2.1: المعادلات التفاضلية من الرتبة $n \geq 2$

2.1.1 تعريف: نسمي معادلة تفاضلية من الرتبة "n" (حيث $n \geq 2$) كل معادلة من الشكل

$$(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

حيث: y هي الدالة المجهولة ذات المتغير t القابلة للاشتقاق "n" مرة ولدينا

$$y' = \frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n},$$

2.1.2 تعريف: الشكل الاعتيادي لمعادلة التفاضلية من الرتبة "n" هو:

$$(1.2) — \quad y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

حيث $f: I \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ؛ I مجال مفتوح من $\mathbb{R}$ و Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$.

2.1.3 تعريف: حل المعادلة (1.2) على المجال J الذي نرمز له بـ (y, J) هو الدالة $y: J \longrightarrow \mathbb{R}$ التي تحقق:

① $(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \in I \times \Omega, \ \forall t \in J$.

② $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), \ \forall t \in J$.

2.2 الجمل التفاضلية من الرتبة الأولى

2.2.1 تعريف: نسمي جملة تفاضلية من الرتبة الأولى كل معادلة من الشكل (الشكل الاعتيادي)

$$(2.2) — \quad Y' = F(t, Y).$$

حيث $F: I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ؛ I مجال مفتوح من $\mathbb{R}$ و Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$.

الدالة Y هي الدالة المجهولة ذات المتغير t و $Y: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ؛ $Y' = \frac{dY}{dt}$ كما يلي

لدينا F و Y دالتان شعاعيتان يمكن كتابتهما على الشكل:

$$(*) \quad \boxed{F(t, Y) = (f_1(t, Y), f_2(t, Y), \dots, f_n(t, Y))}$$

$$f_i: I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (t, Y) \longmapsto f_i(t, Y) \quad / \ \forall i = \overline{1,n}$$

$$(**) \quad \boxed{Y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))}.$$

$$y_i: I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto y_i(t) \quad / \ \forall i = \overline{1,n}$$

بتعويض كل (*) و (**) في (2.2) نجد:

$$\frac{d}{dt}(y_1, \dots, y_n) = (f_1(t, Y), \dots, f_n(t, Y)).$$

$$(y_1', y_2', \dots, y_n') = (f_1(t, Y), \dots, f_n(t, Y)).$$

ومنه:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, \dots, y_n). \\ y_2' = f_2(t, y_1, \dots, y_n). \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, \dots, y_n). \end{cases}$$

2.2.2 تحويل معادلة تفاضلية من الرتبة $n \geq 2$ (1.2) إلى جملة تفاضلية من الرتبة 1 (2.2):

من أجل ذلك نستعمل تبديل المتغير التالي

$$(3.2) — \quad y_1 = y; \ y_2 = y'; \dots; y_k = y^{(k-1)}; \dots; y_n = y^{(n-1)}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow Y' = \begin{pmatrix} y_1' = y' \\ y_2' = y'' \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y^{(n-1)} \\ y_n' = y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Y' = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

يكفي أخذ

$$F: I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(t, Y) \longmapsto F(t, Y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ f(t, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad Y' = F(t, Y)$$

وهو المطلوب

مثال: لتكن المعادلة التفاضلية من الرتبة 3 التالية:

$$y^{(3)} = \frac{ty + y''}{y'}$$

المطلوب: تحويل هذه المعادلة إلى جملة تفاضلية

من الرتبة 1 .

نستعمل تبديل المتغير التالي

$y_1 = y$ ، $y_2 = y'$ و $y_3 = y''$

نضع

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Y' = \begin{pmatrix} y_1' = y' \\ y_2' = y'' \\ y_3' = y^{(3)} = \dfrac{ty + y''}{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \dfrac{ty_1 + y_3}{y_2} \end{pmatrix}$$

يكفي أن نضع

$$F(t,Y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \dfrac{ty_1 + y_3}{y_2} \end{pmatrix} ; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

3.2 : الجمل التفاضلية الخطية من الرتبة 1

1.3.2 تعريف نسمي جملة تفاضلية من الرتبة 1 ونرمز لها بـ: «ج.ت.خ 1» كل معادلة من الشكل

$$(4.2) \; — \; Y' = A(t)Y + B(t)$$

حيث $A: I \subset \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ دالة مصفوفية

$$t \mapsto A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \le i,j \le n}$$

و $B: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ دالة شعاعية.

$$t \mapsto B(t) = (b_i)_{1 \le i \le n}$$

والمتغير هو الدالة الشعاعية Y معرفة كما يلي

$$Y: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto Y(t) = (y_i(t))_{1 \le i \le n}.$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \; B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

ومنه يمكننا كتابة (4.2) كما يلي:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \dots + a_{1n}(t)y_n + b_1(t) \\ y_2' = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \dots + a_{2n}(t)y_n + b_2(t) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \dots + a_{nn}(t)y_n + b_n(t) \end{cases}$$

2.3.2 حالات خاصة

(1) $B \equiv 0$ دالة معدومة المعادلة (4.2) ج.ت.خ.1 من دون طرف ثاني.

(2) $B \not\equiv 0$ دالة غير معدومة (4.2) ج.ت.خ.1 بطرف ثاني.

(3) $A(t) = A$ دالة ثابتة (مستقلة عن t) (4.2) نسمي ج.ت.خ.1 ذات معاملات ثابتة. (ليس من الضروري أن تكون B دالة ثابتة).

3.3.2 تعريف (مسألة كوشي)

لتكن $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$.

نسمي الشرط $Y(t_0) = Y_0$ بالشرط الابتدائي.

ونسمي الجملة

$$(5.2) — \begin{cases} Y' = A(t)Y + B(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

بمسألة كوشي في النقطة (t_0, Y_0).

4.3.2 نظرية وجود ووحدانية الحل

لتكن مسألة كوشي (5.2).

إذا كانت كل من الدالتين A و B مستمرتين على I إذن من أجل كل $(t_0, Y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ مسألة كوشي (5.2) تقبل حل وحيد كلي على I، $I \to \mathbb{R}^n$ ؛

5.3.2 ملاحظة

الحل $Y: I \to \mathbb{R}$ لا يتعلق إلا بـ: t_0 و Y_0.

4.2 : الجمل التفاضلية الخطية من دون طرف ثاني

لتكن ج.ت.خ 1 من دون طرف ثاني،

$$(6.2) — Y' = A(t)Y$$

1.4.2 نظرية : تتمتع مجموعة حلول الجملة التفاضلية (6.2) بالخصائص الآتية :

① $Y\equiv 0$ الدالة المعدومة دوما حل لـ (6.2)

② إذا وجد $t_* \in I$ بحيث $Y(t_*)=0$ ، إذن الحل Y هو الدالة معدومة .

③ إذا كان Y_1 و Y_2 حلين للجملة (6.2) إذن التركيب الخطي $\alpha Y_1+\beta Y_2$ هو كذلك حل للجملة (6.2) ، (α, β ثوابت حقيقية).

البرهان: يترك للطلبة (استعمال النظرية 4.3.2 وحدانية الحل) .

2.4.2 النواة الحالة (المصفوفة الحالة) : لنعتبر الجملة التفاضلية الخطية من الرتبة 1 من دون طرف ثاني (6.2)

$$(6.2) \quad Y' = A(t)\,Y$$

حيث $A: I\subset \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ دالة مصفوفية مستمرة على I ، إذن حسب النظرية 4.3.2 من أجل كل $(t_0,Y_0)\in I\times\mathbb{R}^n$ الجملة التفاضلية (6.2) تقبل حل وحيد كلي Y يحقق $Y(t_0)=Y_0$

نلاحظ أن الحل Y لا يتعلق إلا بالثنائية (t_0,Y_0) ومنه لنرمز لهذا الحل بـ $t\mapsto Y(t,t_0,Y_0)$ ومنه $Y(t_0,t_0,Y_0)=Y_0$ (أي من أجل $t=t_0$)

3.4.2 قضية من أجل t و t_0 ثوابت حقيقية التطبيق المعرف كمايلي $Y_0\mapsto Y(t,t_0,Y_0)$ خطي بالنسبة لمتغير Y_0 (لاحل للجملة (6.2))

البرهان: من أجل t, t_0 ثوابت حقيقية من المجال I لنعرف التطبيق:

$$\Phi_{(t,t_0)}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$Y_0 \longmapsto \Phi_{(t,t_0)}(Y_0)=Y(t,t_0,Y_0)$$

حيث التطبيق $t\mapsto Y(t,t_0,Y_0)$ حل للجملة (6.2) الذي يحقق $Y(t_0,t_0,Y_0)=Y_0$.

لنبرهن أن $\Phi_{(t,t_0)}$ خطي بالنسبة لـ Y_0

من أجل ذلك ليكن $Y_1, Y_2\in\mathbb{R}^n$ و $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

لنبرهن أن $\Phi_{(t,t_0)}(\alpha Y_1+\beta Y_2)=\alpha\Phi_{(t,t_0)}(Y_1)+\beta\Phi_{(t,t_0)}(Y_2)$?!

ومنه لدينا

$t\mapsto Y(t,t_0,Y_1)$ حل للجملة (6.2) الذي يحقق $Y(t_0,t_0,Y_1)=Y_1$ (أي من أجل $t=t_0$)

$t\mapsto Y(t,t_0,Y_2)$ حل للجملة (6.2) الذي يحقق $Y(t_0,t_0,Y_2)=Y_2$ (أي من أجل $t=t_0$)

ومنه حسب النظرية 1.4.2 إذن الدالة $t\mapsto \alpha Y(t,t_0,Y_1)+\beta Y(t,t_0,Y_2)$ حل للجملة (6.2) الذي يحقق من أجل $t=t_0$

$$\alpha Y(t_0,t_0,Y_1)+\beta Y(t_0,t_0,Y_2)=\alpha Y_1+\beta Y_2$$

ومن جهة أخرى الدالة $t\mapsto Y(t,t_0,\alpha Y_1+\beta Y_2)$ هي حل للجملة الذي يحقق من أجل $t=t_0$.

$$Y(t_0,t_0,\alpha Y_1+\beta Y_2)=\alpha Y_1+\beta Y_2$$

إذن حسب نظرية وجود وحدانية الحل 4.3.2 ، إذن

$$\begin{cases} Y(t,t_0,\alpha Y_1+\beta Y_2) = \\ \quad =\alpha Y(t,t_0,Y_1)+\beta Y(t,t_0,Y_2) , \\ \forall t\in I \end{cases}$$

إذن

$$\Phi_{(t,t_0)}(\alpha Y_1+\beta Y_2)=\alpha\Phi_{(t,t_0)}(Y_1)+\beta\Phi_{(t,t_0)}(Y_2) .$$

ومنه $\Phi_{(t,t_0)}$ تطبيق خطي من $\mathbb{R}^n$ نحو $\mathbb{R}^n$.

4.4.2 تعريف : من قضية السابقة 3.4.2 التطبيق $\Phi_{(t,t_0)}$ تطبيق خطي $\mathbb{R}^n$ نحو $\mathbb{R}^n$ ومنه توجد مصفوفة من $M_n(\mathbb{R})$ مرفقة بالتطبيق $\Phi_{(t,t_0)}$ نرمز لها بـ $R(t,t_0)$.

ومنه $\Phi_{(t,t_0)}(Y_0)=R(t,t_0)\,Y_0$.

إذن يمكننا أن نكتب :

$$(7.2) \quad \boxed{\forall t,t_0\in I: \ Y(t,t_0,Y_0)=R(t,t_0)\,Y_0 , \quad \forall Y_0\in\mathbb{R}^n}$$

المصفوفة $R(t,t_0)\in M_n(\mathbb{R})$ تسمى بالنواة الحالة (المصفوفة الحالة) للجملة (6.2)

2 . 4 . 5 قضية : خصائص $R(t,t_0)$:

لتكن $R(t,t_0)$ مصفوفة حالة للجملة (6.2) عندئذ فإن :

(i) $\forall t_0\in I \quad , \quad R(t_0,t_0)=I_n$

(ii) $\forall r,s,t\in I$

$$R(t,s)\cdot R(s,r)=R(t,r).$$

(iii) من أجل كل $t,s\in I$ المصفوفة الحالة $R(t,s)$ قابلة للقلب ولدينا

$$R^{-1}(t,s)=R(s,t).$$

البرهان :

(i) لدينا من أجل $t=t_0$ بالتعويض في (7.2) نجد :

$$Y(t_0,t_0,Y_0)=R(t_0,t_0)Y_0 \quad , \quad \forall Y_0\in\mathbb{R}^n$$

$$Y(t_0,t_0,Y_0)=Y_0 \quad , \quad \forall Y_0\in\mathbb{R}^n$$

إذن $R(t_0,t_0)Y_0=Y_0 \quad , \quad \forall Y_0\in\mathbb{R}^n$

ومنه $R(t_0,t_0)=I_n.$

(ii) لدينا التابع $t\longmapsto R(t,s)R(s,r)Y_0$ هو حل للجملة (6.2) الذي يأخذ القيمة $R(s,r)Y_0$ من أجل $t=s$.

وكذلك التابع $t\longmapsto R(t,r)Y_0$ هو حل للجملة (6.2) الذي يأخذ القيمة $R(s,r)Y_0$ من أجل $t=s$.

إذن حسب نظرية وجود ووحدانية الحل 4.3.2

$$\begin{cases} R(t,s)R(s,r)Y_0=R(t,r)Y_0 \quad , \forall t\in I \\ \forall Y_0\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

إذن :

$$\begin{cases} R(t,s)R(s,r)=R(t,r) \\ \forall t,s,r\in I \end{cases}$$

(iii) من أجل $\forall t,s\in I$.

$$\begin{cases} R(t,s)R(s,t)=R(t,t)=I_n \\ R(s,t)R(t,s)=R(s,s)=I_n \end{cases}$$

إذن المصفوفة $R(t,s)$ قابلة للقلب ولدينا

$$R^{-1}(t,s)=R(s,t).$$

2 . 4 . 6 قضية : $t\longmapsto R(t,s)$ دالة مصفوفية للمساواة الحالة للجملة (6.2) قابلة للاشتقاق وتحقق :

$$\frac{d}{dt}R(t,s)=A(t)R(t,s) \quad , \quad \forall t\in I$$

البرهان : لدينا $Y(t,t_0,Y_0)=R(t,t_0)Y_0$ حل للجملة (6.2) ومنه بالتعويض في (6.2)

$$\frac{dY}{dt}(t,t_0,Y_0)=A(t)Y(t,t_0,Y_0)$$

$$\frac{dY}{dt}(t,t_0,Y_0)=A(t)R(t,t_0)Y_0 \quad , \forall Y_0\in\mathbb{R}^n \qquad (*)$$

ومن جهة أخرى :

$$\frac{dY}{dt}(t,t_0,Y_0)=\frac{d}{dt}\left(Y(t,t_0,Y_0)\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\left(R(t,t_0)Y_0\right).$$

$$\frac{dY}{dt}(t,t_0,Y_0)=\frac{dR}{dt}(t,t_0)\cdot Y_0 \quad , \forall Y_0\in\mathbb{R}^n \qquad (**)$$

من $(*)$ و $(**)$ لدينا

$$\frac{dR}{dt}(t,t_0)Y_0=A(t)R(t,t_0)Y_0 \quad , \forall Y_0\in\mathbb{R}^n$$

إذن

$$\frac{dR}{dt}(t,t_0)=A(t)R(t,t_0) \quad , \quad t,t_0\in I$$

2 . 4 . 7 ملاحظة : من القضية 6.4.2 لدينا

$$\frac{dR}{dt}(t,t_0)=A(t)R(t,t_0)$$

ومن القضية 5.4.2 لدينا $R(t_0,t_0)=I_n$

إذن المصفوفة الحالة $R(t,t_0)$ للجملة (6.2) يمكن تعريفها أنها الحل الوحيد للجملة الخطية في $M_n(\mathbb{R})$ التالية

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt}(t)=A(t)U(t) \\ U(t_0)=I_n \end{cases} \quad / \quad \begin{aligned} U: I &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ t &\longmapsto U(t) \end{aligned}$$

2 . 5 . الجمل التفاضلية الخطية ذات الطرف الثاني

لنعتبر الجملة التفاضلية الخطية بطرف ثاني

$$(5.2)-\begin{cases} Y'=A(t)Y+B(t) \text{ ——— } (4.2) \\ Y(t)=Y_0 \end{cases}$$

حيث $A: I\longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ و $B: I\longrightarrow\mathbb{R}^n$ مستمرتين على I

2 . 5 . 1 تعريف : المصفوفة الحالة المرفقة للجملة تفاضلية بطرف ثاني هي المصفوفة الحالة للجملة من دون طرف ثاني.

2 . 5 . 1 طريقة الحل : لنستعمل طريقة تغيير الثابت.

لتكن $R(t,t_0)$ المصفوفة الحالة للجملة (5.2) ومنه حل الجملة التفاضلية ما طرف ثاني هو :

$$Y_H=R(t,t_0)Y_0$$

لنستعمل طريقة تغيير الثابت
ومنه حل الجملة (2.5) يعطى بالشكل

$$\boxed{Y(t) = R(t,t_0)\, X(t)} \quad (2.8)$$

ومنه من أجل إيجاد الحل يكفي البحث عن $X(t)$.

البحث عن $X(t)$:

لدينا $(2.8) \Rightarrow Y'(t) = \frac{d}{dt}\left(R(t,t_0)\, X(t)\right)$

$$\Rightarrow Y'(t) = \frac{dR}{dt}(t,t_0)\, X(t) + R(t,t_0)\, X'(t)$$

من القضية 2.4.6 لدينا

$$\frac{dR}{dt}(t,t_0) = A(t)\, R(t,t_0)$$

ومنه

$$Y'(t) = A(t)R(t,t_0)X(t) + R(t,t_0)X'(t) \quad (2.9)$$

بتعويض (2.8) و (2.9) في (2.4).

$$(2.4) \quad Y' = A(t)Y + B(t)$$

نجد

$$\cancel{A(t)R(t,t_0)X(t)} + R(t,t_0)X'(t) = \cancel{A(t)R(t,t_0)X(t)} + B(t)$$

$$R(t,t_0)\, X'(t) = B(t)$$

$$\Rightarrow X'(t) = R(t_0,t)\, B(t).$$

بالمكاملة على المجال $[t_0,t]$ نجد

$$\int_{t_0}^{t} X'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} R(t_0,s)B(s)\,ds.$$

$$X(t) - X(t_0) = \int_{t_0}^{t} R(t_0,s)B(s)\,ds.$$

من أجل حساب $X(t_0)$ نعوض $t=t_0$ في (2.8) نجد $Y_0 = Y(t_0) = R(t_0,t_0)X(t_0)$

إذن $\boxed{X(t_0) = Y_0}$

إذن

$$X(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t_0,s)B(s)\,ds$$

بتعويض عبارة $X(t)$ الأخيرة في (2.8) نجد

$$Y(t) = R(t,t_0)\left[Y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t_0,s)B(s)\,ds\right]$$

$$Y(t) = R(t,t_0)Y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,t_0)R(t_0,s)B(s)\,ds$$

$$Y(t) = R(t,t_0)Y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)B(s)\,ds$$

ومنه حل مسألة كوشي (2.5) هو

$$Y(t) = R(t,t_0)Y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)B(s)\,ds \quad (2.10)$$

2.5.2 ملاحظة: من العبارة (2.10)
نلاحظ أن حل مسألة كوشي (2.5) يرجع كذلك إلى حساب النواة الحالة للجملة

2.6: حساب النواة الحالة (المصفوفة الحالة)

2.6.1: الجملة التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة:

2.6.1.1 التابع الأسي لمصفوفات

2.6.1.1.1 نظرية: لتكن $A \in M_n(\mathbb{R})$ (مصفوفة ثابتة) السلسلة التالية:

$$I_n + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k + \dots = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}A^k$$

متقاربة نظيميا. (إصطلاحا $A^0 = I_n$)

البرهان:

$$\left\|\frac{1}{k!}A^k\right\| \leq \frac{1}{k!}\|A^k\| \leq \frac{1}{k!}\|A\|^k$$

بما أن A مصفوفة ثابتة إذن يوجد $M>0$ بحيث $\|A\| \leq M$.

$$\left\|\frac{1}{k!}A^k\right\| \leq \frac{1}{k!}M^k$$

السلسلة $e^M = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}M^k$ متقاربة وبالتالي
السلسلة $I_n + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k + \dots$ متقاربة نظيميا.

2.6.1.2 تعريف: التطبيق الخطي حاصل مجموع السلسلة:

$$I_n + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k + \dots = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}A^k$$

يدعى أسية المصفوفة A ونرمز له بـ e^A أو $\exp(A)$.

2.6.1.3 نظرية: ليكن A و B مصفوفتين $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ تحقق: $A.B = B.A$ إذن:

$$e^{A+B} = e^A . e^B$$

البرهان: من التعريف لدينا

$$e^A = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}A^k, \quad e^B = \sum_{l\geq 0} \frac{1}{l!}A^l.$$

$$e^A.e^B=\left[\sum_{k\geq0}\frac{1}{k!}A^k\right]\left[\sum_{l\geq0}\frac{1}{l!}B^l\right].$$

$$e^A.e^B=\sum_{k\geq0}\sum_{l\geq0}\frac{1}{k!\,l!}A^k.B^l$$

$$e^A.e^B=\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}}\frac{1}{k!\,l!}A^k.B^l$$

$$e^A.e^B=\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2}\frac{1}{k!\,l!}A^k.B^l.$$

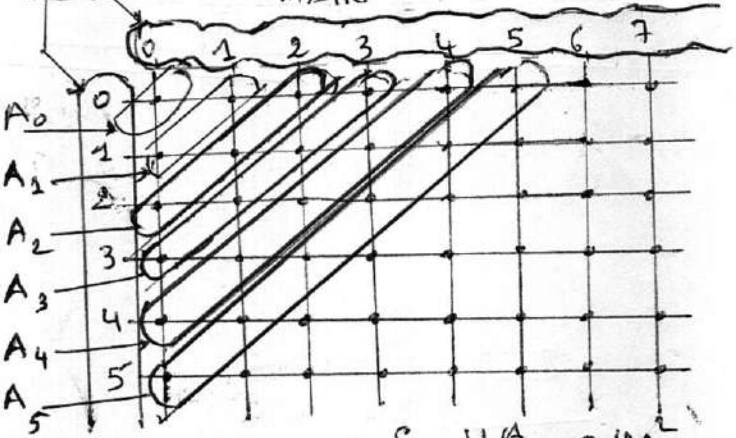
لنضع $A_m=\{(k,l)\in\mathbb{N}^2,\ k+l=m\}$.

1/ لنبرهن أن $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ تغطية لـ $\mathbb{N}^2$؟

أي يتحقق أمرين (أ) $\bigcup_{m\in\mathbb{N}}A_m=\mathbb{N}^2$؟

(ب) $\forall m_1,m_2\in\mathbb{N},\ m_1\neq m_2: A_{m_1}\cap A_{m_2}=\phi$؟

لنبدأ بـ (أ) $\bigcup_{m\in\mathbb{N}}A_m=\mathbb{N}^2$. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}=\mathbb{N}^2$



* $\bigcup_{m\in\mathbb{N}}A_m\subset\mathbb{N}^2$؟

$\forall m\in A:\ A_m\subset\mathbb{N}^2\Rightarrow\bigcup_{m\in\mathbb{N}}A_m\subset\mathbb{N}^2$ —(*)

** $\bigcup_{m\in\mathbb{N}}A_m\supset\mathbb{N}^2$؟

$\forall(k,l)\in\mathbb{N}^2\Rightarrow(k,l)\in A_{k+l}\subset\bigcup_{m\in\mathbb{N}}A_m.$

ومنه $(**)\rightarrow\mathbb{N}^2\subset\bigcup_{m\in\mathbb{N}}A_m$

من (*) و (**) لدينا $\bigcup_{m\in\mathbb{N}}A_m=\mathbb{N}^2$

(ب) $m_1\neq m_2: A_{m_1}\cap A_{m_2}=\phi$؟

لنفرض بالخلف أن $m_1\neq m_2$ ولكن $A_{m_1}\cap A_{m_2}\neq\phi$

ومنه يوجد $(k,l)\in A_{m_1}\cap A_{m_2}$.

$\Rightarrow(k,l)\in A_{m_1}\wedge(k,l)\in A_{m_2}.$

$\Rightarrow k+l=m_1\wedge k+l=m_2.$

ومنه $m_1=k+l=m_2$.

وهذا يتناقض مع كون $m_1\neq m_2$، ومنه

$\forall m_1,m_2\in\mathbb{N},\ m_1\neq m_2\Rightarrow A_{m_1}\cap A_{m_2}=\phi$

ومنه $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ تغطية لـ $\mathbb{N}^2$ ومنه

$$e^A.e^B=\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2}\frac{1}{k!\,l!}A^k.B^l.$$

$$=\sum_{(k,l)\in\bigcup_{m\in\mathbb{N}}A_m}\frac{1}{k!\,l!}A^k.B^l.$$

$$=\sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{(k,l)\in A_m}\frac{1}{k!\,l!}A^k.B^l$$

$$=\sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{k+l=m}\frac{1}{k!\,l!}A^k.B^l.$$

$$A_m=\{(k,l)\in\mathbb{N}^2,\ k+l=m\}$$

$$A_m=\{(k,m-k)\in\mathbb{N}^2,\ k=\overline{0,m}\}.$$

$$=\sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!\,(m-k)!}A^k.B^{m-k}$$

لدينا $\forall m\in\mathbb{N},\ \forall k=\overline{0,m}: C_m^k=\dfrac{m!}{k!(m-k)!}$

إذن $e^A.e^B=\sum_{m\in\mathbb{N}}\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}C_m^kA^k.B^{m-k}$ —(1)

من جهة أخرى لدينا

$$e^{(A+B)}=\sum_{m\geq0}\frac{1}{m!}(A+B)^m \quad (2)$$

لنبرهن الشرط الكافي:

$A.B\in M_n(\mathbb{R})$. | تمرين 4.1.6.2

تحقق الشرط إذن $A.B=B.A$

$$(A+B)^m=\sum_{k=0}^{m}C_m^kA^k.B^{m-k} \quad (3)$$

ثنائي نيوتن ولكن للمصفوفات

لنبرهن الشرط؟، من أجل ذلك لنبرهن بالتراجع أنه إذا كان الشرط $A.B=B.A$، إذن:

$$A^s.B=B.A^s,\ \forall s\in\mathbb{N} \quad (4)$$

الشرط الابتدائي: من أجل $s=0$.

$$A^0 . B = I_n . B = B$$
$$B . A^0 = B . I_n = B$$

محققة.

الشرط النهائي: لنفرض أن الخاصية صحيحة حتى الرتبة "s" ولنبرهن صحتها من أجل "s+1"

$$A^{s+1} B = A . A^s . B = A . B . A^s = B . A . A^s = B A^{s+1}$$

محققة.

الرجوع لبرهان التوطئة 2.6.1.4:

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k A^k B^{m-k} , \forall m \in \mathbb{N}$$

الشرط الابتدائي: من أجل $m=0$.

$$(A+B)^0 = I_n$$
$$C_0^0 A^0 B^0 = 1 . I_n . I_n = I_n \; : \; C_0^0 = 1$$

محققة.

الشرط النهائي: لنفرض أن الخاصية صحيحة حتى الرتبة "m" ولنبرهن صحتها من أجل m+1

$$(A+B)^{m+1} = (A+B)(A+B)^m = (A+B)\sum_{k=0}^{m} C_m^k A^k B^{m-k}$$

$$(A+B)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k A^{k+1} B^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} C_m^k B A^k B^{m-k}$$

باستعمال العلاقة (4) نجد:

$$(A+B)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k A^{k+1} B^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} C_m^k A^k B^{m-k+1}$$

لنستعمل تبديل المتغير في المجموع الأول كما يلي

$$l = k+1 \quad \begin{cases} k=0 \Rightarrow l=1 \\ k=m \Rightarrow l=m+1 \end{cases}$$

إذن

$$\sum_{k=0}^{m} C_m^k A^{k+1} B^{m-k} = \sum_{l=1}^{m+1} C_m^{l-1} A^l B^{m-l+1} = \sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1} A^k B^{m-k+1}$$

(المساواة الأخيرة: تبديل l بـ k لا يغير في قيمة المجموع). إذن

$$(A+B)^{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1} A^k B^{m+1-k} + \sum_{k=0}^{m} C_m^k A^k B^{m+1-k}$$
$$= \sum_{k=1}^{m} [C_m^{k-1} + C_m^k] A^k B^{m+1-k} + C_m^m A^{m+1} B^0 + C_m^0 A^0 B^{m+1} .$$

لدينا العلاقات التالية.

$$C_m^{k-1} + C_m^k = C_{m+1}^k , \; \forall k = \overline{1,m}$$
$$C_m^m = C_{m+1}^{m+1} = 1 , \; C_m^0 = C_{m+1}^0 = 1$$

ومنه بتعويض العلاقات الأخيرة مع تغيير الترتيب نتحصل على المجموع،

$$(A+B)^{m+1} = C_{m+1}^0 . A^0 . B^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_{m+1}^k A^k B^{m+1-k} + C_{m+1}^{m+1} A^{m+1} B^0$$

$$(A+B)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k A^k B^{(m+1)-k}$$

ومنه الشرط النهائي محقق إذن العلاقة (3) صحيحة.

بتعويض (3) في (2) نجد:

$$e^{(A+B)} = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} C_m^k A^k B^{m-k} \quad (5)$$

من العلاقة (1) و (5) نجد!

$$e^{A+B} = e^A . e^B$$

2.6.1.5 لازمة: من أجل كل $A \in M_n(\mathbb{R})$ لدينا $e^A \in M_n(\mathbb{R})$ قابلة للقلب ولدينا

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}$$

البرهان: لدينا $A.(-A) = (-A).A$

$$\begin{cases} e^{-A} . e^{A} = e^{-A+A} = e^{O} = I_n \\ e^{A} . e^{-A} = e^{A-A} = e^{O} = I_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^A \text{ قابلة للقلب} \\ (e^A)^{-1} = e^{-A} \end{cases}$$

$O \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة المعدومة

$$e^{O} = I_n + \frac{1}{1!}O + \frac{1}{2!}O^2 + \dots + \frac{1}{k!}O^k + \dots = I_n .$$

2.6.2 النواة الحالة لجملة التفاضلية خطية ذات المعاملات الثابتة

2.6.2 : النواة الحالة لجملة تفاضلية خطية ذات المعاملات الثابتة:

1.2.6.2 نظرية: النواة الحالة للجمل التفاضلية خطية ذات المعاملات الثابتة (أي أن المصفوفة A ثابتة) تعطى بالعلاقة:

$$R(t,t_0)=\exp((t-t_0)A).$$

البرهان: من الملاحظة 7.4.2 لدينا $R(t,t_0)$ النواة الحالة للجملة (6.2) هي الحل الوحيد للجملة الخطية في $M_n(\mathbb{R})$ التالية

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t)=A(t)u(t) \text{ ——— } (\Delta) \\ u(t_0)=I_n \text{ ——— } (\Delta\Delta) \end{cases}$$

ومنه يكفي أن نبرهن أن $e^{(t-t_0)A}$ يحقق (Δ) و $(\Delta\Delta)$.

لنبرهن $(\Delta\Delta)$: $u(t_0)=I_n$ ؟

من أجل $t=t_0$ لدينا

$$e^{(t_0-t_0)A}=e^{O}=I_n.$$

محقق.

لنبرهن (Δ): $\frac{d}{dt}u(t)=A(t)u(t)$ ؟

$$\frac{d}{dt}\left[e^{(t-t_0)A}\right]=\frac{d}{dt}\left[I_n+\sum_{k\geq1}\frac{}{k!}A^k\right]$$

$$=\sum_{k\geq1}\cancel{k}\frac{(t-t_0)^{k-1}}{\cancel{k}(k-1)!}A^k$$

$$=A\sum_{k\geq1}\frac{(\;-t_0)^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1}.$$

نغير المتغير $k-1\to k$ نجد

$$\frac{d}{dt}\left[e^{(t-t_0)A}\right]=A\sum_{k\geq0}\frac{(t-t_0)^k}{k!}A^k$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{(t-t_0)A}\right]=A\,e^{(t-t_0)A}$$

وهو المطلوب.

3.6.2 : حساب أسية مصفوفة

1.3.6.2 نظرية: لتكن $A\in M_n(\mathbb{R})$. لتكن $B\in M_n(\mathbb{R})$ مشابهة لـ A (أي توجد $\varphi\in M_n(\mathbb{R})$ قابلة للقلب ($\det\varphi\neq0$)) بحيث $A=\varphi B\varphi^{-1}$

ومنه

$$e^A=\varphi\, e^B\,\varphi^{-1}$$

البرهان: لنبرهن أولا بالتراجع العلاقة

$$(\varphi B\varphi^{-1})^k=\varphi B^k\varphi^{-1},\ \forall k\geq0$$

الشرط الابتدائي: $k=0$

$$(\varphi B\varphi^{-1})^0=I_n$$

$$\varphi B^0\varphi^{-1}=\varphi I_n\varphi^{-1}=I_n$$

محققة.

الشرط النهائي: لنفرض أن الخاصية صحيحة حتى الرتبة k ولنبرهن صحتها من أجل $k+1$

$$(\varphi B\varphi^{-1})^{k+1}=(\varphi B\varphi^{-1})^k\varphi B\varphi^{-1}$$

$$=\varphi B^k\cancel{\varphi^{-1}}\cancel{\varphi}B\varphi^{-1}$$

$$=\varphi B^{k+1}\varphi^{-1}$$

ومنه العلاقة صحيحة.

إذن لدينا.

$$e^A=\sum_{k\geq0}\frac{1}{k!}A^k=\sum_{k\geq0}\frac{1}{k!}(\varphi B\varphi^{-1})^k$$

$$=\sum_{k\geq0}\frac{1}{k!}\varphi B^k\varphi^{-1}=\varphi\left(\sum_{k\geq0}\frac{1}{k!}B^k\right)\varphi^{-1}$$

$$\boxed{e^A=e^{\varphi B\varphi^{-1}}=\varphi\, e^B\,\varphi^{-1}}$$

2.3.6.2 نظرية: لتكن $D\in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة قطرية بالكتل أي توجد $(D_i)_{1\leq i\leq q}$ حيث $i=\overline{1,q}$ ، $D_i\in M_{n_i}(\mathbb{R})$: (لابد أن يكون $\sum_{i=1}^{q}n_i=n$)

$$D=\begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & D_2 \ddots & \\ 0 & & D_q \end{pmatrix}$$

ومنه

$$e^D=\begin{pmatrix} e^{D_1} & & 0 \\ & e^{D_2}\ddots & \\ 0 & & e^{D_q} \end{pmatrix}$$

البرهان: لابد أن نبرهن أولا بالتراجع أن

$$\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix} D_1^k & 0 \\ 0 & D_2^k \end{pmatrix},\ \forall k\geq0$$

الشرط الإبتدائي $k=0$

$$\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2\end{pmatrix}^0 = I_{n_1+n_2}.$$

$$\begin{pmatrix} D_1^0 & 0 \\ 0 & D_2^0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2}\end{pmatrix} = I_{n_1+n_2}.$$

محققة

الشرط النهائي: لنفرض أن الخاصية صحيحة حتى الرتبة k ولنبرهن صحتها من أجل $k+1$.

$$\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2\end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2\end{pmatrix}^{k}\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} D_1^k & 0 \\ 0 & D_2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1^{k+1} & 0 \\ 0 & D_2^{k+1}\end{pmatrix}$$

العلاقة صحيحة ومنه.

$$e^D = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}D^k = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & D_2 & \\ 0 & & \ddots \; D_q\end{pmatrix}^k$$

$$= \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\begin{pmatrix} D_1^k & & 0 \\ & D_2^k & \\ 0 & & \ddots \; D_q^k\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}D_1^k & & 0 \\ & \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}D_2^k & \\ 0 & & \ddots \; \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}D_q^k\end{pmatrix}$$

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{D_1} & & 0 \\ & e^{D_2} & \\ 0 & & \ddots \; e^{D_q}\end{pmatrix}$$

3.3.6.2 قضية: ليكن $A\in M_n(\mathbb{R})$، $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$e^{\alpha I_n + \beta A} = e^{\alpha} e^{\beta A}$$

البرهان: يترك للطلبة.

لدينا في كل ما سيأتي: $A\in M_n(\mathbb{R})$.

كثير الحدود المميز A:

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_n) \in P_n(\mathbb{R})$$

نفرض أن λ_1 و λ_2 و ... و λ_q جذور كثير حدود P_A وأن

$$P_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_q)^{n_q}$$

λ_i تسمى القيمة الذاتية للمصفوفة A.

n_i تسمى التعداد الجبري للقيمة الذاتية λ_i.

لدينا $\sum_{i=1}^{q} n_i = n$.

4.3.6.2 نظرية (الجبر)

لتكن $A\in M_n(\mathbb{R})$ إذن فهي مشابهة لمصفوفة $D\in M_n(\mathbb{R})$ قطرية بالكتل من الشكل:

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_q\end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

حيث

$$D_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n_i} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & \alpha_{n_i-1\, n_i} \\ 0 & & & \lambda_i\end{pmatrix} \in M_{n_i}(\mathbb{R})$$

كل مصفوفة D_i مثلثية علوية تتعلق بقيمة ذاتية λ_i.

أي توجد مصفوفة $Q\in M_n(\mathbb{R})$ قابلة للقلب بحيث

$$A = Q D Q^{-1}$$

ومنه

$$\boxed{e^A = Q e^D Q^{-1}} \longleftarrow (1)$$

(2)

$$\boxed{e^D = \exp\begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{D_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{D_q}\end{pmatrix}}$$

ومن أجل $i=\overline{1,q}$ لدينا $D_i = \lambda_i I_{n_i} + N_i$

حيث
$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n_i} \\ & \ddots & & \\ & & & \alpha_{n_i-1\, n_i} \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}$$
ومنه $P_N(\lambda) = (-\lambda)^{n_i}$

5.3.6.2 نظرية هاملتون

لتكن $A\in M_n(\mathbb{R})$ و $P_A(\lambda)$ كثير الحدود المميز المرفق بالمصفوفة A، إذا قمنا بالتحويل التالي: $\forall k=\overline{0,n},\ \lambda^k \to A^k$ إذن

$$P_A(A) = 0$$

وبتطبيق نظرية هاملتون على المصفوفة N نجد

$$N^k = 0,\ \forall k\geq n_i \Leftarrow N^{n_i} = 0$$

$$e^{D_i} = e^{\lambda_i I_{n_i} + N_i} = e^{\lambda_i} e^{N_i}$$

$$e^{D_i} = e^{\lambda_i} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} N_i^k$$

$$\boxed{e^{D_i} = e^{\lambda_i} \sum_{k=0}^{n_i-1} \frac{1}{k!} N_i^k = e^{\lambda_i}\left[I_{n_i} + \frac{1}{1!} N_i + \dots + \frac{1}{(n_i-1)!} N_i^{n_i-1}\right] \quad \forall i=\overline{1,q}} \quad (3)$$

بتعويض (3) في (2) ثم تعويض الناتج في (1) بذلك نتحصل على e^A.

2.6.3.6: كيفية إيجاد كل من D و Q:

من أجل ذلك نعرف فضاء الأشعة الذاتية المرفق بـ λ_i كما يلي

$$E_{\lambda_i} = \{x \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda_i I_n)x = 0\}$$

الفضاء E_{λ_i} هو فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^n$.

لنضع $1 \leq \dim E_{\lambda_i} = \alpha_i \leq n_i$ ، $i=\overline{1,q}$

α_i تسمى التعداد الهندسي لـ λ_i.

لنضع

$$E_{\lambda_i} = \langle \{e_1, \dots, e_{\alpha_i}\} \rangle$$

و

$$Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_q).$$

$$Q_i \in M_{n_i}(\mathbb{R}) \quad i=\overline{1,q}$$

ومنه توجد حالتين للقيم الذاتية λ_i.

الحالة الأولى: $\alpha_i = n_i$ في هذه الحالة

$$D_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad Q_i = (e_1, \dots, e_{n_i}).$$

الحالة الثانية: $\alpha_i < n_i$ في هذه الحالة توجد طريقتين للحساب.

الطريقة (1) طريقة الأشعة المعممة

من أجل ذلك نعرف فضاء الأشعة الذاتية المعمم المرفق بـ λ_i كما يلي

$$E^{n_i}_{\lambda_i} = \{x \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda_i I_n)^{n_i} x = 0\}$$

الفضاء $E^{n_i}_{\lambda_i}$ هو فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^n$

ولكن $\dim E^{n_i}_{\lambda_i} = n_i$

ودوما إضافة إلى ذلك:

$$E_{\lambda_i} \subset E^{n_i}_{\lambda_i}$$

لنضع

$$E^{n_i}_{\lambda_i} = \langle \{u^i_1, \dots, u^i_{n_i}\} \rangle$$

نختار Q_i ثم نقوم انطلاقا من ذلك بحساب D_i.

• اختيار Q_i يكون كما يلي:

1. نختار α_i شعاع ذاتي مرفق بـ λ_i.
2. ثم نكمل العدد إلى n_i (أي نختار $(n_i - \alpha_i)$ شعاع ذاتي معمم مرفق بـ λ_i) بشرط أن تكون Q_i قابلة للقلب.

$$\boxed{Q_i = (e^i_1, \dots, e^i_{\alpha_i}, u^i_{\alpha_i+1}, \dots, u^i_{n_i})}$$

•• حساب D_i: كما يلي:

$$D_i = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} Ae_1 \cdots Ae_{\alpha_i-1} & Ae_{\alpha_i} & Au_{\alpha_i+1} & \cdots & Au_{n_i} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cccc} \lambda_i & & 0 & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ 0 & & \lambda_i & & & & \\ \hline & & & \lambda_i & d_{\alpha_i \alpha_i+1} & \cdots & d_{\alpha_i n_i} \\ & 0 & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \lambda_i & d_{n_i-1\, n_i} \\ & & & & & & \lambda_i \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_{\alpha_i-1} \\ e_{\alpha_i} \\ u_{\alpha_i+1} \\ \vdots \\ u_{n_i-1} \\ u_{n_i} \end{array}$$

$$\begin{cases} Ae_k = \lambda_i e_k, \quad k=\overline{1,\alpha_i} \\ Au_{\alpha_i+1} = d_{\alpha_i \alpha_i+1} e_{\alpha_i} + \lambda_i u_{\alpha_i+1} \\ \vdots \\ Au_l = d_{\alpha_i l} e_{\alpha_i} + d_{\alpha_i+1\, l} u_{\alpha_i+1} + \dots + d_{n_i-1} u_{l-1} + \lambda_i u_l \\ \vdots \\ Au_{n_i} = d_{\alpha_i n_i} e_i + d_{\alpha_i+1\, n_i} u_{\alpha_i+1} + \dots + d_{n_i-1\, n_i} u_{n_i-1} + \lambda_i u_{n_i} \end{cases}$$

الطريقة 2) طريقة اختزال جاكوبي :

نقوم بعكس الطريقة السابقة نختار D_i ثم نقوم بحساب P_i.

تعريف مصفوفة جاكوبي والتي نرمز لها بـ $J(\lambda,n)$ من $M_n(\mathbb{R})$ معرفة كمايلي

$$J(\lambda,n)=\begin{pmatrix}\lambda&1&&0\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\0&&&\lambda\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{R})$$

• نختار D_i كمايلي

$$D_i=\begin{pmatrix}\overbrace{\begin{matrix}\lambda_i&&\\&\ddots&\\&&\lambda_i\end{matrix}}^{(\alpha_i-1)\text{ مرة}}&0\\0&J(\lambda_i,n_i-\alpha_i+1)\end{pmatrix}\in M_{n_i}(\mathbb{R})$$

• نبحث عن P_i بحيث تحقق

$$AP_i=P_iD_i$$

لنضع $P_i=(S_1,\dots,S_{n_i})\in M_{n\times n_i}(\mathbb{R})$

$$A(S_1,\dots,S_{n_i})=(S_1,\dots,S_{n_i})\begin{pmatrix}\begin{matrix}\lambda_i&&\\&\ddots&\\&&\lambda_i\end{matrix}&0\\0&\begin{matrix}\lambda_i&1&&0\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\0&&&\lambda_i\end{matrix}\end{pmatrix}$$

(α_i-1) مرة

$(n_i-\alpha_i+1)$ مرة

$$(AS_1,\dots,AS_{n_i})=(\lambda_iS_1,\dots,\lambda_iS_{\alpha_i},\lambda_iS_{\alpha_i+1}+S_{\alpha_i},\dots,\lambda_iS_k+S_{k-1},\dots,\lambda_iS_{n_i}+S_{n_i-1})$$

ما نلاحظه هو

$$\begin{cases}AS_1=\lambda_iS_1\\AS_2=\lambda_iS_2\\\quad\vdots\\AS_{\alpha_i}=\lambda_iS_{\alpha_i}\end{cases}\Rightarrow AS_\ell=\lambda_iS_\ell\ ;\ \ell=\overline{1,\alpha_i}\Rightarrow S_\ell=e_\ell^i\ ;\ \ell=\overline{1,\alpha_i}\quad(*)$$

لأن (e_ℓ^i) الأشعة الذاتية المرفقة بـ λ_i، $1\leq\ell\leq\alpha_i$

$$\begin{cases}AS_{\alpha_i+1}=\lambda_iS_{\alpha_i+1}+S_{\alpha_i}\quad(1)\\AS_{\alpha_i+2}=\lambda_iS_{\alpha_i+2}+S_{\alpha_i+1}\quad(2)\\\quad\vdots\\AS_{n_i-1}=\lambda_iS_{n_i-1}+S_{n_i-2}\\AS_{n_i}=\lambda_iS_{n_i}+S_{n_i-1}.\end{cases}$$

$(1)\Rightarrow(A-\lambda_iI_n)S_{\alpha_i+1}=S_{\alpha_i}$

من العلاقة (*) لدينا $S_{\alpha_i}=e^i_{\alpha_i}$

ومنه

$$\Rightarrow\boxed{(A-\lambda_iI_n)S_{\alpha_i+1}=e^i_{\alpha_i}}\quad(2)$$

الجملة (2) في $\mathbb{R}^n$ (المجهول $S_{\alpha_i+1}\in\mathbb{R}^n$) محددها معدوم لأن λ_i قيمة ذاتية

$$\det(A-\lambda_iI_n)=P_A(\lambda_i)=0.$$

توجد حالتين. إما: لا توجد حلول وفي هذه الحالة نقوم بإعادة ترتيب الأشعة الذاتية (e_ℓ^i) بحيث نختار $e^i_{\alpha_i}$ حتى نكون في الحالة الثانية ألا وهي عدد غير منتهي من الحلول.

لنختار حل واحد ولنضع

$$S_{\alpha_i+1}=v_{\alpha_i+1}.$$

نقوم بتعويضها في المعادلة (2) ثم نقوم بحل الجملة (2) كما فعلنا مع الجملة (1) حتى نحصل على $S_{\alpha_i+2}=v_{\alpha_i+2}$، وهكذا مع بقية المعادلات حتى نصل إلى

$$S_{n_i}=v_{n_i}$$

وبذلك نكون تحصلنا على

$$\boxed{P_i=(e^i_1,\dots,e^i_{\alpha_i},v_{\alpha_i+1},\dots,v_{n_i})}.$$