وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم الرياضيات والإعلام آلي
السنة الثالثة رياضيات
2026/2025

السلسلة رقم 01 في مادة معادلات التفاضلية

التمرين 01:

برهن أن$(y, J = \mathbb{R})$ المعرفة كما يلي: $y(t) = \begin{cases} -(t+2)^2; t \in]-\infty, -2[\\ 0 \quad ; t \in [-2, +2] \\ (t-2)^2 \quad ; t \in]+2, +\infty[\end{cases}$، هو حل كلي للمعادلة التفاضلية $\acute{y} = 2\sqrt{|y|}$.

التمرين 02:

لتكن الدالة $y(t) = \frac{1}{c-t}$، $c \in \mathbb{R}$ ثابت حقيقي:

1. برهن أن$(y, J_1 =]-\infty, c[)$ حل أعظمي للمعادلة التفاضلية $\acute{y} = y^2$.
2. برهن أن$(y, J_2 =]c, +\infty[)$ حل أعظمي للمعادلة التفاضلية $\acute{y} = y^2$.
3. هل تقبل هذه المعادلة التفاضلية $(\acute{y} = y^2)$ حل كلي، وما هو إن وجد.

التمرين 03:

لتكن I مجال من $\mathbb{R}$، وΩ مفتوح من $\mathbb{R}$، و الدالة $f: I \times \Omega \to \mathbb{R}$.

1. من أجل كل $k \in \mathbb{N}$، برهن أنه إذا كان $f \in C^k(I \times \Omega)$ إذن $y \in C^{k+1}(J)$.
   حيث: (y, J) حل للمعادلة التفاضلية $\acute{y} = f(, y)$.
2. برهن أن J_{max} (المجال الأعظمي) مفتوح من $\mathbb{R}$.

التمرين 04:

1. برهن أن الدالة$f_1(t, y) = t^2 + y^2$ لبشيزية محليا بالنسبة لـy بانتظام بالنسبة لـt على $\mathbb{R}^2$.
2. برهن أن الدالة$f_2(t, y) = 2\sqrt{|y|}$ ليست لبشيزية محليا بالنسبة لـy بانتظام بالنسبة لـt على $\mathbb{R}^2$.

التمرين 05:

برهن أن الدوال التالية لبشيزية محليا بالنسبة لـy بانتظام بالنسبة لـt على مجموعات من الشكل$I \times \Omega$ يطلب تعيينها.

$$f_1(t, y) = e^{ty};\ f_2(t, y) = ye^{t^2}; f_3(t, y) = t\sqrt{|y|};$$
$$f_4(t, y) = \sin(ty);\ f_5(t, y) = |y| \ln(1 + t^2); f_6(t, y) = t\sqrt{t^2 + y^2}.$$

التمرين 06:

لنعتبر المعادلة التفاضلية(1) التالية:

$$\acute{y}(t) = 3\, y \sin 2t - y^3$$

1) لتكن $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ أدرس وجود ووحدانية الحل الأعظميy للمعادلة(1) الذي يحقق $y(t_0) = y_0$،

2) أوجد الحل الأعظمي φ للمعادلة(1) الذي يحقق:

3) $\exists \tau \in \mathbb{R}; \varphi(\tau) = 0$

4) برهن أن الحل الأعظمي (ϕ, J) للمعادلة(1) الذي يحقق $\phi(0) = 1$ هو دالة موجبة تماما على J .

برهن أن: $\phi(t) \leq e^{3t}, \forall t \in J_+ = J \cap \mathbb{R}_+$

التمرين 07:

لنضع $f(t, y) = t\sqrt{t^2 + y^2}$ و $I \times \Omega = \mathbb{R}^2$.

1) أدرس وجود الحل الأعظمي الوحيد لمسألة كوشي (I) التالية: $\begin{cases} \acute{y}(t) = f(t, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$.

(لاحظ أن: $\frac{\partial f(t,y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{t^2+y^2}}$)

2) برهن أن الحل الأعظمي $(y, J =]\alpha, \beta[)$ لمسألة كوشي(I) دالة زوجية علىJ، مع إيجادJ .

3) أثبت أنy متزايدة تماما على$]0, \beta[$.

4) برهن أنf لبشيزية كليا بالنسبة لـ y على $\mathbb{R}^2$.

5) برهن أن (y, J) حل كلي وحيد لمسألة كوشي(I) ، مع إيجادJ.

التمرين 08:

ليكن$(y, J =]\alpha, \beta[)$ الحل أعظمي للمعادلة التفاضلية $\acute{y} = t^3 + y^3$، الذي يحقق: $y(0) = a > 0$.

1. أثبت أنy متزايدة تماما على$[0, \beta[$.
2. برهن أن$\beta \neq +\infty$.

التمرين 09:

1. علل وجود الحل الأعظمي الوحيدy للمعادلة التفاضلية $\acute{y} = \frac{1}{1+ty}$ ، الذي يحقق: $y(0) = 0$.
2. برهن أنy دالة فردية على مجال تعريفها.
3. برهن أنy دالةمتزايدة على مجال تعريفها.