الفصل 4 : المعادلات التفاضلية العادية في الرتبة الأولى

1.1: مفاهيم أساسية

في هذا الفصل نرمز بـ "I" لمجال مفتوح (intervalle ouvert) غير خالي من $\mathbb{R}$ أي يأخذ أحد الأشكال $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$

$]a,+\infty[$ أو $]-\infty,b[$ أو $]a,b[$

حيث $a,b \in \mathbb{R}$ و $a<b$

1.1.1 تعريف المعادلة التفاضلية العادية

ونرمز لها (E.D.O) في الرتبة الأولى هي كل معادلة تحوي متغير t، والدالة المجهولة $y: I \to \mathbb{R}$ ذات المتغير t ومشتقتها الأولى بالنسبة لـ t أي $y'=\frac{dy}{dt}$ التي يمكننا كتابتها على الشكل:

$$F(t,y,y')=0$$

حيث $F: I\times\Omega_1\times\Omega_2 \to \mathbb{R}$ و Ω_1 و Ω_2 مفتوحات من $\mathbb{R}$ (غير خالية).

[تذكير: Ω مفتوح من $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\left(\forall x\in\Omega,\ \exists \alpha>0\ ]x-\alpha,x+\alpha[\subset\Omega\right)$

2.1.1 تعريف الشكل الإعتيادي

الشكل الإعتيادي للمعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الأولى هو:

$$y' = f(t,y)$$

حيث $f: I\times\Omega \to \mathbb{R}$ و Ω مفتوح من $\mathbb{R}$

1.1.1 ملاحظة

جميع المشتقات في ما يأتي ستكون بالنسبة لـ t

إذا كانت الدالة ذات عدة متغيرات إذن المعادلة التي تحتوي هذه المتغيرات وهذه الدالة المجهولة ومشتقاتها الجزئية تسمى بالمعادلة التفاضلية ذات المشتقات الجزئية ونرمز لها (E.D.P) وهي ليست موضوع دراستنا في هذه المادة.

2.1 الحل الأعظمي والكلي

ليكن $f: I\times\Omega \to \mathbb{R}$ حيث $\Omega\neq\emptyset$ مفتوح من $\mathbb{R}$ ولتكن المعادلة التفاضلية العادية في الرتبة الأولى

$$y' = f(t,y) \quad (1,1)$$

1.2.1 تعريف:

نقول أن y حل للمعادلة (1,1) على المجال J حيث $\emptyset \neq J \subset I$ ونرمز له بـ (y,J) إذا تحقق:

(i) $(t,y(t)) \in I\times\Omega,\ \forall t\in J.$

(ii) $y'(t) = f(t,y(t)),\ \forall t\in J$

مثال 01 لتكن المعادلة

$$y' = \frac{t}{y}$$

ومنه

$$f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t,y) \longmapsto f(t,y) = \frac{t}{y}.$$

إذن $I=\mathbb{R}$ مجال مفتوح من $\mathbb{R}$، و $\Omega=\mathbb{R}^*$ مفتوح من $\mathbb{R}$)

برهن أن y المعرف على $J=]-\infty,0[$ بـ $\begin{cases} y(t)=t \\ t\in J\end{cases}$

هو حل للمعادلة: $y' = \frac{t}{y}$

(i) $(t,y(t)) \in I\times\Omega = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\ \forall t\in J$?

$\forall t\in]-\infty,0[,\ (t,y(t)) = (t,\frac{t}{y}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$

(ii) $y'(t) = f(t,y(t)),\ \forall t\in J$?

y قابلة للاشتقاق على $J=\mathbb{R}^*$ ولدينا

$\forall t\in J=\mathbb{R}^*,\ y'(t)=1$

من جهة أخرى $\forall t\in J=\mathbb{R}^*,\ \frac{t}{y(t)} = \frac{t}{t} = 1$

إذن $y'(t) = \frac{t}{y(t)},\ \forall t\in J$

وهو المطلوب.

1,2,1 ملاحظات

*/ لا ننسى أبدًا الشرط (i) وإلا فإن الشرط (ii) ليس له معنى [D_f مجموعة تعريف f] (عندما تكون $(t,y(t))\in D_f$)

2/ إذا كان $\Omega=\mathbb{R}$ فإن الشرط (ن) دوما محقق.

3/ إنه لا طائل من أن نفرض أن الحل (y,J) من صنف C^1 لأنه يحقق الشرط (ننن). و $f(t,y(t))$ دالة متصلة بالنسبة لـ t

4/ كل حل للمعادلة (1,1) يتعلق بأمرين 1/ المجال $\phi \neq J\subset I$.

2°/ والدالة $y: J\longrightarrow\mathbb{R}$.

ولذلك نستعمل الرمز (y,J).

1.2.2 تعريف: تمديد الحل

ليكن (y,J) و $(\tilde{y},\tilde{J})$ حلين للمعادلة (1,1) نقول أن $(\tilde{y},\tilde{J})$ تمديد للحل (y,J) إذا تحقق 1/ $J\subset\tilde{J}$

2/ $\tilde{y}/_J=y$ (أي $\tilde{y}(t)=y(t), \forall t\in J$)

مثال 02: لنعتبر $J=]0,+\infty[$

$y'=\frac{-y}{t}$.

$\tilde{y}:\tilde{J}=]2,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$	$y:J=]3,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$
$t\longmapsto\tilde{y}(t)=t^2$	$t\longmapsto y(t)=t^2$

$(\tilde{y},\tilde{J})$ تمديد لـ (y,J).

لابد أن نبرهن أولا أن (y,J) و $(\tilde{y},\tilde{J})$ حلين

بما أن $\Omega=\mathbb{R}$ الشرط (ن) دوما محقق.

لنبرهن الشرط (ننن) $y'(t)=\frac{2y(t)}{t}, \forall t\in J$

على التوالي: $\tilde{y}'(t)=\frac{2\tilde{y}(t)}{t}, \forall t\in\tilde{J}$

$\forall t\in J,\quad y'(t)=2t$

$\forall t\in J:\quad \frac{2y(t)}{t}=\frac{2t^{2}}{t}=2t$.

ومنه $y'(t)=\frac{2y(t)}{t}, \forall t\in J$

إذن (y,J) حل للمعادلة $y'=\frac{2y}{t}$.

وبنفس الطريقة نجد $(\tilde{y},\tilde{J})$ حل للمعادلة

ثم الآن نبرهن أن $(\tilde{y},\tilde{J})$ تمديد لـ (y,J).

1/ $J=]3,+\infty[\subset]2,+\infty[=\tilde{J}$

2/ $\tilde{y}/_J=y$ ؟

$\tilde{y}(t)=t^2=y(t), \quad \forall t\in J$.

وهو المطلوب.

1.2.2 ملاحظة

كل حل (y,J) هو تمديد لنفسه.

لأن 1/ $J\subset J$

2/ $y/_J=y$.

1.2.3 تعريف: الحل الأعظمي

نقول (y,J) حل أعظمي للمعادلة (1,1). إذا لم يقبل أي تمديد $(\tilde{y},\tilde{J})$ إلا نفسه.

أو بعبارة أخرى: إذا كان y معرف على مجال J أكبر مجال ممكن نرمزله بـ J_{MAX} ويسمى بالمجال الأعظمي.

مثال 3 لتكن المعادلة $y'=-4y$.

ومنه $\Omega=I=\mathbb{R}$.

$(y,J=\mathbb{R})$ حيث $y(t)=e^{-4t}$ هو حل أعظمي للمعادلة $y'=-4y$ لأن $\mathbb{R}$ هو الحل الأعظمي.

توطئة 1.2.1: ليكن $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

1) $(y,J_1=]\alpha,+\infty[)$ حل للمعادلة (1,1) و النهاية $\lim\limits_{t\overset{>}{\to}\alpha} y(t)$ غير موجودة إذن (y,J_1) حل أعظمي.

2) $(y,J_2=]-\infty,\beta[)$ حل للمعادلة (1,1) و النهاية $\lim\limits_{t\overset{<}{\to}\beta} y(t)$ غير موجودة، إذن (y,J_2) حل أعظمي.

مثال 4: لنبرهن أن $(y, J =]-\infty, -1[)$ المعرف كمايلي $y(t) = \frac{1}{t+1}$ حل أعظمي للمعادلة $y' = -y^2$.

نبرهن أولا أنه حل للمعادلة ثم نحسب النهاية

$$\lim_{t \to -1^-} y(t) = \lim_{t \to -1^-} \frac{1}{t+1} = -\infty$$

ومنه حسب التوطئة (y, J) حل أعظمي للمعادلة $y' = -y^2$.

2.2.1 توطئة: كل حل (y, J) للمعادلة (1.1) يقبل تمديد أعظمي $(\tilde{y}, \tilde{J})$.

3.2.1 ملحوظة: في الحالة العامة التمديد الأعظمي لحل (y, J) ليس وحيد.

مثال 4: لتكن المعادلة: $y' = -2\sqrt{|y|}$

الحل (y, J) المعرف كمايلي $J =]-1, 1[$ و $y(t) = 0, \forall t \in J =]-1, 1[$.

يقبل التمديد الأعظمي $(\tilde{y}_1, \tilde{J}_1 = \mathbb{R})$

حيث: $\tilde{y}_1(t) = 0, t \in \tilde{J}_1 = \mathbb{R}$.

وكذلك التمديد الأعظمي $(\tilde{y}_2, \tilde{J}_2 = \mathbb{R})$ المعرف كمايلي:

$$\tilde{y}_2(t) = \begin{cases} -(t+2)^2 & , \forall t \in]-\infty, -2[\\ 0 & , \forall t \in [-2, 2] \\ (t-2)^2 & , \forall t \in]2, +\infty[\end{cases}$$

البرهان أن $(\tilde{y}_2, \tilde{J}_2)$ تمديد أعظمي يترك للطالب.

4.2.1 تعريف: الحل الكلي

إذا كان (y, I) حل للمعادلة (1.1) (أي: $J = I$) إذن نقول أن y حل كلي للمعادلة (1.1).

مثال 5: دالة المعدومة على $\mathbb{R}$ حل كلي للمعادلة $y' = y$.

3.2.1 توطئة: كل حل كلي هو حل أعظمي.

4.2.1 ملحوظة: يوجد بعض الحلول الأعظمية وليست كلية.

مثال 06: أنظر المثال 4: معادلة $y' = -y^2$

(y, J) حيث $J =]-\infty, -1[$ و y معرف.

$y(t) = \frac{1}{t+1}, \quad \forall t \in J =]-\infty, -1[$.

(y, J) حل أعظمي ولكن $J \neq I = \mathbb{R}$

إذن (y, J) ليس حل كلي.

3.1 وجود حل لمسألة كوشي

1.3.1: مسألة كوشي.

ليكن $t_0 \in I$ و $y_0 \in \Omega$.

1.3.1 تعريف: الشرط الابتدائي

المساواة: $y(t_0) = y_0$ تسمى الشرط الابتدائي.

2.3.1 تعريف: مسألة كوشي

المسألة التالية:

$$(3.1) \quad \begin{cases} y' = f(t, y) & (1.1) \\ y(t_0) = y_0 & (2.1) \end{cases}$$

تسمى مسألة كوشي

3.3.1 تعريف: (y, J) حل للمسألة كوشي (3.1) إذا كان (1) (y, J) حل للمعادلة (1.1). (2) يحقق (2.1) أي $y(t_0) = y_0$.

4.3.1 تعريف (y, J) حل أعظمي للمسألة (3.1) إذا كان (1) (y, J) حل أعظمي للمعادلة (1.1) (2) يحقق (2.1).

5.3.1 تعريف: (y, J) حل كلي للمسألة (3.1) إذا كان (1) (y, J) حل كلي للمعادلة (1.1) (2) يحقق (2.1).

6.3.1 تعريف (y, J) حل محلي للمسألة (3.1) إذا كان (1) (y, J) حل للمسألة (3.1).

(2) [illegible]

2.3.1 : نظرية كوشي- بيانو - أرزيلا

Cauchy - Peano - Arzela

1.2.3.1 نظرية

لنفرض أن f دالة مستمرة على $I\times\Omega$

من أجل كل $(t_0,y_0)\in I\times\Omega$ لنضع :

$$C=[t_0-T_0,\ t_0+T_0]\times[y_0-r_0,\ y_0+r_0];\quad T_0>0,\ r_0>0$$

$$M=\sup_{(t,y)\in C}|f(t,y)|,\quad T\leqslant \min\left(T_0,\frac{r_0}{M}\right)$$

مسألة كوشي (3.1) تقبل حل محلي .

$$y:[t_0-T,\ t_0+T]\longrightarrow[y_0-r_0,\ y_0+r_0]$$

1.3.1 ملاحظات:

1/ وجود T_0 و r_0 مضمونة لأن I و Ω مفتوحات .

2/ M مضمونة (لأن كل تطبيق مستمر على متراص (Compacte) C في فضاء منتهي البعد محدود ويبلغ حديه

(C محدود ومغلق فهو متراص في $\mathbb{R}^2$) .

. نختار $M>0$ (لأن f غير معدومة).

مثال 07: برهن أن مسألة كوشي التالية تقبل حل محلي على المجال $[-a,a]$

$$\begin{cases} y'=t^2+e^{-y^2} \\ y(0)=0 \end{cases} \Big/ \quad I\times\Omega=\mathbb{R}^2,\quad (t_0,y_0)=(0,0)\in\mathbb{R}^2$$

لدينا $f(t,y)=t^2+e^{-y^2}$

f دالة مستمرة على $I\times\Omega=\mathbb{R}^2$.

لتكن: $r_0>0$, $T_0>0$;

$$C=[t_0-T_0,\ t_0+T_0]\times[y_0-r_0,\ y_0+r_0] .$$

$$M=\sup_{(t,y)\in C}|f(t,y)|,\quad T\leqslant\min\left(T_0,\frac{r_0}{M}\right)$$

إذن حسب النظرية كوشي- بيانو- أرزيلا .

مسألة كوشي تقبل حل محلي .

$$y:[-T,T]\longrightarrow[y_0-r_0,\ y_0+r_0]$$

ومنه يكفي أخذ $a=T>0$.

تطبيق عددي: لنختار $T_0=\frac{1}{2}$, $r_0=1$

$$C=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\times[-1,1] .$$

$$M=\sup_{(t,y)\in C}|f(t,y)|=\sup_{(t,y)\in C}|t^2+e^{-y^2}|=\frac{1}{4}+e^{-0^2}$$

$$\boxed{M=\frac{5}{4}},\quad T\leqslant\min\left(\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{2} .$$

ومنه مسألة كوشي تقبل حل y معرف

$$y:\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\longrightarrow[-1,1] .$$

1.3.1 توطئة: إذا كانت f دالة مستمرة على $I\times\Omega$، إذن من أجل $(t_0,y_0)\in I\times\Omega$ مسألة كوشي (3.1) تقبل حل أعظمي.

البرهان: ليكن $(t_0,y_0)\in I\times\Omega$ و f دالة مستمرة على $I\times\Omega$ إذن حسب نظرية كوشي بيانو- أرزيلا (1.2.3.1) مسألة كوشي (3.1) تقبل حل محلي $(y,\ J=[t_0-T,t_0+T])$

ومنه y هو حل للمعادلة (1.1) ويحقق (2.1) أي $y(t_0)=y_0$ ومنه حسب توطئة 1.2.2 الحل (y,J) يقبل تمديد أعظمي $(\tilde{y},\tilde{J})$ ولدينا كذلك $\tilde{y}/_J=y$

إذن $\tilde{y}(t_0)=y(t_0)=y_0$ ومنه $(\tilde{y},\tilde{J})$ حل أعظمي لمسألة كوشي (3.1) .

4.1 وجود ووحدانية حل مسألة كوشي:

توجد مسائل لكوشي تقبل أكثر من حل أعظمي وأحسن مثال على ذلك .

$$\begin{cases} y'=3|y|^{\frac{2}{3}} \\ y(0)=0 \end{cases}$$

تقبل الحليين الأعظميين $(y_1, J_1=\mathbb{R})$ حيث y_1 دالة معدومة على $\mathbb{R}$ و $(y_2, J_2=\mathbb{R})$ المعرف كمايلي:

$$y(t)=t^3 \quad , \forall t\in\mathbb{R}.$$

رغم أن f مستمرة على $\mathbb{R}^2$ ومنه شرط استمرار f غير كافي من أجل وحدانية الحل لمسألة كوشي، سنرى أن الشرط اللازم هو كون f لبشيتزي محليا بالنسبة لـ y بانتظام بالنسبة لـ t.

1.4.1 الدوال اللبشيتزية بالنسبة لـ y

Fonctions Lipschitzienne par rapport à y.

تعريف 1.1.4.1:

• ليكن $C=C_1\times C_2\subset I\times\Omega$.
نقول أن f دالة لبشيتزية بالنسبة لـ y بانتظام بالنسبة لـ t على C.
إذا وجد ثابت $k>0$ بحيث:

$$\forall t\in C_1;\ \forall y_1,y_2\in C_2:$$
$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\le k|y_1-y_2|$$

• في حالة $C=I\times\Omega$ نقول أن f دالة لبشيتزية كليا بالنسبة لـ y بانتظام بالنسبة لـ t.

مثال 08: لنعتبر الدالة f المعرفة

$f(t,y)=2\sqrt{y}$. $I\times\Omega=\mathbb{R}^2$.

$C=C_1\times C_2=\mathbb{R}\times[1,+\infty[$.

إذن: من أجل $t\in\mathbb{R}$ و $y_1,y_2\in[1,+\infty[$

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)| = 2|\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}| = 2\frac{|y_1-y_2|}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}}.$$

$$\begin{cases} y_1\geq 1 \\ y_2\geq 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{y_1}\geq 1 \\ \sqrt{y_2}\geq 1\end{cases} \Rightarrow \sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}\geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}}\leq\frac{1}{2}.$$

ومنه لدينا.

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\leq k|y_1-y_2|.$$

حيث $k=1>0$ ومنه الدالة $f(t,y)=2\sqrt{y}$ لبشيتزية بالنسبة لـ y بانتظام بالنسبة لـ t على $C=\mathbb{R}\times[1,+\infty[$.

مثال 09: لنعتبر الدالة f المعرفة:

$f(t,y)=y$, $I\times\Omega=\mathbb{R}^2$.

من أجل $t\in\mathbb{R}$ و $y_1,y_2\in\mathbb{R}$.

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|=|y_1-y_2|$$

إذن f لبشيتزي كليا بالنسبة لـ y بانتظام بالنسبة لـ t.

ملاحظة 1.4.1

العبارة "بانتظام بالنسبة لـ t" في التعريف السابق نقصد بها أن k مستقلة عن t.
لنعتبر مثلا الدالة f المعرفة كمايلي.

$$f(t,y)=2t\sqrt{y}.$$

من أجل $t\in\mathbb{R}$ و $y_1,y_2\in[1,+\infty[$ ،

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|=2|t||\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}|.$$

نلاحظ $k(t)=2|t|$ لا تقبل حد أعلى في $\mathbb{R}$ في هذه الحالة الدالة f لبشيتزية بالنسبة لـ y على $C=\mathbb{R}\times[1,+\infty[$ ، ولكن ليست بانتظام بالنسبة لـ t

1.4.1.2 تعريف:

نقول أن f دالة ليبشيزية محليا بالنسبة لـ y بانتظام بالنسبة لـ t على $I\times\Omega$، إذا كان من أجل كل $(t_0,y_0)\in I\times\Omega$ يوجد $T_0, r_0>0$ بحيث يكون f ليبشيزي بالنسبة لـ y بانتظام بالنسبة لـ t على

$$C=[t_0-T_0,t_0+T_0]\times[y_0-r_0,y_0+r_0]\subset I\times\Omega$$

مثال 10: لتكن الدالة f المعرفة كمايلي:

$$f(t,y)=y^2\ ,\quad I\times\Omega=\mathbb{R}^2.$$

f ليبشيزية محليا بالنسبة لـ y بانتظام بالنسبة لـ t على $I\times\Omega$.

من أجل $(t_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ ليكن $T_0,r_0>0$

$$\forall t\in[t_0-T_0,t_0+T_0],\ y_1,y_2\in[y_0-r_0,y_0+r_0]$$

لدينا

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|=|y_1^2-y_2^2|=$$
$$=|y_1+y_2||y_1-y_2|$$
$$\leq(|y_1|+|y_2|)|y_1-y_2|$$

لدينا

$$|y_1|\leq|(y_1-y_0)+y_0|\leq|y_1-y_0|+|y_0|$$
$$|y_1|\leq r_0+|y_0|.$$

بنفس الطريقة نجد: $|y_2|\leq r_0+|y_0|$.

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\leq 2(r_0+|y_0|)|y_1-y_2|$$

يكفي أخذ $k=2(r_0+|y_0|)$.

وهو المطلوب.

1.4.1 ملاحظة: إذا كان $f\in C^1(I\times\Omega)$ إذن f ليبشيزي محليا بالنسبة لـ y بانتظام بالنسبة لـ t على $I\times\Omega$

تذكير:

$$f\in C^1(I\times\Omega)\Leftrightarrow\begin{cases}(1)\ f\in C^0(I\times\Omega)\\ (2)\ f \text{ قابل للاشتقاق على } I\times\Omega\\ \forall(t,y)\in I\times\Omega\\ df(t,y)\in C^0(I\times\Omega)\end{cases}$$

$$df(t,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

$$\left(f\in C^1(I\times\Omega)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}(1)\ \frac{\partial f}{\partial x} \text{ و } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ موجودة}\\ (2)\ \frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\in C^0(I\times\Omega)\end{cases}$$

برهان الملاحظة 1.4.1

لنفرض أن $f\in C^1(I\times\Omega)$.

ليكن $(t_0,y_0)\in I\times\Omega$ و $T_0,r_0>0$ بحيث:

$$C=[t_0-T_0,t_0+T_0]\times[y_0-r_0,y_0+r_0]\subset I\times\Omega$$

ليكن $t\in[t_0-T_0,t_0+T_0]$ و $y_1,y_2\in[y_0-r_0,y_0+r_0]$

لنطبق نظرية التزايدات المنتهية على f في المجال $[y_1,y_2]$ نجد:

$$\exists c\in]y_1,y_2[\subset[y_0-r_0,y_0+r_0]:$$
$$f(t,y_1)-f(t,y_2)=\frac{\partial f}{\partial y}(t,c)(y_1-y_2).$$

ومنه

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|=\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,c)\right||y_1-y_2|$$

بما أن $f\in C^1(I\times\Omega)$ ومنه $\frac{\partial f}{\partial y}\in C^0(I\times\Omega)$

إذن $\frac{\partial f}{\partial y}$ مستمرة على C المتراص ومنه f محدودة وتدرك حديها على C.

إذن:

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\leq\sup_{(t,y)\in C}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right||y_1-y_2|.$$

يكفي أخذ $k=\sup_{(t,y)\in C}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right|$.

وهو المطلوب.

2.4.1 نظرية كوشي - ليبشيتز

Chauchy - Lipschitz

1.2.4.1 نظرية كوشي - ليبشيتز:

لنفرض أن f دالة مستمرة وليبشيتزية بالنسبة لـ y بانتظام بالنسبة لـ t على $I\times\Omega$ إذن من أجل كل $(t_0,y_0)\in I\times\Omega$ مسألة كوشي (3.1) تقبل حل وحيد $(y, J=[t_0-T, t_0+T])$ معرف كمايلي:

$$y:[t_0-T,t_0+T]\longrightarrow[y_0-r_0,y_0+r_0]$$

حيث $T_0, r_0>0$ و $T\leq\min\{T_0,\frac{r_0}{M}\}$

وحيث f ليبشيتزية بالنسبة لـ y بانتظام بالنسبة لـ t على المعرف C

$$C=[t_0-T_0,t_0+T]\times[y_0-r_0,y_0+r_0]$$

و $$M=\sup_{(t,y)\in C}|f(t,y)|$$

البرهان: لنستعمل طريقة التقريبات المتعاقبة لبيكار Méthode d'aproximations successives de Picard.

من أجل ذلك لنعتبر متتالية الدوال (y_n) المعرفة على $[t_0-T,t_0+T]$ كمايلي:

$$\begin{cases} y_0(t)=y_0 \\ y_{n+1}(t)=y_0+\int_{t_0}^t f(u,y_n(u))du, \ \forall n\geq 0 \end{cases}$$

1/ البرهان أن (y_n) معرفة جيدًا من أجل ذلك لنبرهن بالتراجع أن:

$\forall n\in\mathbb{N}$

$y_n(t)\in[y_0-r_0,y_0+r_0], \forall t\in[t_0-T,t_0+T]$

و $y_n\in C^0([t_0-T,t_0+T])$

الشرط الابتدائي من أجل $n=0$.

$\forall t\in[t_0-T,t_0+T]$.

$y_0(t)=y_0\in[y_0-r_0,y_0+r_0]$

و $y_0\in C^0([t_0-T,t_0+T])$ (y_0 دالة ثابتة).

الشرط النهائي: لنفرض أن الخاصية محققة حتى الرتبة "n" ولنبرهن صحتها من أجل "$n+1$"

من أجل $t\in[t_0-T,t_0+T]$

$$|y_{n+1}-y_0|=\left|\int_{t_0}^t f(u,y_n(u))du\right|$$

$$|y_{n+1}-y_0|\leq\int_{t_0}^t|f(u,y_n(u))|du.$$

$u\in[t_0,t]\subset[t_0-T,t_0+T]$.

$y_n\in[y_0-r,y_0+r]$ بالتراجع.

$\Rightarrow (u,y_n(u))\in C=[t_0-T,t_0+T]\times[y_0-r,y_0+r]$

ومنه

$$|y_{n+1}-y_0|\leq M\int_{t_0}^t du=M(t-t_0).$$

$$|y_{n+1}-y_0|\leq MT\leq r_0.$$

(لأن $T\leq\min\{T_0,\frac{r_0}{M}\}\Rightarrow T\leq\frac{r_0}{M}$)

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{n+1}(t)\in[y_0-r_0,y_0+r_0] \\ \forall t\in[t_0-T,t_0+T]. \end{cases}$$

من جهة أخرى f مستمرة على $I\times\Omega$ ومنه

$f\in C^0([t_0-T,t_0+T]\times[y_0-r_0,y_0+r_0])$.

ومن التراجع $y_n\in C^0([t_0-T,t_0+T])$ ومنه الدالة $t\mapsto y_{n+1}(t)=y_0+\int_{t_0}^t f(u,y_n(u))du$ مستمرة $[t_0-T,t_0+T]$ ومنه

$y_{n+1}\in C^0([t_0-T,t_0+T])$.

2/ لنبرهن أن (y_n) متقاربة بانتظام نحو دالة المستمرة التي نرمز لها بـ y.

من أجل ذلك لنبرهن بالتراجع أن

$\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in[t_0-T,t_0+T]$.

$$|y_{n+1}(t)-y_n(t)|\leq M k^n\frac{|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!} \ ?$$

الشرط الابتدائي من أجل $n=0$:

من أجل $t\in[t_0-T,t_0+T]$.

$$|y_1(t)-y_0|=\left|\int_{t_0}^t f(u,y_0)du\right|$$

توجد حالتين أ/ $t\in[t_0,t_0+T]$ $(t\geq t_0)$

$$|y_1(t)-y_0|=\left|\int_{t_0}^t f(u,y_0)du\right|$$

$$\leq\int_{t_0}^t|f(u,y_0)|du.$$

$u \in [t_0, t] \subset [t_0-T, t_0+T]$, $(u, y_0) \in C$

إذن

$$\begin{cases} |y_1(t) - y_0| \le M(t-t_0) \\ \forall t \in [t_0, t_0+T] \end{cases} \quad (*)$$

الحالة الثانية: $t \le t_0$, $t \in [t_0-T, t_0]$

$$|y_1(t)-y_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(u,y_0)\,du\right| \le \int_t^{t_0} |f(u,y_0)|\,du$$

$u\in[t,t_0] \subset [t_0-T,t_0+T] \Rightarrow (u,y_0)\in C$

$$\begin{cases} |y_1(t)-y_0| \le M(t_0-t) \\ \forall t\in[t_0-T,t_0] \end{cases} \quad (**)$$

من (*) و (**) لدينا

$$\begin{cases} |y_1(t)-y_0| \le M|t-t_0| = Mk^0 \dfrac{|t-t_0|^{0+1}}{(0+1)!} \\ \forall t \in[t_0-T,t_0+T] \end{cases}$$

ومنه الشرط الابتدائي محقق.

<u>الشرط النهائي</u>: نفرض أن الخاصية محققة حتى الرتبة "n" ونبرهن صحتها من أجل "n+1"

* من أجل $t\in[t_0,t_0+T]$

$$|y_{n+2}(t)-y_{n+1}(t)| = \left|\int_{t_0}^t [f(u,y_{n+1}(u)) - f(u,y_n(u))]\,du\right|$$
$$\le \int_{t_0}^t |f(u,y_{n+1}(u))-f(u,y_n(u))|\,du$$

$\forall u \in [t_0,t]$, $(u,y_n(u))\in C$, $\forall n\in\mathbb{N}$ (1)

بما أن f ليبشيتزية بالنسبة لـ y على C إذن:

$$\le k\int_{t_0}^t |y_{n+1}(u)-y_n(u)|\,du$$

من الشرط التراجعي لدينا

$$\le \frac{Mk^{n+1}}{(n+1)!}\int_{t_0}^t (u-t_0)^{n+1}\,du$$

$$\le \frac{Mk^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{(t-t_0)^{n+2}}{n+2}$$

$$\begin{cases} |y_{n+2}(t)-y_{n+1}(t)| \le \dfrac{Mk^{n+1}}{(n+2)!}(t-t_0)^{n+2} \\ \forall t\in[t_0,t_0+T] \end{cases} \quad (\Delta)$$

(1) من المبرهنة رقم 1.

** من أجل $t\in[t_0-T,t_0]$.

$$|y_{n+2}(t)-y_{n+1}(t)| = \left|\int_{t_0}^t f(u,y_{n+1}(u)) - f(u,y_n(u))\,du\right|$$
$$\le \int_t^{t_0}|f(u,y_{n+1}(u))-f(u,y_n(u))|\,du$$

من المبرهنة رقم (1) لدينا

$y_n(t)\in[y_0-r_0, y_0+r_0]$, $\forall t\in[t_0-T,t_0+T]$

ومنه

$\forall u\in[t,t_0]$, $(u,y_n(u))\in C$, $\forall n\in\mathbb{N}$

f ليبشيتزية بالنسبة لـ y على C إذن.

$$\le k\int_t^{t_0}|y_{n+1}(u)-y_n(u)|\,du$$

من الشرط التراجعي لدينا

$$\le \frac{Mk^{n+1}}{(n+1)!}\int_t^{t_0}(t_0-u)^{n+1}\,du$$

$$\le \frac{Mk^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{(t_0-t)^{n+2}}{(n+2)}$$

$$\begin{cases} |y_{n+2}(t)-y_{n+1}(t)|\le \dfrac{Mk^{n+1}}{(n+2)!}(t_0-t)^{n+2} \\ \forall t\in[t_0-T,t_0] . \end{cases} \quad (\Delta\Delta)$$

من (Δ) و (ΔΔ) لدينا

$$\begin{cases} |y_{n+2}(t)-y_{n+1}(t)|\le\dfrac{Mk^{n+1}}{(n+2)!}|t-t_0|^{n+2} \\ \forall t\in[t_0-T,t_0+T] \end{cases}$$

ومنه الشرط النهائي محقق.

إذن لدينا $\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in[t_0-T,t_0+T]$.

$$|y_{n+1}(t)-y_n(t)|\le\frac{Mk^n}{(n+1)!}|t-t_0|^{n+1}$$

ومن جهة: $\forall t\in[t_0-T,t_0+T] \Leftrightarrow |t-t_0|\le T$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in[t_0-T,t_0+T]$.

$$|y_{n+1}(t)-y_n(t)|\le\frac{M}{k}\,\frac{(kT)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\|y_{n+1}-y_n\|_\infty = \sup_{t\in[t_0-T,t_0+T]}|y_{n+1}(t)-y_n(t)| \le \frac{M}{k}\,\frac{(kT)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\|y_{n+1}-y_n\|_\infty\le\frac{M}{k}\,\frac{(kT)^{n+1}}{(n+1)!} , \forall n\in\mathbb{N} \quad (\nabla)$$

فضاء الدوال المستمرة على متراص $[a,b]$ و المزود بالنظيم $\|\cdot\|_\infty$ فضاء تام.
ومنه يكفي أن نبرهن أن متتالية الدوال (y_n) كوشية. أي لنبرهن أن

$$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall p,q\in\mathbb{N}$$
$$q\geq p\geq N: \|y_q-y_p\|_\infty < \varepsilon \ ?$$

ليكن $p,q\in\mathbb{N}$ حيث $q\geq p$.

$$\|y_q-y_p\|_\infty \leq \|y_q-y_{q-1}\|_\infty+\|y_{q-1}-y_{q-2}\|_\infty+\dots+\|y_{p+1}-y_p\|_\infty$$

من العلاقة (5) لدينا

$$\|y_q-y_p\|_\infty\leq \frac{M}{k}\frac{(kT)^{p+1}}{(p+1)!}+\dots+\frac{M}{k}\frac{(kT)^{q-1}}{(q-1)!}+\frac{M}{k}\frac{(kT)^q}{q!}=\sum_{l=p+1}^{q}\frac{M}{k}\frac{(kT)^l}{l!}$$

لدينا $\|y_q-y_p\|_\infty\leq \frac{M}{k}\sum_{l=p+1}^{\infty}\frac{(kT)^l}{l!}=R_p$

R_p هو باقي سلسلة عددية متقاربة $\frac{M}{k}\sum_{l\geq0}\frac{(kT)^l}{l!}$

ومنه $\lim_{p\to+\infty} R_p=0$.

إذن $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall p\in\mathbb{N}$

$$p\geq N: |R_p|=\frac{M}{k}\sum_{l=p+1}^{\infty}\frac{(kT)^l}{l!}<\varepsilon$$

إذن $\forall \varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall p,q\in\mathbb{N}$

$$q\geq p\geq N \quad \|y_q-y_p\|_\infty\leq R_p<\varepsilon$$

ومنه متتالية الدوال (y_n) كوشية في فضاء الدوال المستمرة على متراص $[t_0-T,t_0+T]$ و المزود بالنظيم $\|\cdot\|_\infty$ التام. ومنه (y_n) متقاربة بانتظام نحو دالة مستمرة نرمز لها بـ y معرفة كما يلي:

$$y:[t_0-T,t_0+T]\to[y_0-r_0,y_0+r_0]$$

3°/ البرهان أن (y,J) حيث $J=[t_0-T,t_0+T]$ حل لمسألة كوشي. من أجل ذلك نستعمل التوطئة التالية:

1.4.1 توطئة: ليكن J مجال مفتوح من $\mathbb{R}$ و $t_0\in J$ و $y:J\to\mathbb{R}$ مستمر على J
يكون (y,J) حل مسألة كوشي (3.1) إذا وفقط إذا تحقق

1°/ $(t,y(t))\in I\times\Omega$.

2°/ $y(t)=y_0+\int_{t_0}^t f(u,y(u))du$

البرهان: أنظر حل تمرين (02) من السلسلة رقم 01

الرجوع إلى برهان 3°/ ومنه لبرهان (y,J) حل لمسألة كوشي (3.1) يكفي أن نبرهن 2°/ من توطئة لأن العلاقة (1°) من توطئة برهنت سابقا (أنظر 1°/ من البرهان).
أي لنبرهن

$$y(t)=y_0+\int_{t_0}^t f(u,y(u))du, \ \forall t\in[t_0-T,t_0+T]$$

لدينا من أجل كل $t\in[t_0-T,t_0+T]$

$$y_{n+1}(t)=y_0+\int_{t_0}^t f(u,y_n(u))du, \ \forall n\in\mathbb{N}$$

بالمرور إلى النهاية نجد:

$$y(t)=y_0+\int_{t_0}^t f(u,y(u))du$$

إذن $(y,J=[t_0-T,t_0+T])$ حل لمسألة كوشي (3.1).

4°/ لنبرهن وحدانية الحل لمسألة كوشي (3.1) على المجال $[t_0-T,t_0+T]$ في $[y_0-r_0,y_0+r_0]$، من أجل ذلك نستعمل التوطئة التالية:

1.4.2 توطئة قرونوال (Gronwall)
ليكن $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ حيث $a\leq b$ و $d\geq0$ و $\varphi\in\mathcal{C}^0([a,b])$ تحقق المتراجحة

$$\varphi(t)\leq c+d\int_a^t\varphi(u)du, \ \forall t\in[a,b]$$

ومنه $\varphi(t)\leq c\exp[d(t-a)]$

البرهان: أنظر حل التمرين (03) من سلسلة (01)

لنفرض أن $(\tilde{y}, J)$ ، $J=[t_0-T, t_0+T]$ حل آخر لمسألة كوشي (3.1) معرف كمايلي:

$$\tilde{y}: [t_0-T, t_0+T] \longrightarrow [y_0-r, y_0+r]$$

بما أن $\tilde{y}$ حل لمسألة كوشي (3.1) حسب توطئة 1.4.1 إذن فهو يحقق المعادلة التكاملية التالية

$$\begin{cases}\tilde{y}(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(u,\tilde{y}(u))\,du\\ \forall t\in[t_0-T,t_0+T].\end{cases}$$

إذن منه من أجل كل $t\in[t_0-T,t_0+T]$:

$$|y(t)-\tilde{y}(t)|=\left|\int_{t_0}^{t} [f(u,y(u))-f(u,\tilde{y}(u))]\,du\right|$$

نوجد حالتين: الحالة (1) $t\in[t_0,t_0+T]$:

$$|y(t)-\tilde{y}(t)|\le \int_{t_0}^{t} |f(u,y(u))-f(u,\tilde{y}(u))|\,du$$

بما أن f ليبشيتزية بالنسبة لـ y بانتظام بالنسبة لـ t على $C=[t_0-T,t_0+T]\times[y_0-r_0,y_0+r_0]$ إذن:

$$|y(t)-\tilde{y}(t)|\le k\int_{t_0}^{t}|y(u)-\tilde{y}(u)|\,du$$

باستعمال توطئة 2.4.1 قرونوال وذلك من أجل $a=t_0$ و $b=t_0+T$ و $c=0$ و $d=k>0$ و φ معرفة على المجال $[a,b]=[t_0,t_0+T]$ كمايلي.

$$\varphi(t)=|y(t)-\tilde{y}(t)|$$

نجد:

$$\begin{cases}|y(t)-\tilde{y}(t)|\le 0\\ \forall t\in[t_0,t_0+T].\end{cases}$$

إذن

$$\boxed{y(t)=\tilde{y}(t),\quad \forall t\in[t_0,t_0+T]}$$

الحالة (2) $t\in[t_0-T,t_0]$ بنفس الطريقة نبرهن أن

$$\boxed{y(t)=\tilde{y}(t),\quad \forall t\in[t_0-T,t_0]}.$$

ومنه

$$\boxed{y(t)=\tilde{y}(t),\quad \forall t\in[t_0-T,t_0+T]}$$

وهو المطلوب

تطبيق عددي: نبرهن أن مسألة كوشي

$$\begin{cases}y'=t^2+y^2\\ y(0)=0\end{cases} \quad\text{———} (I)$$

تقبل حل محلي وحيد معرف على المجال $[-T,T]$ حيث: T المعطاة في النظرية كوشي - ليبشيتز.

لنضع: $f(t,y)=t^2+y^2$ دالة مستمرة على $I\times\Omega=\mathbb{R}^2$ ضف إلى ذلك أنها من صنف $C^1(\mathbb{R}^2)$ ومنه فهي ليبشيتزية محليا بالنسبة لـ y بانتظام بالنسبة لـ t على $\mathbb{R}^2$. ومنه f تحقق شروط نظرية كوشي - ليبشيتز. إذن من أجل كل $(t_0,y_0)=(0,0)\in I\times\Omega=\mathbb{R}^2$.

مسألة كوشي (I) تقبل حل وحيد محلي معرف على $[t_0-T,t_0+T]=[-T,T]$ نحو $[y_0-r_0,y_0+r_0]=[-r_0,r_0]$.

ملاحظة 2.4.1:

1/ وحدانية الحل في نظرية كوشي - ليبشيتز هي على المجال $[t_0-T,t_0+T]$ فقط، تعني أن y_1 و y_2 حلين لمسألة كوشي (3.1) معرفين على نفس المجال $[t_0-T,t_0+T]$ إذن:

$$y_1(t)=y_2(t),\quad \forall t\in[t_0-T,t_0+T]$$

2/ توجد عدة طرق أخرى لبرهنة هذه النظرية نذكر منها طريقة أويلر Euler ونظرية النقطة الصامدة.

توطئة 3.4.1: ليكن f مستمرة وليبشيتزية محليا بالنسبة لـ y بانتظام بالنسبة لـ t على $I\times\Omega$، (y_1,J_1) و (y_2,J_2) حلين لمسألة كوشي (3.1) إذن:

$$y_1(t)=y_2(t),\quad \forall t\in J_1\cap J_2$$

البرهان: لدينا $t_0 \in J_1$ و $t_0 \in J_2$

ومنه $t_0 \in J_1 \cap J_2$ اذن $J_1 \cap J_2 \neq \phi$

لنعتبر المجموعة A المعرفة كما يلي:

$A=\{t \in J_1 \cap J_2 \ , \ y_1(t)=y_2(t)\}$.

يكفي أن نبرهن أن $J_1 \cap J_2 = A$.

من أجل ذلك لدينا $J_1 \cap J_2$ مترابط Connexe (لأنه مجال في $\mathbb{R}$).

لنبرهن أن A مفتوح ومغلوق في $J_1 \cap J_2$ و $A \neq \phi$ (لأن $t_0 \in A$).

1/ A مغلق في $J_1 \cap J_2$؟

لدينا $A=(y_1-y_2)^{-1}(\{0\})$.

$\{0\}$ مجموعة مغلق في $\mathbb{R}$ و y_1-y_2 مستمرة على $J_1 \cap J_2$ إذن A مغلق في $\mathbb{R}$

و $A \subset J_1 \cap J_2$ إذن A مغلق في $J_1 \cap J_2$.

2/ A مفتوح في $J_1 \cap J_2$؟

لنبرهن أنه من أجل $t_* \in A$ يوجد $\alpha > 0$ بحيث: $t_* \in]t_*-\alpha, t_*+\alpha[$.

$t_* \in A \Rightarrow t_* \in J_1 \cap J_2$ et $y_1(t_*)=y_2(t_*)=y_*$

ومنه y_1 و y_2 حلين لمسألة كوشي التالية

$$(*)-\begin{cases} y'=f(t,y) \\ y(t_*)=y_* . \end{cases}$$

ومنه يوجد $T_1, T_2 > 0$ بحيث

$[t_*-T_1, t_*+T_1] \subset J_1$, $[t_*-T_2, t_*+T_2] \subset J_2$

ولتكن T_3 المعرفة في نظرية كوشي - ليبشتز المطبقة في النقطة (t_*, y_*).

لنضع $T_* = \min\{T_1, T_2, T_3\}$

لدينا $[t_*-T_*, t_*+T_*] \subset [t_*-T_3, t_*+T_3]$

ومنه y_1 و y_2 حلين على المجال $[t_*-T_*, t_*+T_*]$ للمسألة كوشي (*) ومنه حسب وحدانية من نظرية كوشي - ليبشتز نجد:

$y_1 = y_2$ على المجال $[t_*-T_*, t_*+T_*]$

ومنه $[t_*-T, t_*+T] \subset A$ ومنه يكفي أخذ $\alpha < T_*$.

إذن $A = J_1 \cap J_2$.

ملاحظة 1.4.1: f دالة مستمرة وليبشتزية عليا بالنسبة لـ y بانتظام بالنسبة لـ t على $I \times \Omega$، إذن من أجل كل $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$ مسألة كوشي تقبل حل أعظمي وحيد.

البرهان: لنعتبر المجموعة $\mathcal{S}$ مجموعة جميع حلول المسألة كوشي (3.1)

$\mathcal{S} = \{(y, J) \ , \ y$ حل لمسألة كوشي (3.1) على $J\}$

لنضع $J_{max} = \bigcup_{(y,J) \in \mathcal{S}} J$ لدينا $t_0 \in J_{max} \subset I$

لنبرهن أن J_{max} مجال في $\mathbb{R}$.

ليكن $a, b \in J_{max}$ بحيث $a < b$ ومنه يوجد حلين (y_1, J_1) و (y_2, J_2) بحيث $a \in J_1$ و $b \in J_2$ ومنه توجد 3 حالات.

الحالة 1: $t_0 \in]a, b[$

$t_0 \in]a,b[\Rightarrow [a, t_0] \subset J_1 \ , \ [t_0, b] \subset J_2$

لأن J_1 و J_2 مجالات في $\mathbb{R}$. و $a, t_0 \in J_1$ و $b, t_0 \in J_2$، إذن.

$[a,b] = [a,t_0] \cup [t_0,b] \subset J_{max}$.

الحالة 2: $t_0 < a$

$t_0 < a \Rightarrow [a,b] \subset [t_0, b] \subset J_2 \subset J_{max}$.

الحالة 3: $t_0 \geq b$.

$t_0 \geq b \Rightarrow [a,b] \subset [a, t_0] \subset J_1 \subset J_{max}$

لنعتبر الدالة y_{max} معرفة على المجال J_{max} كما يلي:

من أجل كل $t \in J_{max}$ توجد (y, J)

حل لمسألة كوشي (1 ، 3) بحيث $t\in J$
ومنه
$y_{max}(t)=y(t)$.

• لنبرهن أن الدالة y_{max} معرف جيدا

ليكن (y_1,J_1) و (y_2,J_2) حلين لمسألة كوشي (1 ، 3) ليكن $t\in J_1\cap J_2$

بما أن $y_1(t_0)=y_2(t_0)$ ، إذن حسب التوطئة 1 . 4 . 3 ، إذن $y_1=y_2$ على المجال $J_1\cap J_2$ ومنه $y_1(t)=y_2(t)$.

• لنبرهن أن (y_{max},J_{max}) حل لمسألة كوشي (1 ، 3) :

من أجل $t\in J_{max}$ بما أن

$$J_{max}=\bigcup_{(y,J)\in\mathcal{S}} J$$

إذن يوجد (y,J) حل لمسألة كوشي (1 ، 3) بحيث: $t\in J$ ومنه

$$y'_{max}(t)=y'(t)=f(t,y(t))$$
$$=f(t,y_{max}(t)).$$

ومنه

$$\boxed{\forall t\in J_{max}:\ y'_{max}(t)=f(t,y_{max}(t))}$$

ومن جهة أخرى

$$y_{max}(t_0)=y(t_0)=y_0$$

إذن (y_{max},J_{max}) حل لمسألة كوشي (1 ، 3)

• لنبرهن أن (y_{max},J_{max}) حل أعظمي

أي أن J_{max} مجال أعظمي.

لنفرض بالخلف أن J_{max} ليس مجال أعظمي ومنه يوجد تمديد $(\tilde{y},\tilde{J})$ بحيث $J_{max}\subsetneq\tilde{J}$.

لكن من التعريف لدينا $\tilde{J}\subset J_{max}$
وهذا تناقض.

البرهان أن (y_{max},J_{max}) وحيد نترك للطالبة.

1 . 4 . 4 ملاحظة

هندسيا، الرسم البياني لحلين لا يتقاطعان وإذا تقاطعا فهما ينطبقان.

1 . 4 . 5 ملاحظة:

ليكن $(t_0,y_0)\in I\times\Omega$ ، يكفي أن يكون f مستمر ولبشيتزية بالنسبة لـ y بانتظام بالنسبة لـ t على المجموعة C معرفة $\boxed{C=[t_0-T_0,t_0+T_0]\times[y_0-r_0,y_0+r_0]\subset I\times\Omega}$ من أجل أن تقبل مسألة كوشي (1 ، 3) حل محلي وحيد معرف على المجال $[t_0-T_0,t_0+T_0]$ نحو $[y_0-r_0,y_0+r_0]$ وحل أعظمي وحيد.

1 . 4 . 6 ملاحظة

وحدانية الحل الأعظمي في اللازمة 1.4.1 تعني أنه إذا كان (y_1,J_1) و (y_2,J_2) حلين أعظميين لمسألة كوشي (1 ، 3) . إذن $J_1=J_2$ و $y_1=y_2$ على J_1 .

1 . 5 . وجود الحل الكلي

نحن نعلم أن كل حل كلي هو أعظمي والعكس ليس صحيح إذن يوجد بعض الحلول الأعظمية ولكن ليس كلها. في هذه النظرية الآتية سنرى الشروط على f حتى يكون العكس صحيح.

1 . 5 . 1 . نظرية :

ليكن f دالة مستمرة على $I\times\Omega$.
إذا وجدت الدالتين المستمرتين φ و ξ المعرفة $\varphi,\xi: I\longrightarrow\mathbb{R}_+$
بحيث :

$\forall (t,y) \in I\times\mathbb{R}.$

$|f(t,y)| \leq \xi(t) + \varphi(t)|y|.$

ومنه كل حل أعظمي لمسألة كوشي (3,1) هو حل كلي

تطبيق عددي

لنعتبر المعادلة التفاضلية

$y' = t\sqrt{t^2+y^2}\ , \quad t,y \in \mathbb{R}$

حيث $t\times y \neq 0$

لدينا

$$|f(t,y)| = |t\sqrt{t^2+y^2}| = |t|\frac{t^2+y^2}{\sqrt{t^2+y^2}}$$

$$= \frac{|t|^3}{\sqrt{t^2+y^2}} + \frac{|t|\,y^2}{\sqrt{t^2+y^2}}.$$

$$\leq \frac{|t|^3}{\sqrt{t^2}} + \frac{|t|\,y^2}{\sqrt{y^2}} = t^2 + |t||y|.$$

ومنه (1)

$$|f(t,y)| \leq t^2 + |t||y|\ , \quad \forall\, t\times y \neq 0$$

لنبرهن صحة العلاقة من أجل $t\times y = 0$

إذن توجد 3 حالات:

الحالة (1) $t=y=0$ ومنه (بتعويض في f)

$|f(0,0)| = 0$ ، $t^2 + |t||y| = 0$ | $|f(0,0)| \leq 0$

العلاقة (1) محققة من أجل $t=y=0$.

الحالة (2) $t=0$ و $y\neq 0$.

$|f(0,y)| = 0$. $t^2+|t||y| = 0.$ | $f(0,y) \leq 0$

الحالة (3) $t\neq 0$ و $y=0$

$|f(t,0)| = t|t|$

$t^2+|t||y| = t^2$

$|f(t,0)| = t|t| \leq t^2$

ومنه لدينا

$$|f(t,y)| \leq t^2 + |t||y|\ , \quad \forall (t,y) \in \mathbb{R}^2$$

لنضع $\xi(t) = t^2 \geq 0\ , \ \forall t\in\mathbb{R}$

$\varphi(t) = |t| \geq 0\ , \ \forall t \in \mathbb{R}$

إذن $|f(t,y)| \leq \xi(t) + \varphi(t)|y|$

$\forall (t,y) \in \mathbb{R}^2$

حسب نظرية 1.5.1 كل حل أعظمي لمسألة كوشي (3,1) هو حل كلي.

قضية 1.5.2

f دالة مستمرة على $I\times\mathbb{R}$ و ليبشيزية كليا بالنسبة لـ y (و ليست بالضرورة بانتظام بالنسبة لـ t) ومنه مسألة كوشي (3,1) تقبل حل كلي وحيد.

توطئة 1.5.3

إذا كانت f مستمرة على $I\times\mathbb{R}$ وليبشيزية كليا بالنسبة لـ y (وليست بالضرورة بانتظام بالنسبة لـ t) إذن f ليبشيزية محليا بالنسبة لـ y بانتظام بالنسبة لـ t.

البرهان نترك للطالب.

الرجوع إلى برهان قضية 1.5.2

حسب توطئة 1.5.3 f مستمرة على $I\times\mathbb{R}$ وليبشيزية كليا بالنسبة لـ y (وليست بالضرورة بانتظام بالنسبة لـ t) إذن f ليبشيزية محليا بالنسبة لـ y بانتظام بالنسبة لـ t ومنه مسألة كوشي (3,1) تقبل حل أعظمي وحيد نرمز له بـ y.

ومن جهة أخرى لدينا من أجل $(t,y)\in I\times\mathbb{R}$

$$|f(t,y)| \leq |f(t,0)| + |f(t,y) - f(t,0)|$$

$$\leq |f(t,0)| + k(t)\,|y-0|.$$

إذن

$\forall (t,y) \in I\times\mathbb{R}.$

$|f(t,y)| \leq \xi(t) + \varphi(t)|y|.$

بوضع $\xi(t) = |f(t,0)| \geq 0\ , \ \forall t\in I$

$\varphi(t) = k(t) \geq 0 \quad \forall t \in I$

حسب نظرية (1.5.1)، إذن كل حل أعظمي فهو حل كلي؛ إذن الحل y الأعظمي الوحيد هو حل كلي وحيد.

تطبيق : لنعتبر المعادلة $y' = a(t)\,y$

حيث a دالة من الصنف C^1 على $\mathbb{R}$.

ومنه لدينا $f(t,y) = a(t)\,y$

معرفة على $\mathbb{R}^2$.

لدينا إذن f مستمرة على $\mathbb{R}^2$.

ومن جهة أخرى من أجل $t \in \mathbb{R}$ و $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

لدينا

$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |a(t)|\,|y_1 - y_2|$.

إذن يكفي أخذ $k(t) = |a(t)| + 1$.

ومنه

$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq k(t)\,|y_1 - y_2|$

إذن f ليبشيتزية كليا بالنسبة لـ y

ومنه حسب مبرهنة 1.5.2 مسألة كوشي

$\begin{cases} y' = a(t)\,y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ تقبل حل كلي وحيد.

ملاحظة 1.5.4 :

يمكننا أن نتحصل على نتائج هذا الفصل بالنسبة لدالة f معرفة على مفتوح كيفي من $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ نحو $\mathbb{R}^n$ من أجل $n \in \mathbb{N}^*$.