TD N° 01 sur les Equations Differentielles.

Exercice N° 01 :

Determinons la solution générale des équations suivantes :

1° $x' = \dfrac{(2y+1)^2}{3y(y+2)}$ (1) $\Leftrightarrow dx = \dfrac{(2y+1)^2}{3y(y+2)} dy$ (2) $\Leftrightarrow$ éq à V.S.

$\Leftrightarrow \int dx + C = \int \dfrac{(2y+1)^2}{3y(y+2)} dy \Leftrightarrow x + C = \int \dfrac{(2y+1)^2}{3y(y+2)} dy$.

soit $I_1 = \int \dfrac{(2y+1)^2}{3y(y+2)} dy = ?$

$$\frac{(2y+1)^2}{3y(y+2)} = \frac{4y^2+4y+1}{3y^2+6y} = \frac{4}{3} + \frac{-4y+1}{3y(y+2)}$$

$$\begin{array}{r|l} 4y^2+4y+1 & 3y^2+6y \\ \cline{2-2} -4y^2-8y & \frac{4}{3} \\ \hline -4y+1 & \end{array}$$

$$\frac{-4y+1}{3y(y+2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{A}{y} + \frac{B}{y+2}\right)$$

$\Leftrightarrow -4y+1 = A(y+2) + By \Rightarrow$ si $x = 0 \Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow A = 1/2$

si $x = -2 \Rightarrow 9 = -2B \Rightarrow B = -9/2$.

D'où : $\dfrac{(2y+1)^2}{3y(y+2)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2y} - \dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{1}{y+2}\right) = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{y} - 9\dfrac{1}{y+2}\right)$

$\Rightarrow I_1 = \dfrac{1}{6}[\ln|y| - 3\ln|y+2|] = \dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{y}{(y+2)^3}\right|$

Donc : $\boxed{x + C = \dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{y}{(y+2)^3}\right|}$ qui est la Solution Générale de (1).

2° $y'\sqrt{1+x^2} = \dfrac{x}{y}\sqrt{1+y^2}$ (1) $\Leftrightarrow \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}} dy = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ (2) éq à V.S.

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\int \dfrac{2y\,dy}{\sqrt{1+y^2}} = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{2x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} + C \Rightarrow \boxed{\sqrt{1+y^2} - \sqrt{1+x^2} = C}$ S.G de (1)

3° $y'\sin x = y$ (1) $\Leftrightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{\sin x}$ (2) $\Leftrightarrow$ éq à V.S.

$\Rightarrow \int \dfrac{dy}{y} = \int \dfrac{dx}{\sin x} + C \Rightarrow \boxed{\ln|y| + \cot g\, x = C}$ S.G de (1)

4° $e^{x+y} + y' e^{-2y} = 0 \Leftrightarrow e^x e^y = -e^{-2y}\dfrac{dy}{dx} \Leftrightarrow e^x dx = -e^{-3y} dy$ (2) éq à

$\Rightarrow \int e^x dx = -\int e^{-3y} dy + C \Leftrightarrow \boxed{e^x = \dfrac{1}{3}e^{-3y} + C}$ S.G de (1)

5° $x^2(y+1)\,dx + y^2(x-1)\,dy = 0$ (1) $\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x-1} dx + \dfrac{y^2}{y+1} dy = 0$ (2) éq à V.S

$\Rightarrow \int \dfrac{x^2-1+1}{x-1} dx + \int \dfrac{y^2-1+1}{y+1} dy = C \Rightarrow \int \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} dx + \int \dfrac{\cancel{(y+1)}(y-1)}{\cancel{(y+1)}} dy$

$+ \int \dfrac{dx}{x-1} + \int \dfrac{dy}{y+1} = C \Rightarrow \dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{1}{2}y^2 - y + \ln|(x-1)(y+1)| = C$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1-1+y^2-2y+1-1+\ln[(x-1)(y+1)]^2=2C$

$\Leftrightarrow \boxed{(x+1)^2+(y-1)^2+\ln[(x-1)(y+1)]^2=K}$ $\quad / \ K=2+2C$

Exercice N°=02:

Integrons les équations suivantes:

1°= $x\,dy-y\,dx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$ (1) $\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+y^2}+y)\,dx=x\,dy$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}=\frac{\sqrt{x^2(1+y^2/x^2)}+y}{x}=\frac{\pm x\sqrt{1+(y/x)^2}+y}{x}$

$\Leftrightarrow y'=\pm\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}+\frac{y}{x}$ (2) de la forme: $y'=F(\frac{y}{x})\Rightarrow$ (2) est une eq homog.

posons $z=\frac{y}{x}\Rightarrow y=x.z\Rightarrow y'=z'x+z$

$\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow z'.x+\cancel{z}=\pm\sqrt{1+z^2}+\cancel{z}$ $\Leftrightarrow \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\pm\frac{dx}{x}$ (3) eq à v.s

$\Rightarrow \int\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\pm\ln|x|+c \Leftrightarrow \ln|z\pm\sqrt{1+z^2}|=\pm\ln|x|+C$ (4)

1^er cas: Si $x>0\Rightarrow(4)\Leftrightarrow \ln|z+\sqrt{1+z^2}|=\ln x+\ln e^c=\ln[e^c.x]$.

$\Leftrightarrow |z+\sqrt{1+z^2}|=e^c.x \Leftrightarrow z+\sqrt{1+z^2}=\pm e^c.x$

$\Leftrightarrow z+\sqrt{1+z^2}=Kx$ (5) / $K=\pm e^c$.

or $z=\frac{y}{x}\Rightarrow$ (5) $\Leftrightarrow \frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=Kx \Leftrightarrow \boxed{y+\sqrt{x^2+y^2}=Kx^2}$ (6) sol generale de (1) si $x>0$

2^ème cas: si $x<0\Rightarrow(4)\Leftrightarrow \ln|z+\sqrt{1+z^2}|=-\ln(-x)+C=+\ln[-e^c/x]$

$\Leftrightarrow |z+\sqrt{1+z^2}|=\frac{-e^c}{x}\Leftrightarrow \pm(z+\sqrt{1+z^2})=-\frac{e^c}{x}$

$\Leftrightarrow z+\sqrt{1+z^2}=\mp\frac{e^c}{x}=\frac{K}{x}$ (7) / $K=\mp e^c$

or $z=\frac{y}{x}\Rightarrow(7)\Leftrightarrow \frac{y}{\cancel{x}}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\cancel{x}}=\frac{K}{\cancel{x}}\Leftrightarrow \boxed{y+\sqrt{x^2+y^2}=K}$ (8) solution générale de (1) si $x<0$.

2°= $xy.y'-y^2=(x+y)^2$ (1) $\Leftrightarrow y'=\frac{(x+y)^2+y^2}{xy}$.

$\Leftrightarrow y'=\frac{\cancel{x^2}[(1+(y/x))^2+(y/x)^2]}{\cancel{x^2}(y/x)}\Leftrightarrow y'=\frac{(1+(y/x))^2+(y/x)^2}{(y/x)}$ (2) $\Leftrightarrow$ eq homogène

posons $z=\frac{y}{x}\Rightarrow y=z.x\Rightarrow y'=z'x+z$.

(2) $\Leftrightarrow z'x+\cancel{z}=\frac{(1+z)^2+z^2}{z}=\frac{(1+z)^2}{z}+\cancel{z}\Leftrightarrow \frac{z}{(1+z)^2}dz=\frac{dx}{x}$ (3) éq à v.s

$\Rightarrow \int\frac{z}{(1+z)^2}dz=\int\frac{dx}{x}+C$ (4)

posons $1+z=t\Rightarrow z=t-1\Rightarrow dz=dt\Rightarrow \int\frac{z}{(1+z)^2}dz=\int\frac{t-1}{t^2}dt=\ln|t|+\frac{1}{t}$

$$\Rightarrow \int \frac{z}{(1+z)^2}dz = \ln|1+z| + \frac{1}{1+z}$$

D'où (4) $\Leftrightarrow \ln|1+z| + \frac{1}{1+z} = \ln|x| + C \qquad (5)$

$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{1+z}{x}\right| + \frac{1}{1+z} = C$, or $z = \frac{y}{x} \Rightarrow (5) \Leftrightarrow \boxed{\ln\frac{|x+y|}{x^2} + \frac{x}{x+y} = C}$ SG de (1)

2°' $xyy' - y^2 = (x+y)^2 \cdot e^{-y/x} \Leftrightarrow y' = (y^2 + (x+y)^2 e^{-y/x})\frac{1}{xy}$

$\Leftrightarrow y' = \frac{\cancel{x^2}\,[(y/x)^2 + (1+y/x)^2 e^{-y/x}]}{\cancel{x^2}\,(y/x)} \Leftrightarrow y' = \frac{(y/x)^2 + (1+(y/x))^2 e^{-(y/x)}}{(y/x)} \qquad (1)$

(1) est de la forme : $y' = F(y/x) \Rightarrow$ (1) $\Leftrightarrow$ équ homogène.

posons : $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xz \Rightarrow y' = xz' + z$.

(1) $\Leftrightarrow xz' + \cancel{z} = \cancel{z} + \frac{(1+z)^2}{z}e^{-z}$

$\Leftrightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{(1+z)^2}{z}e^{-z} \Leftrightarrow \frac{z}{(1+z)^2}e^{z}\,dz = \frac{1}{x}dx$ (2) eq à V.S

sa solution est donnée par : $\int \frac{z}{(1+z)^2}e^z\,dz = \int\frac{dx}{x} + C \qquad (3)$

$\int\frac{z}{(1+z)^2}e^z\,dz = ?$ posons $1+z = t \Rightarrow dt = dz$

d'où $\int\frac{z\,e^z}{(1+z)^2}dz = \int\frac{t-1}{t^2}\cdot e^{t-1}dt = \int\frac{1}{t}e^{t-1}dt - \int\frac{1}{t^2}e^{t-1}dt$

$\int\frac{1}{t}e^{t-1}dt = ?$ posons $\begin{cases} u = t^{-1} \Rightarrow du = -t^{-2}dt \\ dv = e^{t-1}dt \Rightarrow v = e^{t-1}\end{cases}$

$\Rightarrow \int\frac{1}{t}e^{t-1}dt = t^{-1}e^{t-1} + \int t^{-2}e^{t-1}dt \Rightarrow \int\frac{t-1}{t^2}e^{t-1}dt = \frac{e^{t-1}}{t} + \cancel{\int\frac{e^{t-1}}{t^2}dt} - \cancel{\int\frac{e^{t-1}}{t^2}}$

(3) $\Leftrightarrow \frac{e^{t-1}}{t} = \ln|x| + C \quad (4)$ or $t = 1+z \Rightarrow (4) \Leftrightarrow \frac{e^z}{1+z} = \ln|x| + C \quad (5)$

or $z = \frac{y}{x} \Rightarrow (5) \Leftrightarrow \boxed{\frac{x}{x+y}e^{y/x} - \ln|x| = C}$ SG de (1).

2°'' $y' = -\frac{xy}{x^2-y^2} \Leftrightarrow y' = -\frac{\cancel{x^2}(y/x)}{\cancel{x^2}(1-(y/x)^2)} = \frac{-(y/x)}{1-(y/x)^2}$

$\Leftrightarrow y' = \frac{(y/x)}{(y/x)^2-1}$ (1) eq hom , posons $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = z'x + z$

(1) $\Leftrightarrow z'x + z = \frac{z}{z^2-1} \Leftrightarrow z'.x = \frac{z}{z^2-1} - z = \frac{\cancel{z} - z^3 + \cancel{z}}{z^2-1}$

$\Leftrightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{z^3}{1-z^2} \Leftrightarrow \frac{1-z^2}{z^3}.dz = \frac{dx}{x}$ (2) eq à V.S

$\int\frac{dz}{z^3} - \int\frac{dz}{z} = \int\frac{dx}{x} + C \Leftrightarrow (-\frac{1}{2}z^{-2} - \ln|z.x| = C).-2$

$\frac{1}{z^2} + \ln(z.x)^2 = C_1 \;/\; C_1 = -2C$ or $z = \frac{y}{x}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{y^2} + \ln y^2 = C_1}$ S.G de (1).

$3°= \ (x+2y+1)\,dx - (2x-3)\,dy = 0 \iff (2x-3)\,dy = (x+2y+1)\,dx$

$\iff \frac{dy}{dx} = y' = \frac{x+2y+1}{2x-3}$ (1) de la forme: $y' = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$ avec $c, c_1 \neq 0$

Donc (1) est une eq diff se ramenant aux eq diff homogène.

$y' = \frac{x+2y+1}{2x-3}$ (1)

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0-4 = -4 \neq 0 \Rightarrow$ On pose: $\begin{cases} x = x_1 + h \\ y = y_1 + k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dx_1 \\ dy = dy_1 \end{cases} \Rightarrow y' = y'_1$

(1) $\iff y'_1 = \frac{x_1+2y_1+h+2k+1}{2x_1+2h-3}$ (2)

pour que (2) se ramene à une équat hom on doit chercher h et k /

$\begin{cases} h+2k+1=0 & \Rightarrow 2k = -1-h = -1-\frac{3}{2} = \frac{-5}{2} \Rightarrow k = \frac{-5}{4} \\ 2h-3=0 & \Rightarrow h = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \frac{3}{2} \\ k = -\frac{5}{4} \end{cases}$

(2) $\iff y'_1 = \frac{x_1+2y_1}{2x_1} \Rightarrow y'_1 = \frac{1}{2} + \frac{y_1}{x_1}$ (3) eq hom.

posons $z_1 = \frac{y_1}{x_1} \Rightarrow y'_1 = x_1z'_1 + z_1 \Rightarrow$ (3) $\iff x_1z'_1 + \cancel{z_1} = \frac{1}{2} + \cancel{z_1}$

$\iff \frac{dz_1}{dx_1} = \frac{1}{2x_1} \iff 2\,dz_1 = \frac{dx_1}{x_1}$ (4) eq à V.S

$2\int dz_1 = \int \frac{dx_1}{x_1} + c \Rightarrow 2z_1 = \ln|x_1| + C$. (5) or $z_1 = \frac{y_1}{x_1}$ et $\begin{cases} x_1 = x - \frac{3}{2} \\ y_1 = y + \frac{5}{4} \end{cases}$

$\boxed{2 \cdot \frac{y+5/4}{x-3/2} = \ln\left|x-\frac{3}{2}\right| + c}$ SG de (1).

$4°= (x-2\sin y+3)\,dx + (2x-4\sin y-3)\cos y\,dy = 0$ (1)

posons $\sin y = u \Rightarrow du = \cos y\,dy$

(1) $\iff (x-2u+3)\,dx + (2x-4u-3)\,du = 0$

$\iff (2x-4u-3)\,du = (-x+2u-3)\,dx \iff u' = \frac{du}{dx} = \frac{(-x+2u)-3}{-2(-x+2u)-3}$ (2)

posons $z = -x+2u \Rightarrow z' = -1+2u' \Rightarrow u' = \frac{1+z'}{2}$ (C'est le cas où $\Delta = 0$)

(2) $\iff \frac{1+z'}{2} = \frac{z-3}{-2z-3} \iff 1+z' = \frac{2z-6}{-2z-3} \iff z' = \frac{2z-6}{-2z-3} - 1$

$\iff z' = \frac{2z-6+2z+3}{-2z-3} = \frac{4z-3}{-2z-3} = -\frac{4z-3}{2z+3} = \frac{dz}{dx}$

$\iff \frac{2z+3}{4z-3}\,dz = -dx \iff$ eq à V.S.

$\Rightarrow \int \frac{2z+3}{4z-3}\,dz = -x+C \iff \frac{1}{2}\int \frac{4z-3+3+6}{4z-3}\,dz = -x+C$

$\iff \frac{1}{2}\int dz + \frac{9}{2\cdot 4}\int \frac{4dz}{4z-3} = -x+C \Rightarrow \frac{1}{2}z + \frac{9}{8}\ln|4z-3| + x = C$

or $z = -x+2u = -x+2\sin y \Rightarrow -\frac{1}{2}x + \sin y + \frac{9}{8}\ln|-4x+8\sin y-3| + x = C$

$\iff \boxed{x + 2\sin x + \frac{9}{4}\ln|-4x+8\sin y-3| = C_1}$ / $C_1 = 2C$

$2^{ème}$ cas : Si $\Delta = 0$:

Alors : $a.b_1 - b\,a_1 = 0$, d'où $a.b_1 = b.a_1 \Rightarrow \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda \Rightarrow a_1 = \lambda.a$ et $b_1 = \lambda.b$.

(1) $\Leftrightarrow y' = \frac{(ax+by)+C}{\lambda(ax+by)+C_1}$ (2) , posons : $z = ax+by \Rightarrow z' = a+by' \Rightarrow y' = \frac{1}{b}z' - \frac{a}{b}$.

d'où :

(2) $\Leftrightarrow \frac{1}{b}(z'-a) = \frac{z+c}{\lambda z+C_1} \Leftrightarrow z'-a = \frac{bz+b.c}{\lambda z+C_1} \Leftrightarrow z' = \frac{bz+bc+\lambda az+a.C_1}{\lambda z+C_1}$

$\Leftrightarrow z' = \frac{(b+\lambda a).z+bc+a.C_1}{\lambda z+C_1} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\lambda z+C_1}{(b+\lambda a)z+bc+a.C_1}\,dz = dx}$ (3) $\Leftrightarrow$ equat diff à V.S.

On calcule sa solution generale : $\phi_2(z, x, C) = 0$ (4) dans laquelle on remplace z par $ax+by$ pour obtenir la solution generale de (1) donnée par :

$\boxed{\phi_3(x, y, K) = 0}$ (5).

Exercice N° 02 :

1 = $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$ (1) $\Leftrightarrow y' = \frac{2(y/x)}{1-(y/x)^2}$ (1) qui est une equation homogène.

posons : $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = z'x + z$.

(1) $\Leftrightarrow z'x + z = \frac{2z}{1-z^2} \Leftrightarrow z'.x = \frac{2z}{1-z^2} - z = \frac{2z-z+z^3}{1-z^2} = \frac{z+z^3}{1-z^2}$

d'où : $z'x = \frac{z(1+z^2)}{1-z^2}$ (2)

* Si $\frac{z(1+z^2)}{1-z^2} \neq 0$:

Alors : (2) $\Leftrightarrow \frac{1-z^2}{z(1+z^2)}\,dz = \frac{dx}{x}$ (3) equat à V.S sa solution est donnée par

$\int \frac{1-z^2}{z(1+z^2)}\,dz = \int \frac{dx}{x} + C$ (4)

$\Rightarrow \int \frac{1}{z(1+z^2)}\,dz - \int \frac{z}{1+z^2}\,dz = \ln|x| + C$. (5)

$\frac{1}{z(1+z^2)} = \frac{A}{z} + \frac{Bz+C}{1+z^2} \Leftrightarrow 1 = A + Az^2 + Bz^2 + Cz \Leftrightarrow 1 = (A+B)z^2 + Cz + A \Rightarrow$ $\underline{C=0}$; $\underline{A=1}$ et $\underline{B=-1}$

5) $\Leftrightarrow \int \frac{1}{z}dz - \int \frac{z}{1+z^2}dz - \int \frac{z}{1+z^2}dz = \ln[K|x|]$ / $K = e^C$.

$\Rightarrow \ln|z| - \ln(1+z^2) = \ln[K|x|]$. $\Leftrightarrow \ln\frac{|z|}{(1+z^2)} = \ln[K|x|]$

$\Leftrightarrow z = K_1(1+z^2)x$ (6) / $K_1 = \pm K$. , or $z = \frac{y}{x} \Rightarrow$ (6) $\Leftrightarrow y = K_1\left(\frac{x^2+y^2}{\cancel{x^2}}\right)\cdot \cancel{x}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{y}{x^2+y^2} = K_1}$ (7) qui est la solution générale de (1).

2° = $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$ (1) $\Leftrightarrow x\,dy = (\sqrt{x^2+y^2} + y)\,dx$

$\Leftrightarrow y' = \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \left(\frac{y}{x}\right)$. (1) $\Leftrightarrow$ equat diff homogène.

posons : $\frac{y}{x} = z$ d'où : $y' = z'x + z$.

$(1) \Leftrightarrow z'x + \cancel{z} = \sqrt{1+z^2} + \cancel{z} \Leftrightarrow z'x = \sqrt{1+z^2}$ (2)

* **Si** $\sqrt{1+z^2} \neq 0$:

Alors : (2) $\Leftrightarrow \dfrac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \dfrac{dx}{x}$ (3) equat diff à v.s, sa solution générale est donnée par : $\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{dx}{x} + C$ (4) $\Leftrightarrow \ln\left|z+\sqrt{1+z^2}\right| = \ln[K|x|]$ / $K = e^C$

$\Leftrightarrow z + \sqrt{1+z^2} = K_1 . x$ / $K_1 = \pm K$. (5) or $z = \dfrac{y}{x}$

(5) $\Leftrightarrow \dfrac{y}{x} + \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x^2}} = K_1 . x \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2} = K_1}$ (6) qui est la sol géne de (1).

3° = $x.y.y' - y^2 = (x+y)^2 . e^{-y/x}$ (1) $\Leftrightarrow y' = \dfrac{(x+y)^2 . e^{-y/x} + y^2}{x.y}$

$\Leftrightarrow y' = \dfrac{[1+(y/x)]^2 e^{-y/x} + (y/x)^2}{(y/x)}$ (1) $\Leftrightarrow$ equat diff homogène.

posons : $z = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y' = z'.x + z$.

$\Leftrightarrow z'x + z = \dfrac{(1+z)^2 e^{-z} + z^2}{z} \Leftrightarrow z'x = \dfrac{(1+z)^2 e^{-z} + \cancel{z^2} - \cancel{z^2}}{z} \Leftrightarrow z'.x = \dfrac{(1+z)^2 e^{-z}}{z}$ (2).

* **Si** $\dfrac{(1+z)^2 e^{-z}}{z} \neq 0$.

Alors : (2) $\Leftrightarrow \dfrac{z}{(1+z)^2} e^{z} dz = \dfrac{dx}{x}$ (3) equat à v.s, sa sol gén est donnée par :

$\displaystyle\int \frac{z}{(1+z)^2} e^{z} dz = \int \frac{dx}{x} + C$ (4)

$I_1 = \displaystyle\int \frac{z\, e^{z}}{(1+z)^2} dz = ?$ soit $1+z = t \Rightarrow z = t-1$ et $dz = dt$

$I_1 = \displaystyle\int \frac{t-1}{t^2} e^{t-1} dt = \int \frac{1}{t} e^{t-1} dt - \int \frac{1}{t^2} e^{t-1} dt$

$I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{t} e^{t-1} dt = ?$ posons : $\begin{cases} u = t^{-1} \Rightarrow du = -t^{-2} dt \\ dv = e^{t-1} dt \Rightarrow v = e^{t-1}. \end{cases}$

$I_2 = t^{-1} . e^{t-1} + \displaystyle\int t^{-2} e^{t-1} dt \Rightarrow I_1 = \frac{e^{t-1}}{t} + \cancel{\int \frac{1}{t^2} e^{t-1} dt} - \cancel{\int \frac{1}{t^2} e^{t-1} dt} = \frac{e^{t-1}}{t}$.

(4) $\Leftrightarrow \dfrac{e^{t-1}}{t} = \ln|x| + C$ (5) or $t = 1+z \Rightarrow$ (5) $\Leftrightarrow \dfrac{e^{z}}{1+z} = \ln|x| + C$. (6)

or $z = \dfrac{y}{x} \Rightarrow$ (6) $\Leftrightarrow \boxed{\dfrac{x}{x+y} . e^{y/x} - \ln|x| = C}$ (7), qui est la sol gén de (1).

Remarque :

Normalement, dans chacun des exemples precedents (equat diff homogenes) on doit etudi[illegible] les cas où : $F(z) - z = 0$ càd s'ils existent des solutions singulières ou partic[illegible]as, ou [illegible] n'existe pas de solutions singulières. le cas est ignoré par certains livres.

Khé[illegible] [illegible] : TD : 01_06_ BH

$1°$ = * **Si** : $\frac{z(1+z^2)}{1-z^2}=0 \Leftrightarrow z(1+z^2)=0 \Leftrightarrow z_1=0$ d'ou $y_1=z_1x=0$

$\boxed{y_1=0}$ (8)

(8) dans (7) $\Leftrightarrow K_1=0$ (puisque $x\neq 0 \Rightarrow K_1=\frac{0}{x^2+0}=0=$ cste)

d'ou $y_1=0$ est une solution particuliere. de (1).

Dans ce cas, l'equat (1) ne possede pas de solutions singulières, et une infinité de solutions particulières, entre autres $y_1=0$.

$2°$ = * **Si** $\sqrt{1+z^2}=0 \Rightarrow 1+z^2=0 \Rightarrow z^2=-1$, jamais $\Rightarrow$ pour cet exemple il n'existe pas de solutions singulières, mais une infinité de solutions particulières

$3°$ = * **Si** $\frac{(1+z)^2 e^{-z}}{z}=0 \Rightarrow (1+z)^2 e^{-z}=0 \Rightarrow (1+z)^2=0 \Rightarrow 1+z=0 \Rightarrow z_1=-1$.

alors $y_1=z_1.x=-x \Rightarrow \boxed{y_1=-x}$ (8)

La solution generale (7) $\nexists$ pour $y_1=-x$: $\frac{x}{0}.e^{-1}-\ln|x|=c \Rightarrow$ pas de solution singulière, mais une infinité de solutions particulières (Pour qu'il y ait des sol singulières, il faut obtenir : $K=K(x)$, en remplaçant y_1 dans (7)).

$4°$ = $y'=\frac{x+y-3}{x-y-1}$. (1) equat diff se ramenant aux equ diff homog.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1-1=-2\neq 0 \Rightarrow \text{posons: } \begin{cases}x=x_1+h\\ y=y_1+k\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}dx=dx_1\\ dy=dy_1\end{cases}$$

$$(1)\Leftrightarrow y_1'=\frac{x_1+y_1+(h+k-3)}{x_1-y_1+(h-k-1)} \quad (2)$$

, pour rendre (2) homogène

soit : $\begin{cases}h+k-3=0\\ h-k-1=0\end{cases}$

$2h-4=0 \Rightarrow \underline{h=2}$

$2k-2=0 \Rightarrow \underline{k=1}$.

$\Rightarrow \begin{cases}x_1=x-2\\ y_1=y-1\end{cases}$ (3)

$$(2)\Leftrightarrow y_1'=\frac{x_1+y_1}{x_1-y_1} \Rightarrow y_1'=\frac{1+(y_1/x_1)}{1-(y_1/x_1)}.$$

(4) $\Leftrightarrow$ equat diff homogène.

posons : $z_1 = \frac{y_1}{x_1} \Rightarrow y_1 = z_1' x_1 + z_1$.

(4) $\Leftrightarrow z_1' \cdot x_1 + z_1 = \frac{1+z_1}{1-z_1} \Rightarrow z_1' \cdot x_1 = \frac{1+\cancel{z_1}-\cancel{z_1}+z_1^2}{1-z_1} = \frac{1+z^2}{1-z_1}$ soit $\frac{1+z_1^2}{1-z_1} \neq 0$

$\Rightarrow \frac{1-z_1}{1+z_1^2} dz_1 = \frac{dx_1}{x_1}$ (5) equ à V.S, sa solution est donnée par:

$\int \frac{1-z_1}{1+z_1^2} dz_1 = \int \frac{dx_1}{x_1} + C$ (6):

$I_1 = \int \frac{1-z_1}{1+z_1^2} dz = \int \frac{dz_1}{1+z_1^2} - \frac{1}{2} \int \frac{2z_1 dz_1}{1+z_1^2} = \text{arctg}\, z_1 - \frac{1}{2} \ln(1+z_1^2)$.

(6) $\Leftrightarrow \text{arctg}\, z_1 - \frac{1}{2} \ln(1+z_1^2) - \ln|x_1| = C$

$\Leftrightarrow 2\text{arctg}\, z_1 - \ln[(1+z_1^2)x_1^2] = C_1$ / $C_1 = 2C$. (7).

or $z_1 = \frac{y_1}{x_1} \Rightarrow$ (7) $\Leftrightarrow 2\text{arctg} \frac{y_1}{x_1} - \ln[(1+\frac{y_1^2}{x_1^2}) \cdot x_1^2] = C_1$

$\Leftrightarrow 2\text{arctg} \frac{y_1}{x_1} - \ln(x_1^2 + y_1^2) = C_1$ (8)

3) dans (8) $\Leftrightarrow$ $\boxed{2\,\text{arctg}(\frac{y-1}{x-2}) - \ln[(x-2)^2 + (y-1)^2] = C_1}$

5° = $(x+2y+1)\,dx - (2x+4y+3)\,dy = 0$ (1).

$\Leftrightarrow (2x+2y+3)\,dy = (x+4y+1)\,dx$

$\Leftrightarrow y' = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3}$ (1) equ se ramenant aux equ diff homogène.

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

(1) $\Leftrightarrow y' = \frac{(x+2y)+1}{2(x+2y)+3}$ (2) soit $z = x+2y \Rightarrow z' = 1+2y' \Rightarrow y' = \frac{1}{2}(z'-1)$

(2) $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(z'-1) = \frac{z+1}{2z+3} \Rightarrow z'-1 = \frac{2z+2}{2z+3} \Rightarrow z' = \frac{2z+2+2z+3}{2z+3} = \frac{4z+5}{2z+3}$

$\Leftrightarrow \frac{2z+3}{4z+5} dz = dx$ (3) equ à V.S dont la solution est donneé par:

$\int \frac{2z+3}{4z+5} dz = \int dx + C$ (4)

$I_1 = \int \frac{2z+3}{4z+5} dz = \int \frac{2z}{4z+5} dz + 3 \int \frac{1}{4z+5} dz = \frac{1}{2} \int \frac{4z+5-5}{4z+5} dz + 3 \int \frac{1}{4z+5} dz$

$I_1 = \frac{1}{2} \int dz - \frac{5}{2} \int \frac{dz}{4z+5} + 3 \int \frac{dz}{4z+5} = \frac{1}{2} z + \frac{1}{8} \ln|4z+5|$

(4) $\Leftrightarrow \frac{1}{2} z + \frac{1}{8} \ln|4z+5| = x + C \Leftrightarrow 4z + \ln|4z+5| = 8x + K$ / $K = 8C$.

or : $z = x+2y \Rightarrow 4x + 8y + \ln|4x+8y+5| = 8x + K$.

$\Leftrightarrow \boxed{8y - 4x + \ln|4x+8y+5| = K}$

Exercice N°=04 :

3°= $2\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} + x^3\cos y = 0 \iff x' - \frac{1}{2y} \cdot x = (-\frac{1}{2}\cos y) . x^3$ (1) equ de Ber. ($\alpha=3$)

$(1)/_{x^3} \iff x'.x^{-3} - \frac{1}{2y} \cdot x^{-2} = -\frac{1}{2}\cos y.$ (2)

posons: $z = x^{-2} \Rightarrow z' = -2x^{-3}x' \Rightarrow x'x^{-3} = -\frac{1}{2}z'$

$(2) \iff -\frac{1}{2}z' - \frac{1}{2y}z = -\frac{1}{2}\cos y.$ (3)

$(3) . -\frac{1}{2} \iff z' + \frac{1}{y}z = \cos y$ (3) equ lin $\Rightarrow z(y) = e^{-\int\frac{dy}{y}}[C + \int \cos y . e^{\int\frac{dy}{y}}dy]$

$z(y) = \frac{1}{y}[C + \int y\cos y\, dy]$ or $\int y\cos y\, dy = y\sin y + \cos y$

d'ou $z(y) = \frac{1}{y}(C + y\sin y + \cos y) = x^{-2} = \frac{1}{x^2} \iff \boxed{x^2(C + y\sin y + \cos y) = y}$

NB: ∀ la valeur de $y \neq 0$, càd $|y| = \pm y$, on aboutit au meme resultat.

$7° = y' + 1 = 4e^{-y}.\sin x$ (1).

liberons le second membre de (1) de e^{-y} $\Rightarrow (1)/_{e^{-y}} \iff y'.e^{y} + e^{y} = 4\sin x$ (2)

posons $e^y = z$ pour rendre (2) linéaire $\Rightarrow z' = y'e^y$

d'ou (2) $\iff z' + z = 4\sin x$ (3) qui est une equ lineaire de la forme: $z' + P(x).z = Q(x)$

tq: $P(x) = 1$ et $Q(x) = 4\sin x$. sa solution est donnée par: $z(x) = e^{-\int P(x)dx}[C + \int Q(x).e^{\int P(x)dx}dx]$

$\Rightarrow z(x) = e^{-\int dx}[C + 4\int \sin x . e^{\int dx}dx] = e^{-x}[C + 4\int \sin x . e^x dx]$

$\int \sin x . e^x . dx = ?$ $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x\, dx$ et $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$.

$\int \sin x . e^x . dx = \sin x . e^x - \int \cos x . e^x . dx$

$\int \cos x . e^x . dx = ?$ $u_1 = \cos x \Rightarrow du_1 = -\sin x\, dx$ et $dv_1 = e^x dx \Rightarrow v_1 = e^x$.

$\int \cos x . e^x . dx = \cos x . e^x + \int \sin x . e^x . dx$ $\Rightarrow \int \sin x\, e^x dx = \sin x\, e^x - \cos x . e^x - \int \sin x\, e^x dx$

d'ou: $2\int \sin x\, e^x dx = (\sin x - \cos x)e^x \Rightarrow \int \sin x . e^x . dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$.

donc: $z(x) = e^{-x}[C + 4.\frac{1}{2}.e^x.(\sin x - \cos x)] = C\,e^{-x} + 2(\sin x - \cos x)$

or $z = e^y \Rightarrow$ la solution générale de (1) est donnée par:

$\boxed{e^y = C.e^{-x} + 2(\sin x - \cos x)}$ ou encore $\boxed{y = \ln[C e^{-x} + 2(\sin x - \cos x)].}$

$j° = y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$ (1) de la forme $y' + P(x)y = Q(x).y^{\alpha}$

avec $P(x) = +1$, $Q(x) = \cos x - \sin x$ et $\alpha = 2 \neq 0$ et $\neq 1$ $\Rightarrow$ (1) est une equation de Bernoulli

$(1)/y^2 \Leftrightarrow y' \cdot y^{-2} + y^{-1} = \cos x - \sin x$ (2)

posons $y^{-1} = z \Rightarrow +y^{-2} \cdot y' = -z' \Rightarrow (2) \Leftrightarrow -z' + z = \cos x - \sin x$

$\Leftrightarrow z' - z = \sin x - \cos x$ (3) qui est une equation linéaire dont la solution est donnée par: $z(x) = e^{+\int dx} [C + \int (\sin x - \cos x) e^{-\int dx} dx]$

$z(x) = e^{+x} [C + \int \sin x \, e^{-x} dx - \int \cos x \, e^{-x} dx]$

$\int \sin x . e^{-x} dx = ?$ $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x \, dx$ et $dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x}$

$\Rightarrow \int \sin . e^{-x} dx = -\sin x \, e^{-x} + \int \cos x . e^{-x} dx$

et $z(x) = e^{x} [C - \sin x . e^{-x} + \int \cancel{\cos x} . e^{-x} dx - \int \cancel{\cos x} . e^{-x} dx] . = e^{x} [C - \sin x . e^{-x}] = C . e^{x} - \sin x$

la solution générale est donc $z(x) = \boxed{\frac{1}{y} = C e^{x} - \sin x}$ ou encore: $\boxed{y = \frac{1}{C . e^{x} - \sin x}}$.

5. $y' - y = x . y^3$ (1) de la forme: $y' + P(x) y = Q(x) . y^{\alpha}$ avec $P(x) = -1, Q(x) = x$ et $\alpha = 3$

donc (1) est une equation de Bernoulli.

$(1)/y^3 \Leftrightarrow y' \cdot y^{-3} - y^{-2} = x$ (2) ; posons $z = y^{-2} \Rightarrow z' = -2 y^{-3} y' \Rightarrow y' y^{-3} = -\frac{1}{2} z'$

$(2) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} z' - z = x \Leftrightarrow z' + 2z = -2x$ (3) qui est une equ linéaire dont la solution est donnée par: $z(x) = e^{-2\int dx} [C + \int -2x \, e^{2\int dx} dx] = e^{-2x} [C - 2 \int x e^{2x} dx]$

$u = x \Rightarrow du = dx$ et $dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} \Rightarrow \int x e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$

d'où: $z(x) = e^{-2x} [C - x e^{2x} + \frac{1}{2} e^{2x}] = C . e^{-2x} - x + \frac{1}{2} . = \frac{2C e^{-2x} - 2x + 1}{2}$ or $z = y^{-2}$

donc la sol gener de (1) est donnée par: $\boxed{\frac{1}{y^2} = \frac{2C e^{-2x} - 2x + 1}{2}}$.

ou encore par: $\boxed{y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2C e^{-2x} - 2x + 1}}}$.

6. $y' + 2xy = 4x$ (1) de la forme $y' + P(x) y = Q(x)$ tq: $P(x) = 2x$ et $Q(x) = 4x$.

$y(x) = e^{-2\int x dx} [C + \int 4x \, e^{2\int x dx} dx] = e^{-x^2} [C + 4 \int x \, e^{x^2} dx] = e^{-x^2} [C + 2 \int e^{x^2} (2x dx)]$

$y(x) = e^{-x^2} [C + 2 e^{x^2}] = C e^{-x^2} + 2 \Rightarrow \boxed{y(x) = C e^{-x^2} + 2}$ est la sol générale de l'equ (1)

7. $y' \sin y = \cos y (1 - x \cos y)$ (1)

$\Leftrightarrow \frac{\sin y \, dy}{dx} = \cos y - x \cos^2 y \Leftrightarrow -\frac{\sin y \, dy}{dx} + \cos y = x . \cos^2 y$. (2)

si on pose: $u = \cos y . \Rightarrow du = -\sin y \, dy$.

$(1)/y^2 \Leftrightarrow y' \cdot y^{-2} + y^{-1} = \cos x - \sin x$ (2)

posons $y^{-1} = z \Rightarrow + y^{-2} \cdot y' = -z'$ $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow -z' + z = \cos x - \sin x$

$\Leftrightarrow z' - z = \sin x - \cos x$ (3) qui est une equation linéaire dont la solution est donnée

par: $z(x) = e^{+\int dx} [C + \int (\sin x - \cos x) e^{-\int dx} dx]$

$z(x) = e^{+x} [C + \int \sin x \, e^{-x} dx - \int \cos x \, e^{-x} dx]$

$\int \sin x . e^{-x} dx = ?$ $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x \, dx$ et $dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x}$

$\Rightarrow \int \sin . e^{-x} dx = -\sin x \, e^{-x} + \int \cos x . e^{-x} dx$

et $z(x) = e^{x} [C - \sin x . e^{-x} + \int \cancel{\cos x} . e^{-x} dx - \int \cancel{\cos x} . e^{-x} dx] . = e^{x} [C - \sin x . e^{-x}] = C . e^{-x} - \sin x$

la solution générale est donc $z(x) = \boxed{\frac{1}{y} = C e^{x} - \sin x}$ ou encore: $\boxed{y = \frac{1}{C . e^{x} - \sin x}}$.

5: $y' - y = x . y^3$ (1) de la forme: $y' + P(x) y = Q(x) . y^{\alpha}$ avec $P(x) = -1$, $Q(x) = x$ et $\alpha = 3$

donc (1) est une equation de Bernoulli.

$(1)/y^3 \Leftrightarrow y' . y^{-3} - y^{-2} = x$ (2) ; posons $z = y^{-2} \Rightarrow z' = -2 y^{-3} y' \Rightarrow y' y^{-3} = -\frac{1}{2} z'$

(2) $\Leftrightarrow -\frac{1}{2} z' - z = x \Leftrightarrow z' + 2z = -2x$ (3) qui est une equ linéaire dont la solution

est donnée par: $z(x) = e^{-2\int dx} [C + \int -2x \, e^{2\int dx} dx] = e^{-2x} [C - 2 \int x e^{2x} dx]$

$u = x \Rightarrow du = dx$ et $dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} \Rightarrow \int x e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$

d'où: $z(x) = e^{-2x} [C - x e^{2x} + \frac{1}{2} e^{2x}] = C . e^{-2x} - x + \frac{1}{2} . = \frac{2C e^{-2x} - 2x + 1}{2}$ or $z = y^{-2}$

donc la sol gener de (1) est donnée par: $\boxed{\frac{1}{y^2} = \frac{2C e^{-2x} - 2x + 1}{2}}$.

ou encore par: $\boxed{y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2C e^{-2x} - 2x + 1}}}$.

6: $y' + 2xy = 4x$ (1) de la forme $y' + P(x) y = Q(x)$ tq: $P(x) = 2x$ et $Q(x) = 4x$.

$y(x) = e^{-2\int x dx} [C + \int 4x \, e^{2\int x dx} dx] = e^{-x^2} [C + 4 \int x \, e^{x^2} dx] = e^{-x^2} [C + 2 \int e^{x^2} (2x dx)]$

$y(x) = e^{-x^2} [C + 2 e^{x^2}] = C e^{-x^2} + 2 \Rightarrow \boxed{y(x) = C e^{-x^2} + 2}$ est la sol générale de l'equ (1)

7: $y' \sin y = \cos y (1 - x \cos y)$ (1)

$\Leftrightarrow \frac{\sin y \, dy}{dx} = \cos y - x \cos^2 y \Leftrightarrow -\frac{\sin y \, dy}{dx} + \cos y = x . \cos^2 y$. (2)

si on pose: $u = \cos y . \Rightarrow du = -\sin y \, dy$.

(2) $\Leftrightarrow$ $u' + u = x \cdot u^2$, (3) de la forme $u' + P(x) \cdot u = Q(x) \cdot u^2$ tq $P(x) = 1$, $Q(x) = x$ et $\alpha = 2$

$\Rightarrow$ (3) est une equation de Bernoulli

(3)$/u^2 \Leftrightarrow u' \cdot u^{-2} + u^{-1} = x$ (4) ; posons $u^{-1} = z \Rightarrow -u' u^{-2} = z' \Rightarrow u' \cdot u^{-2} = -z'$

(4) $\Leftrightarrow -z' + z = x \Leftrightarrow z' - z = -x$ (5) $\Leftrightarrow$ equation linéaire dont la solution est :

$z(x) = e^{\int dx}[C - \int x e^{-\int dx} dx] = e^{x}[C - \int x e^{-x} dx]$

$\int x e^{-x} dx = ?$ $u = x \Rightarrow dt = dx$ et $dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \Rightarrow \int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx$

$\Rightarrow \int x e^{-x} dx = -e^{-x}(x+1)$ D'où : $z(x) = e^{x}[C + e^{-x}(x+1)] = C \cdot e^{x} + x + 1 = z(x)$

or $z(x) = u^{-1} = \frac{1}{u} \Rightarrow u(x) = \frac{1}{C \cdot e^{x} + x + 1}$. et $u(x) = \cos y(x)$.

Donc la solution générale de (1) est donnée par $\boxed{\cos y = \frac{1}{Ce^{x} + x + 1}}$ ou

encore par : $\boxed{y(x) = \operatorname{Arccos} \frac{1}{Ce^{x} + x + 1}}$.

5 : $y' + y \operatorname{cotg} x = 5 e^{\cos x}$ (1) qui est une equation linéaire et dont la solution générale est donnée par : $y(x) = e^{-\int \operatorname{cotg} x dx}[C + 5 \int e^{\cos x} \cdot e^{\int \operatorname{cotg} x dx} dx]$.

on sait que : $\int \operatorname{cotg} x = \ln|\sin x| + c$ et $-\int \operatorname{cotg} x = -\ln|\sin x| + c = \ln \frac{1}{|\sin x|} + c$.

$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{|\sin x|}[C + 5 \int e^{\cos x} \cdot |\sin x| dx] = \frac{C}{|\sin x|} + \frac{5}{\sin x} \int e^{\cos x} \sin x \, dx$.

soit : $\frac{C}{\sin x} = \pm \frac{C}{\sin x} = \frac{K}{\sin x}$ / $K = \pm C$.

$y(x) = \frac{1}{\sin x}[K - 5 \int e^{\cos x}(-\sin x \, dx)] = \frac{1}{\sin x}[K - 5 \int e^{\cos x} d(\cos x)]$

$\boxed{y(x) = \frac{1}{\sin x}[K - 5 e^{\cos x}]}$ (2)

• $y(\frac{\pi}{2}) = -4 \Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow -4 = K - 5 \Rightarrow \boxed{K = 1}$ d'où la solution particulière de (1) qui verifie la condition initiale $y(\frac{\pi}{2}) = -4$ est donnée par : $\boxed{y = \frac{1}{\sin x}[1 - 5 e^{\cos x}]}$

5 : $y'^2 + y^2 = 1$ (1)

C'est une equation du 1er ordre du second degré $\Rightarrow$ elle possede deux racines y'_1 et y'_2 qui après leur integration nous donnent la sol générale de (1).

$\Leftrightarrow y'^2 = 1 - y^2 \Rightarrow y' = \pm\sqrt{1 - y^2} = \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \pm \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = dx$ (2) eq à V.S dont la solution est donnée par : $\pm \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int dx + C$ (3) or $\int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \operatorname{Arcsin} y + c$.

(3) $\Leftrightarrow \pm \operatorname{Arcsin} y = x + C$.

1er cas : $x+C = \text{Arc}\sin y \Rightarrow \boxed{y_1 = \sin(x+C)}$

2eme cas : $x+C = -\text{Arc}\sin y \Rightarrow \text{Arc}\sin y = -(x+C) \Rightarrow \boxed{y_2 = \sin-(x+C) = -\sin(x+C)}$

la sol generale de (1) est $\Rightarrow [y-\sin(x+C)].[y+\sin(x+C)] = 0$, $y_p = ? / y(0) = 1/2$.

1er cas : $y(0) = 1/2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \sin(0+C) \Rightarrow \frac{1}{2} = \sin C \Rightarrow C = \text{Arc}\sin\frac{1}{2} \Rightarrow C = \begin{cases} \pi/6 \\ \text{ou} \\ 5\pi/6 \end{cases}$

$\Rightarrow y_{1p} = \begin{cases} \sin(x+\pi/6) = \sin x \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x \\ \sin(x+5\pi/6) = \sin x \cdot \cos 5\pi/6 + \cos x \cdot \sin 5\pi/6 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x \end{cases} \Rightarrow \boxed{y_1 p = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x}$

2eme cas : $y(0) = 1/2 \Rightarrow \frac{1}{2} = -\sin(0+C) \Rightarrow -\frac{1}{2} = \sin C \Rightarrow C = \text{Arc}\sin -1/2 \Rightarrow C = \begin{cases} -\pi/6 \\ -5\pi/6. \end{cases}$

$\Rightarrow y_2 p = \begin{cases} -\sin(x-\pi/6) = -\sin x \cos\pi/6 + \cos x \cdot \sin\pi/6 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x \\ -\sin(x-5\pi/6) = -\sin x \cos 5\pi/6 + \cos x \cdot \sin\pi/6 = +\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x \end{cases} \Rightarrow \boxed{y_2 p = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x}$

$\Rightarrow y_p = y_1 p = y_2 p$ qui verifie : $y(0) = 1/2$. cad $\boxed{y_p = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x}$.

5- Les Equations differentielles de Riccati :

Soit l'equation : $y' = P(x).y^2 + Q(x).y + R(x)$. (1)

Si $R(x) = 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow y' = P(x)y^2 + Q(x).y \Leftrightarrow y' - Q(x)y = P(x).y^2$, equ de Bernoulli ($\alpha = 2$)

Si $P(x) = 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow y' = Q(x).y + R(x) \Leftrightarrow y' - Q(x)y = R(x)$, equ linéaire.

Si $R(x) \neq 0$, $P(x) \neq 0$ et $\forall Q(x)$ alors : (1) est dite equation de Riccati. Sa resolution est basée principalement sur la connaissance d'une de ses solutions particulières $y(x) = u(x)$ qui verifie (1) c'est à dire nous avons toujours : $\boxed{u' = P(x).u^2 + Q(x).u + R(x)}$ (2). Cette solution particulière est generalement donnée, mais parfois elle ne l'est pas et pour la retrouver on opte pour le tatonnement.

Methodes de Resolution :

$y' = P(x).y^2 + Q(x).y + R(x)$ (1)

$\boxed{y(x) = u(x)}$ est une solution particulière de (1) tq : $u' = P(x).u^2 + Q(x).u + R(x)$. (2)

1ere Methode : Soit : $\boxed{y = u + \frac{1}{v}}$ la solution générale de (1), $u = u(x)$ est la sol part ; $v = v(x)$ à retrouver, cette methode aboutit à une equation differentielle lineaire

$y = u + \frac{1}{v} \Rightarrow y^2 = u^2 + \frac{1}{v^2} + 2\frac{u}{v}$ et $y' = u' - \frac{v'}{v^2}$.

$(1) \Leftrightarrow u' - \frac{v'}{v^2} = P(x).[u^2 + \frac{1}{v^2} + 2.\frac{u}{v}] + Q(x)[u + \frac{1}{v}] + R(x)$

$\Leftrightarrow \cancel{u'} - \frac{v'}{v^2} = \underbrace{\cancel{P(x).u^2 + Q(x).u + R(x)}}_{u'} + P(x).\frac{1}{v^2} + 2P(x).\frac{u}{v} + Q(x).\frac{1}{v} \qquad \times(-v^{-2}) \;/ v \neq 0.$

$\Leftrightarrow v' + \underbrace{[2P(x).u(x) + Q(x)]}_{P_1(x)} v = \underbrace{-P(x)}_{Q_1}$, $\Leftrightarrow v' + P_1(x).v = Q_1(x)$ (3) equ lineaire

$\Rightarrow \boxed{v(x) = e^{-\int P_1(x)dx}[C + \int Q_1(x)\, e^{+\int P_1(x)dx}dx]}$

$u(x)$ et $v(x)$ etant connues, donc la solution générale de(1) donnée par:

$$\boxed{y = u(x) + \frac{1}{v(x)}.}$$

2ème Methode: soit: $\boxed{y = u + v}$ la solution générale de(1) ; $u = u(x)$ est la sol parti, et $v = v(x)$ à retrouver, cette methode aboutit à une equation differentielle de Bernoulli.

$y = u + v \Rightarrow y^2 = u^2 + v^2 + 2u.v$ et $y' = u' + v'$

$(1) \Leftrightarrow u' + v' = P(x).[u^2 + v^2 + 2u.v] + Q(x).[u + v] + R(x).$

$\Leftrightarrow \cancel{u'} + v' = \underbrace{P(x).u^2 + Q(x).u + R(x)}_{u'} + P(x).v^2 + 2P(x)\,u.v + Q(x).v$

$\Leftrightarrow v' - \underbrace{[2P(x).u + Q(x)]}_{B(x)}v = P(x).v^2 \Leftrightarrow v' + B(x).v = P(x).v^2$ (3) equ de Bernoulli.

$(3)/v^2 \Leftrightarrow v'v^{-2} + B(x).v^{-1} = P(x)$ (4) posons $v^{-1} = z \Rightarrow -v^{-2}v' = z' \Rightarrow v'v^{-2} = -z'$

$(4) \Leftrightarrow -z' + B(x).z = P(x) \Leftrightarrow z' - B(x).z = -P(x)$ equ lin $\Rightarrow z = e^{\int B(x)dx}[C - \int P(x)e^{-\int B(x)dx}dx]$

on determine $z(x)$ puis $\boxed{v(x) = \frac{1}{z}}$.

$u(x)$ et $v(x)$ etant connues, on obtient la solution générale de(1) : $\boxed{y = u(x) + v(x)}$

Exercice N°05 :

① $y' = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2x^2}$ (1) $\qquad y(x) = u(x) = -\frac{1}{x}$ sol parti de (1)

de la forme $y' = P(x).y^2 + Q(x).y + R(x)$ tq $P(x) = \frac{1}{2}$, $Q(x) = 0$ et $R(x) = \frac{1}{2x^2}$,

ayant une sol partic $u(x) = -\frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ (1) est une equ de Riccati.

Resolution:

2ème Méthode: La solution générale de (1) est donnée par: $\boxed{y(x) = u(x) + v(x)}$

$\boxed{u(x) = -\frac{1}{x}}$; $v(x) = ?$

Verification: $u^2(x) = \frac{1}{x^2}$. et $u'(x) = \frac{1}{x^2}$.

$(1) \Leftrightarrow u' \overset{?}{=} \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} \overset{?}{=} \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{x^2}$. vraie.

$y(x) = -\frac{1}{x} + v(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{x^2} + v'(x)$ et $y^2 = \frac{1}{x^2} - 2\frac{v}{x} + v^2$

$(1) \Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{x^2}} + v' = \cancel{\frac{1}{2x^2}} - \frac{v}{x} + \frac{v^2}{2} + \cancel{\frac{1}{2x^2}} \Leftrightarrow v' + \frac{1}{x}v = \frac{1}{2}v^2.$ (2), equ de Bernoulli.

$(2)/v^2 \Leftrightarrow v'.v^{-2} + \frac{1}{x}v^{-1} = \frac{1}{2}$ (3) posons $v^{-1} = z \Rightarrow -v'v^{-2} = z' \Rightarrow v'v^{-2} = -z'$

$(3) \Leftrightarrow -z' + \frac{1}{x}.z = \frac{1}{2} \Leftrightarrow z' - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{2}$. equ lin $\Rightarrow z(x) = e^{\int\frac{dx}{x}}[C - \frac{1}{2}\int e^{-\int\frac{dx}{x}}dx]$

$\Rightarrow z(x) = |x|[C - \frac{1}{2}\int\frac{1}{|x|}dx] = x[\pm C - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}] \Rightarrow \boxed{z(x) = x[K - \frac{1}{2}\ln|x|]}$ / $K = \pm C$.

or $z(x) = v^{-1}(x) = \frac{1}{v(x)} = x\frac{[k_1 - \ln|x|]}{2}$ / $k_1 = 2K$. $\Rightarrow \boxed{v(x) = \frac{2}{x[k_1 - \ln|x|]}}$

$y(x) = u(x) + v(x)$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{x}\left[\frac{2}{k_1 - \ln|x|} - 1\right]}$

1ère Methode: La solution générale est donnée par: $\boxed{y(x) = u(x) + \frac{1}{v(x)}}$

$\boxed{u(x) = -\frac{1}{x}}$, $v(x) = ?$

$y(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{v} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{v^2} - \frac{2}{x \cdot v}$ et $y' = \frac{1}{x^2} - \frac{v'}{v^2}$.

(1) $\Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{x^2}} - \frac{v'}{v^2} = \cancel{\frac{1}{2x^2}} + \frac{1}{2v^2} - \frac{1}{x \cdot v} + \cancel{\frac{1}{2x^2}}$. $\Leftrightarrow -\frac{v'}{v^2} + \frac{1}{x \cdot v} = \frac{1}{2v^2}$ $\times(-v^2)$

$\Leftrightarrow v' - \frac{1}{x}v = -\frac{1}{2}$ (2) eq lineaire $\Rightarrow v(x) = e^{\int\frac{dx}{x}}\left[C - \frac{1}{2}\int e^{-\int\frac{dx}{x}}dx\right]$

$v(x) = |x|\left[C - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{|x|}\right] = x\frac{[\pm 2C - \ln|x|]}{2}$ soit $\pm 2C = K \Rightarrow \boxed{v(x) = \frac{x[K - \ln|x|]}{2}}$.

or $y(x) = u(x) + \frac{1}{v(x)} \Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{x}\left[-1 + \frac{2}{K - \ln|x|}\right]}$

5) $y' = y^2 - (2x+1)y + x^2 + x + 1$ (1) $\boxed{u(x) = x}$, (1) est une equ de Riccati.

1ère Methode: $\boxed{y(x) = u(x) + \frac{1}{v(x)}}$.

$y(x) = x + \frac{1}{v(x)} \Rightarrow y^2 = x^2 + 2\frac{x}{v} + \frac{1}{v^2}$ et $y' = 1 - \frac{v'}{v^2}$.

(1) $\Leftrightarrow 1 - \frac{v'}{v^2} = x^2 + 2\frac{x}{v} + \frac{1}{v^2} - (2x+1)(x + \frac{1}{v}) + x^2 + x + 1$

$\Leftrightarrow \cancel{1} - \frac{v'}{v^2} = \cancel{x^2} + \cancel{2\frac{x}{v}} + \frac{1}{v^2} - \cancel{2x^2} - \cancel{2\frac{x}{v}} - \cancel{x} - \frac{1}{v} + \cancel{x^2} + \cancel{x} + \cancel{1} \Leftrightarrow -\frac{v'}{v^2} = \frac{1}{v^2} - \frac{1}{v}$ $\times(-v^2)$

$\Leftrightarrow v' - v = -1$ (2) equ lin (ou à V.S) $\Rightarrow v(x) = e^{\int dx}\left[C - \int e^{-\int dx}dx\right] = e^{x}\left[C - \int e^{-x}dx\right]$

d'ou: $\boxed{v(x) = C.e^{x} + 1}$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = x + \frac{1}{Ce^{x} + 1}}$ qui est la solution générale de (1).

2eme Methode: $\boxed{y(x) = u(x) + v(x)}$

$y(x) = x + v \Rightarrow y^2 = x^2 + v^2 + 2xv$ et $y' = 1 + v'$

(1) $\Leftrightarrow 1 + v' = x^2 + v^2 + 2xv - (2x+1)(x+v) + x^2 + x + 1$.

$\Leftrightarrow \cancel{1} + v' = \cancel{x^2} + v^2 + \cancel{2xv} - \cancel{2x^2} - \cancel{2xv} - \cancel{x} - v + \cancel{x^2} + \cancel{x} + \cancel{1}$. $\Leftrightarrow v' = v^2 - v \Leftrightarrow \boxed{v' + v = v^2}$ (2)

(2) est une equation de Bernoulli (ou à V.S).

* Eq à V.S: (2) $\Leftrightarrow \frac{dv}{v(v-1)} = dx \Rightarrow \int\frac{dv}{v(v-1)} = \int dx + C$ (3)

$\frac{1}{v(v-1)} = \frac{A}{v} + \frac{B}{v-1} \Leftrightarrow 1 = A(v-1) + Bv$ alors Si $v = 1 \Rightarrow$ B = 1 et Si $v = 0 \Rightarrow$ A = -1.

$\Rightarrow \frac{1}{v(v-1)} = -\frac{1}{v} + \frac{1}{v-1} \Rightarrow (3) \Leftrightarrow -\int \frac{dv}{v} + \int \frac{dv}{v-1} = x + C \Leftrightarrow -\ln|v| + \ln|v-1| = x + C$

$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{v-1}{v}\right| = x + C \Rightarrow \frac{v-1}{v} = \pm e^{C} \cdot e^{x} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{v} = K e^{x} \;/\; K = \pm e^{C} \Leftrightarrow \frac{1}{v} = 1 - K e^{x}.$

D'où $\boxed{v(x) = \frac{1}{1-Ke^{x}}}$ ou encore $\boxed{v(x) = \frac{1}{1+K_1 e^{x}}}$ $/ \; K_1 = -K.$

* Eq de Bernoulli: $(2) \Leftrightarrow v' + v = v^2 \quad (2) \; ; \; (2)/v^2 \Leftrightarrow v'v^{-2} + v^{-1} = 1 \quad (3)$

posons $v^{-1} = z \Rightarrow -v'v^{-2} = z' \Rightarrow -z' = v'v^{-2} \Rightarrow (3) \Leftrightarrow -z' + z = 1 \Leftrightarrow z' - z = -1 \quad (4)$ equ linéaire

$\Rightarrow z = e^{\int dx}\left[C - \int e^{-\int dx} dx\right] = e^{x}\left[C - \int e^{-x} dx\right] = e^{x}\left[C + e^{-x}\right] = C.e^{x} + 1 = \frac{1}{v} \Rightarrow \boxed{v(x) = \frac{1}{C.e^{x}+1}}.$

Donc en fin de compte: $\boxed{y(x) = x + \frac{1}{C.e^{x}+1}}$

3°) $y' = y^2 - 2xy + x^2 + 1.$ (1) de la forme: $y' = P(x).y^2 + Q(x).y + R(x) \Rightarrow (1)$ est une équation de Riccati. mais cette fois ci, la solution particulière n'est pas donnée.

On remarque bien que: $y = x$ est une solution particulière de (1).

$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow 1 = x^2 - 2x^2 + x^2 + 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ vraie. $\Rightarrow \boxed{u(x) = x}$

1ère Methode: $\boxed{y(x) = u(x) + \frac{1}{v(x)}}.$

$y = x + \frac{1}{v} \Rightarrow y^2 = x^2 + \frac{1}{v^2} + 2\frac{x}{v}$ et $y' = 1 - \frac{v'}{v^2} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \cancel{1} - \frac{v'}{v^2} = \cancel{x^2} + \frac{1}{v^2} + \cancel{2\frac{x}{v}} - \cancel{2x^2} - \cancel{2\frac{x}{v}} + \cancel{x^2} + \cancel{1}$

$\Leftrightarrow -\frac{v'}{v^2} = \frac{1}{v^2} \quad *(-v^2) \Leftrightarrow v' = -1 \Leftrightarrow dv = -dx \Leftrightarrow \boxed{v = -x + C}$

D'où $\boxed{y(x) = x + \frac{1}{C-x}}$ qui est la solution générale de (1).

2ème Methode: $\boxed{y(x) = u(x) + v(x)}$

$y = x + v \Rightarrow y^2 = x^2 + v^2 + 2xv$ et $y' = 1 + v' \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \cancel{1} + v' = \cancel{x^2} + v^2 + \cancel{2xv} - \cancel{2x^2} - \cancel{2xv} + \cancel{x^2} + \cancel{1}$

$\Leftrightarrow v' = v^2 \Leftrightarrow \frac{dv}{v^2} = dx \Leftrightarrow -\frac{1}{v} = x + C \Rightarrow v = \frac{1}{-x-C} \Rightarrow \boxed{v = \frac{1}{K-x}} \;/\; K = -C$

D'où: $\boxed{y(x) = x + \frac{1}{K-x}}$ qui est la solution generale de l'Eq (1).

3°- Equation de Lagrange:

Toute equation differentielle du 1er ordre de la forme: $y = x.\varphi(y') + \psi(y')$ (1) est dite equation de Lagrange.

Methode de Résolution:

$y = x.\varphi(y') + \psi(y')$ (1) est une equation de Lagrange.

posons $y' = p \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \boxed{y = x\cdot\varphi(p) + \psi(p)}$ (2)

$(2)'/x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx}\cdot\varphi(p) + x\cdot\frac{d\varphi(p)}{dx} + \frac{d\psi(p)}{dx}$.

$\Leftrightarrow y' = p = \varphi(p) + x\cdot\frac{dp}{dx}\cdot\frac{d\varphi(p)}{dp} + \frac{dp}{dx}\cdot\frac{d\psi(p)}{dp}$

$\Leftrightarrow \boxed{p - \varphi(p) = \frac{dp}{dx}\left(x\cdot\varphi'(p) + \psi'(p)\right)}$ (3).

a = Si $p - \varphi(p) = 0$:, de ce polynome on tire les valeurs $p_1, p_2, p_3, \ldots$ qui le verifient et en les remplaçant dans (2) successivement on obtient $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots$ tq:

$y_1 = x\cdot\varphi(p_1) + \psi(p_1)$, $y_2 = x\cdot\varphi(p_2) + \psi(p_2)$; $y_3 = x\cdot\varphi(p_3) + \psi(p_3), \ldots$

qui sont soit des solutions particulieres, soit singulieres, soit semi-singuliere si elles existent bien sûre.

b = Si $p - \varphi(p) \neq 0$: la solution générale est obtenue en integrant l'équation (3) c'est à dire : $(3) \Leftrightarrow \frac{dx}{dp} = x\cdot\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)} + \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}$.

$\Leftrightarrow \boxed{x' - \frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}\,x = \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}}$ (4) / $x' = \frac{dx}{dp}$ (4) $\Leftrightarrow$ equation lineaire

dont la solution generale est :

$$\boxed{x(p) = e^{\int\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}dp}\left[C + \int\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}\,e^{-\int\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}dp}\,dp\right]} \quad (6)$$

. On tire p en fonction de x de (6) et on le remplace dans (2), on obtient alors, la solution generale de (1) donnée par: $\boxed{\Phi(x,y,C) = 0}$ (7).

. Si on ne peut pas tirer p en fonction de x de (6) c'est a dire (7) est impossible à determiner, la solution generale de (1) est donné par le systeme: $\begin{cases}(6) \text{ dans } (2)\\ \text{et}\\ (6)\end{cases}$

c'est à dire:
$$\begin{cases} y(p) = e^{\int\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}dp}\left[C + \int\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}\cdot e^{-\int\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}dp}\,dp\right]\cdot\varphi(p) + \psi(p) & (8)\\ \text{et } x(p) = e^{\int\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}dp}\left[C + \int\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}\cdot e^{-\int\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}dp}\,dp\right] & (2)\end{cases}$$

<u>Remarques:</u>

Si $y_1, y_2, \ldots$ sont obtenues en particularisant la cste C dans (7), alors elles sont dites solutions particulières, sinon elles sont dites singulières

<u>par exemple:</u> Si $y_1 \equiv y \Rightarrow C =$ cste reelle finie $\Rightarrow y_1$ est particuliere.

Si $y_1 \equiv y \Rightarrow C = C(x) \Rightarrow y_1$ est singuliere.

Si $y_1 \equiv y \Rightarrow \{C =$ cste reelle finie ou $C = C(x)\} \Rightarrow y_1$ est semi-singulière.

Exemple 1 :

Resoudre l'equation differentielle : $y = y'^2(x+1)$. pour $x \in]-1, +\infty[$.

$\Leftrightarrow y = x.(y')^2 + (y')^2$ (1) de la forme : $y = x.\varphi(y') + \psi(y')$ / $\varphi(y') = \psi(y') = y'^2 \Rightarrow$ Lag

soit $y' = p \Rightarrow$ (1) $\Leftrightarrow$ $y = x.p^2 + p^2$ ou encore $\boxed{y = p^2(x+1)}$ (2)

$(2)'/x \Leftrightarrow p = 2pp'(x+1) + p^2 \Leftrightarrow \boxed{p - p^2 = \frac{dp}{dx}(2px + 2p)}$ (3)

***Si $p - p^2 = 0$:** $\Leftrightarrow p(1-p) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = 1 \end{cases} \overset{(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} y_1 = 0^2(x+1) \\ y_2 = 1^2(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = x+1 \end{cases}$ | dont la nature sera determinee ap

***Si $p - p^2 \neq 0$:** $\Rightarrow (3) \Leftrightarrow \frac{dx}{dp} - \frac{2\cancel{p}}{\cancel{p} - p^{\cancel{2}}} x = \frac{2\cancel{p}}{\cancel{p} - p^{\cancel{2}}} \Leftrightarrow \boxed{x' - \frac{2}{1-p} x = \frac{2}{1-p}}$ (4) equ lin

$\Rightarrow x(p) = e^{\int \frac{2}{1-p} dp}\left[C + \int \frac{2}{1-p} e^{-\int \frac{2}{1-p} dp} dp\right]$

$2\int \frac{dp}{1-p} = -2\int \frac{-dp}{1-p} = 2\ln\frac{1}{|1-p|} = \ln\frac{1}{(1-p)^2}$ et $-2\int \frac{dp}{1-p} = 2\int \frac{-dp}{1-p} = \ln(1-p)^2$

$\Rightarrow x(p) = \frac{1}{(1-p)^2}\left[C + 2\int \frac{1}{(1-p)}.(1-p)^{\cancel{2}} dp\right] = \frac{1}{(1-p)^2}\left[C + (2p - p^2)\right] = \frac{1}{(1-p)^2}\left[C + (2p - p^2 - 1) + 1\right]$

$\Rightarrow x(p) = \frac{1}{(1-p)^2}\left[C - (1-p)^2 + 1\right] = \frac{1}{(1-p)^2}\left[C_1 - (1-p)^2\right]$ / $C_1 = C + 1$

D'ou : $\boxed{x(p) = \frac{C_1}{(1-p)^2} - 1}$ (5)

On essaye de tirer p en fonction de x de (5) (si c'est possible)

(5) $\Leftrightarrow \frac{C_1}{(1-p)^2} = x + 1 \Rightarrow (1-p)^2 = \frac{C_1}{x+1} \Rightarrow 1 - p = \pm\sqrt{\frac{C_1}{x+1}}$; on suppose que $C_1 > 0$ et $x+1 > 0$

d'ou $1 - p = \frac{\pm\sqrt{C_1}}{\sqrt{x+1}} = \frac{C_2}{\sqrt{x+1}}$ / $C_2 = \pm\sqrt{C_1} \Rightarrow \boxed{p = 1 - \frac{C_2}{\sqrt{x+1}}}$ (6)

(6) dans (2) $\Leftrightarrow y = \left(1 - \frac{C_2}{\sqrt{x+1}}\right)^2 (x+1) = \frac{(\sqrt{x+1} - C_2)^2}{\cancel{(x+1)}}\cancel{(x+1)} \Rightarrow \boxed{y = (\sqrt{x+1} - C_2)^2}$ (7)

(7) est la solution générale de (1).

Revenons maintenant à y_1 et y_2 :

* $y_1 \equiv y \Leftrightarrow 0 = (\sqrt{x+1} - C_2)^2 \Rightarrow \sqrt{x+1} - C_2 = 0 \Rightarrow \underline{C_2 = \sqrt{x+1} = C_2(x) \neq Cste}$

D'ou $y_1 = 0$ est une solution singulière. (Impossible de particulariser C_2).

* $y_2 \equiv y \Leftrightarrow x + 1 = (\sqrt{x+1} - C_2)^2 \Leftrightarrow \cancel{x+1} = \cancel{x+1} + C_2^2 - 2C_2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow C_2[C_2 - 2\sqrt{x+1}] = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 0 = \text{cste reelle} \Rightarrow y_2 \text{ est une sol particulière} \\ C_2 = 2\sqrt{x+1} = C_2(x) \neq \text{cste} \Rightarrow y_2 \text{ est une sol singulière} \end{cases} \Rightarrow y_2 = x+1$ est une sol semi-singulière

Exemple 2 :

Resoudre l'equation differentielle : $y = x(1 + y') + y'^2$ (1)

(1) est de la forme : $y = x.\varphi(y') + \psi(y')$ / $\varphi(y') = 1 + y'$ et $\psi(y') = y'^2$.

posons: $y'=p \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \boxed{y = x(1+p)+p^2}$ (2).

$(2)'/x \Leftrightarrow \quad p = 1+p+xp'+2pp' \Leftrightarrow \boxed{-1 = \frac{dP}{dx}(x+2p)}$ (3).

$\star$ $P-\varphi(P) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ (1) ne possede aucune solution singulière.

$\Rightarrow (3) \Leftrightarrow \frac{dx}{dP} = -x-2p \quad \Leftrightarrow \boxed{x'+x=-2p.}$ (4) eq lineaire. $\Rightarrow x(p) = e^{-\int d}\,[C-2\int p\, e^{\int dP} dP]$

$\Leftrightarrow x(p) = e^{-P}[C-2\int p.e^{P} dP]$; $u=p \Rightarrow du=dp$ et $dv=e^{P}dP \Rightarrow v=e^{P} \Rightarrow \int pe^{P}dp = pe^{P}-e^{P}$

$\Leftrightarrow x(p) = e^{-P}[C-2pe^{P}+2e^{P}] = C.e^{-P}-2p+2 \Rightarrow \boxed{x(P) = C.e^{-P}-2p+2.}$ (5).

On remarque bien qu'on ne peut pas tirer p en fonction de x de (5) $\Rightarrow$ On doit alors remplacer $x(p)$ dans (2) pour avoir : $y(p)$.

$\Rightarrow y(p) = [Ce^{-P}-2p+2](1+p)+p^2 = Ce^{-P}-\cancel{2p}+2+C.p.e^{-P}-2p^2+\cancel{2p}+p^2 = Ce^{-P}(1+p)-p^2+2$

D'ou $\boxed{y(p) = Ce^{-P}(1+p)-p^2+2}$ (6)

La Solution generale de (1) est donnée par le systeme parametrique suivant:

$$(I)\begin{cases} x(P) = C.e^{-P}-2p+2. & (5) \\ y(P) = C.e^{-P}(1+P)-p^2+2. & (6) \end{cases}$$

<u>Remarque:</u> On peut avoir une infinité de sol particulières parametrique du systeme (I).

<u>10- Equations de Clairaut:</u>

Toute equation differentielle du 1er ordre de la forme : $y = x.y'+\psi(y')$ (1) est dite équation de Clairaut. C'est un cas particulier de celle de Lagrange, cas où $\varphi(y')=y'$.

<u>Methode de resolution:</u>

$y = x.y'+\psi(y')$ (1) est une equation de Clairaut.

posons $y'=p \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \boxed{y = x.p+\psi(p)}$ (2)

$(2)'/x \Leftrightarrow \cancel{p} = \cancel{p}+xp'+\psi'(p)\,p' \Leftrightarrow \boxed{\frac{dP}{dx}(x+\psi'(p)) = 0}$ (3)

$\star$ $\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow dP = 0 \Rightarrow \underline{P=K.} \Rightarrow (2) \Leftrightarrow \boxed{y = x.K+\psi(K)}$ (4) qui est la solution générale de (1).

$\star$ $x+\psi'(p) = 0 \Rightarrow P = p(x)$ <u>si p existe</u> $\Rightarrow (2) \Leftrightarrow y = x.p(x)+\psi(p(x))$ (5) qui est toujours singulière, car le K est toujours fonction de x.

Exercice N°: 05.

5°. $y = xy' + y' - y'^2$. (1). $\Leftrightarrow$ equation de Clairaut.

posons : $y' = p \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \boxed{y = xp + p - p^2}$ (2)

$(2)'/x \Leftrightarrow \cancel{p} = xp' + \cancel{p} + p' - 2pp' \Leftrightarrow \frac{dp}{dx}(x - 2p + 1) = 0$ (3)

$\star\ \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = K \Rightarrow (2) \Leftrightarrow \boxed{y = x.K + K - K^2}$ (4) qui est la sol générale de (1)

$\star\ x - 2p + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{p = \frac{x+1}{2} = p(x)}$ (5)

(5) dans (2) $\Leftrightarrow y = x.\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2} - \frac{(x+1)^2}{4} = \frac{x+1}{2}\left(x + 1 - \frac{x+1}{2}\right) = \frac{x+1}{2} \cdot \frac{x+1}{2} = \frac{(x+1)^2}{4}$

D'où : $\boxed{y = \frac{(x+1)^2}{4}}$ qui est une solution singulière. et dont les (x,y) represente une parabole.

6°. $y = x.y' + \sqrt{1 - y'^2}$ (1) $\Leftrightarrow$ equation de Clairaut

posons $y' = p \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \boxed{y = x.p + \sqrt{1 - p^2}}$ (2)

$(2)'/x \Leftrightarrow \cancel{p} = \cancel{p} + xp' + \frac{1}{\cancel{2}}.(-\cancel{2}pp').(1-p^2)^{-1/2} \Leftrightarrow \frac{dp}{dx}\left(x - \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\right) = 0$ (3)

$\star\ \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = K \Rightarrow (2) \Leftrightarrow \boxed{y = x.K + \sqrt{1 - K^2}}$ (4) sol generale de (1).

$\star\ x - \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} = 0 \Rightarrow \boxed{x(p) = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}}$ (5).

et $y(p)$ de (2) $\Leftrightarrow y(p) = \frac{p^2}{\sqrt{1-p^2}} + \sqrt{1-p^2} = \frac{p^2 + 1 - p^2}{\sqrt{1-p^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \Rightarrow \boxed{y(p) = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}}$ (6)

$(6)^2 - (5)^2 \Leftrightarrow \boxed{y^2 - x^2 = 1}$ (7)

La solution singuliere de (1) est donnée par l'equ (7). qui est une hyperbole.

Exemple :

Resoudre l'equation differentielle : $y = x.y' + a\sqrt{1 + y'^2}$ (1) equ de Clairaut.

posons : $y' = p \Rightarrow \boxed{y = x.p + a.\sqrt{1 + p^2}}$ (2)

$(2)'/x \Leftrightarrow \cancel{p} = xp' + \cancel{p} + a.\frac{1}{\cancel{2}}.(\cancel{2}pp').\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \Leftrightarrow \frac{dp}{dx}\left(x + \frac{a.p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$ (3)

$\star\ \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = K \Rightarrow (2) \Leftrightarrow \boxed{y = x.K + a\sqrt{1 + K^2}}$ (4) qui est la sol générale de (1)

$\star\ x + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} = 0 \Rightarrow \boxed{x(p) = -\frac{a\,p}{\sqrt{1+p^2}}}$ (5)

(5) dans (2) $\Leftrightarrow y = -\frac{a.p^2}{\sqrt{1+p^2}} + a\sqrt{1+p^2} = \frac{-\cancel{ap^2} + a + \cancel{ap^2}}{\sqrt{1+p^2}} \Rightarrow \boxed{y(p) = \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}}$ (6)

$(5)^2 + (6)^2 \Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 = a^2}$ (7) $\Rightarrow$ la solution singulière de l'équation (1) represente un cercle de centre (0,0) et de rayon a.

Exemple : (à verifier).

Resoudre l'equation differentielle : $(y - xy')^2 = 4y'$

$\Leftrightarrow y - xy' = \pm 2\sqrt{y'} \Leftrightarrow y = x . y' \pm 2\sqrt{y'}$ (1) equation de Clairaut.

posons $y' = p \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \boxed{y = x . p \pm 2\sqrt{p}}$ (2)

$(2)'/x \Leftrightarrow \cancel{p} = \cancel{p} + xp' \pm \cancel{2} . \frac{1}{\cancel{2}} . \frac{p'}{\sqrt{p}} \Leftrightarrow \frac{dP}{dx}\left(x \pm \frac{1}{\sqrt{P}}\right) = 0$ (3)

$* \frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow P = K \Rightarrow (2) \Leftrightarrow \boxed{y = x . K \pm 2\sqrt{K}}$ (4) qui est la sol générale de (1)

ou encore on peut mettre : $y_{1G} = xK + 2\sqrt{K}$ et $y_{2G} = xK - 2\sqrt{K}$ et la solution générale est donnée par : $\boxed{(y - y_{1G})(y - y_{2G}) = 0}$

$* \; x \pm \frac{1}{\sqrt{P}} = 0 \Rightarrow \boxed{x = \mp \frac{1}{\sqrt{P}}}$ (5)

(5) dans (2) $\Rightarrow y = \mp \frac{P}{\sqrt{P}} \pm 2\sqrt{P} = \mp \sqrt{P} \pm 2\sqrt{P} = \pm\sqrt{P} \Rightarrow \boxed{y = \pm\sqrt{P}}$ (6)

$(5).(6) \Leftrightarrow \boxed{x . y = -1}$ (7) qui est une sol singulière et qui represente une hyperbole équilatère

Exemple :

Resoudre l'equation differentielle : $y = 2xy' + \frac{1}{y'}$ (1) $\Leftrightarrow$ equ de Lagrange.

posons : $y' = p \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \boxed{y = 2xp + \frac{1}{p}}$ (2)

$(2)'/x \Leftrightarrow p = 2p + 2xp' - \frac{1}{p^2} . p' \Leftrightarrow -P = \frac{dP}{dx}\left(2x - \frac{1}{p^2}\right)$. (3).

<u>$*$ Si $-P = 0$</u> : $\Rightarrow P_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0 + \frac{1}{0} = \infty$ qui n'est ni une sol parti, ni une sol sing. de

<u>$*$ Si $-P \neq 0$</u> : $\Rightarrow (3) \Leftrightarrow \frac{dx}{dP} = -\frac{2x}{P} + \frac{1}{P^3} \Leftrightarrow \boxed{x' + \frac{2}{P}x = \frac{1}{P^3}}$ (4) equ lin

$\Rightarrow x(P) = e^{-\int \frac{2}{P} dP} \left[C + \int \frac{1}{P^3} e^{\int \frac{2}{P} dP} dp \right] = \frac{1}{P^2}\left[C + \int \frac{1}{P} dP \right] = \frac{1}{P^2}\left[C + \ln|P| \right]$.

donc : $\boxed{x(P) = \frac{1}{P^2}[C + \ln|P|]}$ (5). on ne peut pas tirer p en fonction de x

et $y(P) = 2P . \frac{1}{P^2}[C + \ln|P|] + \frac{1}{P} \Rightarrow \boxed{y(P) = \frac{1}{P}[2C + 1 + \ln P^2]}$ (6)

et la solution générale de (1) est donnée sous forme parametrique par le Systeme :

$$(I) \begin{cases} x(P) = \frac{1}{P^2}[C + \ln|P|]. \\ y(P) = \frac{1}{P}[2C + 1 + \ln P^2]. \end{cases}$$

- On peut avoir une infinité de sol particulieres parametriques en particularisant C dans I