrix} e^{2\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\alpha} & -\alpha e^{\alpha} \\ 0 & 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

$$\left| \begin{array}{l} a = e^{2\alpha} \\ b = e^{\alpha} \\ c = -\alpha e^{\alpha} \end{array} \right.$$

$$e^{\alpha A} = \begin{pmatrix} b+c & -c & 2a-2b+2c \\ c & b-c & 4a-4b+2c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$R(t,t_0) = \begin{pmatrix} (1-\alpha)e^{\alpha} & \alpha e^{\alpha} & 2e^{2\alpha} - 2(1+\alpha)e^{\alpha} \\ -\alpha e^{\alpha} & (1+\alpha)e^{\alpha} & 4e^{2\alpha} - 2(2+\alpha)e^{\alpha} \\ 0 & 0 & e^{2\alpha} \end{pmatrix}$$

$\alpha = (t - t_0)$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t+t_0)e^{(t-t_0)} & (t-t_0)e^{(t-t_0)} & 2e^{2(t-t_0)} - 2(1+t-t_0)e^{(t-t_0)} \\ (t_0-t)e^{(t-t_0)} & (1+t-t_0)e^{(t-t_0)} & 4e^{2(t-t_0)} - 2(2+t-t_0)e^{(t-t_0)} \\ 0 & 0 & e^{2(t-t_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t) = (1-t+t_0)e^{(t-t_0)} x_0 + (t-t_0)e^{(t-t_0)} y_0 + 2\left[e^{2(t-t_0)} - (1+t-t_0)e^{(t-t_0)}\right] z_0 \\ y(t) = (t_0-t)e^{(t-t_0)} x_0 + (1+t-t_0)e^{(t-t_0)} y_0 + 2\left[2e^{2(t-t_0)} - (2+t-t_0)e^{(t-t_0)}\right] z_0 \end{cases}$$

0,1

$\boxed{5/5}$