كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات والإعلام الآلي
السنة الثالثة رياضيات S5

جامعة العربي بن مهيدي أم البواقي

المادة: المعادلات التفاضلية
2021 – 2022

السلسلة رقم02 حول الجمل التفاضلية الخطية

التمرين1: 1 لتكن مصفوفة $A_1 \in M_n(\mathbb{R})$، حيث $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$، أحسب كل من: A_1^2 ثم A_1^3، واستنتج A_1^k مهما يكن $k \in \mathbb{N}$، ثم أوجد e^{A_1}.

2 نفس السؤال بالنسبة للمصفوفات:

1. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. $A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. $A_6 = I_n$ مهما يكن: $n \in \mathbb{N}$.
6. $A_7 = \alpha I_n$ مهما يكن: $n \in \mathbb{N}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$.
7. $A_8 = 0 \in M_n(\mathbb{R})$.
8. $A_9 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

التمرين2: لتكن المصفوفتين: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

أحسب كل من: e^A، و $e^B e^B$، و $D = e^B \times e^A$، و $E = e^{A+B}$، ماذا تلاحظ مع التعليل؟

التمرين3: ليكن $A \in M_4(\mathbb{R})$ حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

1. أوجد كثير الحدود المميز والقيم الذاتية لـ A، ثم استنتج $(A - I_4)^4$.
2. أحسب كل من $(A - I_4)^2$ و $(A - I_4)^3$.
3. برهن المساواة $e^{tA} = e^t e^{(A-I_4)}$ وذلك مهما يكن $t \in \mathbb{R}$.
4. باستعمال ما سبق، استنتج عبارة لـ e^{tA}، ثم أحسب قيمتها.
5. ليكن $Y_\circ \in \mathbb{R}^4$ و $t_\circ \in \mathbb{R}$، أوجد حل مسألة كوشي التالية $\begin{cases} \acute{Y} = AY \\ Y(t_\circ) = Y_\circ \end{cases}$.

التمرين4: أحسب $e^{\alpha A}$ حيث $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 13 \\ -6 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$، ثم استنتج حل مسألة كوشي: $\begin{cases} \acute{Y} = AY \\ Y(t_\circ) = Y_\circ \end{cases}$ حيث: $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$، و $Y(t_\circ) = Y_\circ = \begin{pmatrix} x_\circ \\ y_\circ \\ z_\circ \end{pmatrix}$. (نفس التمرين مع المصفوفة $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$، ثم من أجل $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$)

التمرين5: حل جملة التفاضلية التالية $\acute{Y} = AY$ من أجل: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (نفس التمرين مع المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$).

التمرين6: حل مسألة كوشي: $\begin{cases} \acute{Y} = AY + B(t) \\ Y(0) = Y_\circ \end{cases}$.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$، و $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$، و $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t cos(2t) \end{pmatrix}$، و $Y(0) = Y_\circ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ و $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$، و $B(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix}$، و $Y(0) = Y_\circ = \begin{pmatrix} x_\circ \\ y_\circ \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 9 \\ -3 & 4 & -9 \\ -3 & 3 & -8 \end{pmatrix}$، و $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$، و $B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix}$، و $Y(0) = Y_\circ = \begin{pmatrix} x_\circ \\ y_\circ \\ z_\circ \end{pmatrix}$.

التمرين7: أوجد الحل العام للجملة التفاضلية التالية: $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 3z + t + 1 \\ \dot{y} = 2y - z \\ \dot{z} = 2z \end{cases}$ (نفس التمرين مع $\begin{cases} \dot{x} = x + 8y + e^t \\ \dot{y} = 2x + y + e^{-3t} \end{cases}$)

التمرين8: حل المعادلات التفاضلية التالية:

1. $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y^{(2)} - 2\acute{y} + y = 0$.
2. $y^{(3)} = 2y^{(2)} + \acute{y} - 2y$.