

# CHAPITRE V

## ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES RÉSULTATS FONDAMENTAUX

Le but de ce chapitre est de démontrer les théorèmes généraux d'existence et d'unicité des solutions pour les équations différentielles ordinaires. Il s'agit du chapitre central de la théorie, de ce fait nécessairement assez abstrait. Sa bonne compréhension est indispensable en vue de la lecture des chapitres ultérieurs.

### 1. DÉFINITIONS. SOLUTIONS MAXIMALES ET GLOBALES

#### 1.1. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ORDINAIRE DU PREMIER ORDRE

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$  et

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

une application *continue*. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = f(t, y), \quad (t, y) \in U, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

**Définition** – Une solution de (E) sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  est une fonction dérivable  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  telle que

- (i)  $(\forall t \in I) \quad (t, y(t)) \in U$
- (ii)  $(\forall t \in I) \quad y'(t) = f(t, y(t)).$

L'« inconnue » de l'équation (E) est donc en fait une *fonction*. Le qualificatif « *ordinaire* » pour l'équation différentielle (E) signifie que la fonction inconnue  $y$  dépend d'*une seule* variable  $t$  (lorsqu'il y a plusieurs variables  $t_i$  et plusieurs dérivées  $\partial y / \partial t_i$ , on parle d'équations aux dérivées partielles).

**Écriture en coordonnées** – Écrivons les fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  en termes de leurs fonctions composantes, c'est-à-dire

$$y = (y_1, \dots, y_m), \quad f = (f_1, \dots, f_m).$$

L'équation (E) apparaît comme un *système différentiel* du premier ordre à  $m$  fonctions inconnues  $y_1, \dots, y_m$  :

$$(E) \quad \begin{cases} y'_1(t) = f_1(t, y_1(t), \dots, y_m(t)) \\ \dots \\ y'_m(t) = f_m(t, y_1(t), \dots, y_m(t)). \end{cases}$$

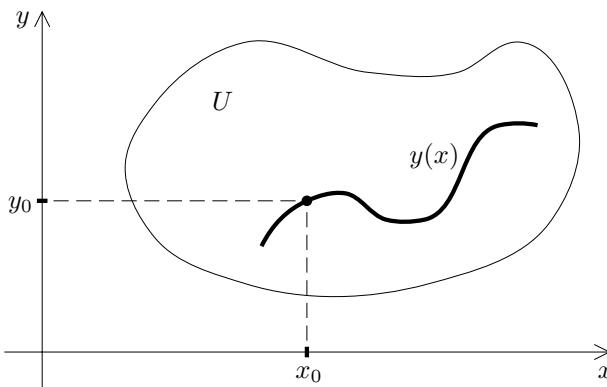
**Problème de Cauchy** – Étant donné un point  $(t_0, y_0) \in U$ , le problème de Cauchy consiste à trouver une solution  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  de (E) sur un intervalle  $I$  contenant  $t_0$  dans son intérieur, telle que  $y(t_0) = y_0$ .

**Interprétation physique** – Dans de nombreuses situations concrètes, la variable  $t$  représente le temps et  $y = (y_1, \dots, y_m)$  est une famille de paramètres décrivant l'état d'un système matériel donné. L'équation (E) traduit physiquement la loi d'évolution du système considéré en fonction du temps et de la valeur des paramètres. Résoudre le problème de Cauchy revient à prévoir l'évolution du système au cours du temps, sachant qu'en  $t = t_0$  le système est décrit par les paramètres  $y_0 = (y_{0,1}, \dots, y_{0,m})$ . On dit que  $(t_0, y_0)$  sont les *données initiales* du problème de Cauchy.

## 1.2. CAS DE LA DIMENSION UN ( $m = 1$ )

Si on note  $x = t$ , l'équation (E) se récrit

$$(E) \quad y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (x, y) \in U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

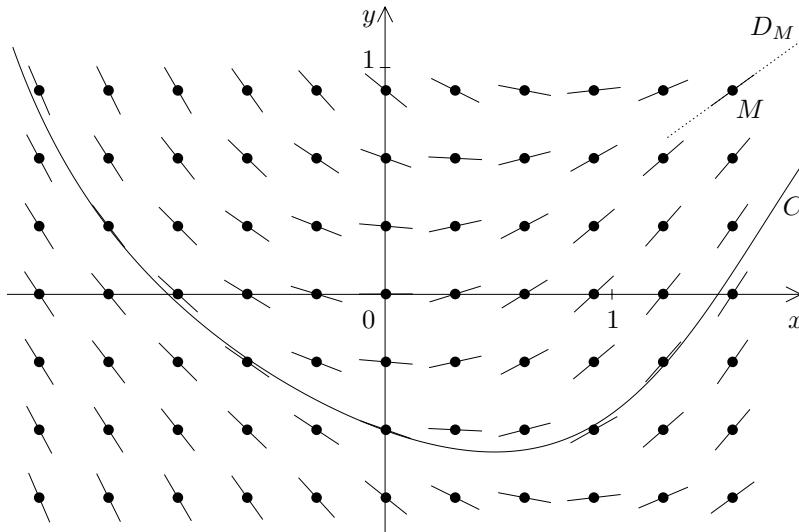


Résoudre le problème de Cauchy revient à trouver une « *courbe intégrale* » de (E) passant par un point donné  $(x_0, y_0) \in U$ .

**Champ des tangentes** – A tout point  $M = (x_0, y_0)$ , on associe la droite  $D_M$  passant par  $M$  et de coefficient directeur  $f(x_0, y_0)$  :

$$D_M : y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

L’application  $M \rightarrow D_M$  est appelée *champ des tangentes* associé à l’équation (E). Une courbe intégrale de (E) est une courbe différentiable  $C$  qui a pour tangente en chaque point  $M \in C$  la droite  $D_M$  du champ des tangentes. L’exemple ci-dessous correspond à l’équation  $y' = f(x, y) = x - y^2$ .



**Lignes isoclines de (E)** – Par définition, ce sont les courbes

$$\Gamma_p : f(x, y) = p$$

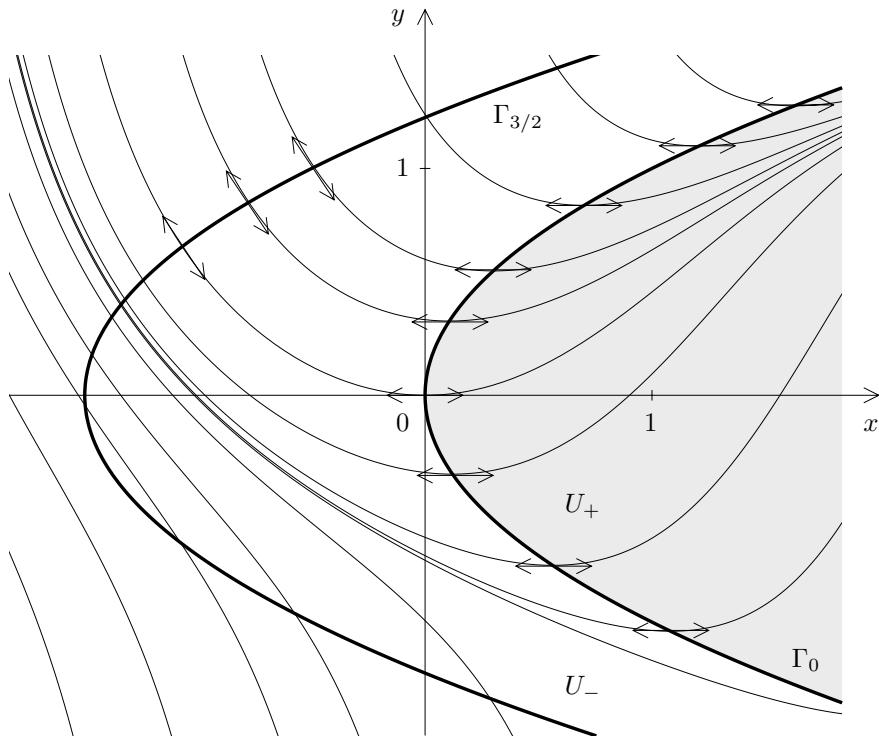
correspondant à l’ensemble des points  $M$  où la droite  $D_M$  a une pente donnée  $p$ . La courbe  $\Gamma_0$  joue un rôle intéressant. On a en effet un régionnement de  $U$  :

$$U = U_+ \cup U_- \cup \Gamma_0 \quad \text{où}$$

$$U_+ = \{M \in U ; f(M) > 0\}, \quad U_- = \{M \in U ; f(M) < 0\}.$$

Les courbes intégrales sont croissantes dans  $U_+$ , décroissantes dans  $U_-$ , stationnaires (souvent extrémales) sur  $\Gamma_0$ .

**Exemple** – Les lignes isoclines de l’équation  $y' = f(x, y) = x - y^2$  sont les paraboles  $x = y^2 + p$ .



### 1.3. SOLUTIONS MAXIMALES

Nous introduisons d'abord le concept de prolongement d'une solution. L'expression *solution maximale* est alors entendue implicitement au sens de la relation d'ordre fournie par le prolongement des solutions.

**Définition 1** – Soient  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^m$  des solutions de (E). On dit que  $\tilde{y}$  est un prolongement de  $y$  si  $\tilde{I} \supset I$  et  $\tilde{y}|_I = y$ .

**Définition 2** – On dit qu'une solution  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  est maximale si  $y$  n'admet pas de prolongement  $\tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^m$  avec  $\tilde{I} \supsetneq I$ .

**Théorème** – Toute solution  $y$  se prolonge en une solution maximale  $\tilde{y}$  (pas nécessairement unique).

**Démonstration.\*** Supposons que  $y$  soit définie sur un intervalle  $I = [a, b]$  (cette notation désigne un intervalle ayant pour bornes  $a$  et  $b$ , incluses ou non dans  $I$ ). Il suffira de montrer que  $y$  se prolonge en une solution  $\tilde{y} : [a, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $\tilde{b} \geq b$ ) maximale à droite, c'est-à-dire qu'on ne pourra plus prolonger  $\tilde{y}$  au delà de  $\tilde{b}$ . Le même raisonnement s'appliquera à gauche.

Pour cela, on construit par récurrence des prolongements successifs  $y_{(1)}, y_{(2)} \dots$  de  $y$  avec  $y_{(k)} : [a, b_k] \rightarrow \mathbb{R}^m$ . On pose  $y_{(1)} = y$ ,  $b_1 = b$ . Supposons  $y_{(k-1)}$  déjà construite

pour un indice  $k \geq 1$ . On pose alors

$$c_k = \sup\{c; y_{(k-1)} \text{ se prolonge sur } [a, c[\}.$$

On a  $c_k \geq b_{k-1}$ . Par définition de la borne supérieure, il existe  $b_k$  tel que  $b_{k-1} \leq b_k \leq c_k$  et un prolongement  $y_{(k)} : [a, b_k] \rightarrow \mathbb{R}^m$  de  $y_{(k-1)}$  avec  $b_k$  arbitrairement voisin de  $c_k$  ; en particulier, on peut choisir

$$\begin{aligned} c_k - b_k &< \frac{1}{k} & \text{si } c_k < +\infty, \\ b_k &> k & \text{si } c_k = +\infty. \end{aligned}$$

La suite  $(c_k)$  est décroissante, car l'ensemble des prolongements de  $y_{(k-1)}$  contient l'ensemble des prolongements de  $y_{(k)}$  ; au niveau des bornes supérieures on a donc  $c_k \geq c_{k+1}$ . Si  $c_k < +\infty$  à partir d'un certain rang, les suites

$$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k \leq \dots \leq c_k \leq c_{k-1} \leq \dots \leq c_1$$

sont adjacentes, tandis que si  $c_k = +\infty$  quel que soit  $k$  on a  $b_k > k$ . Dans les deux cas, on voit que

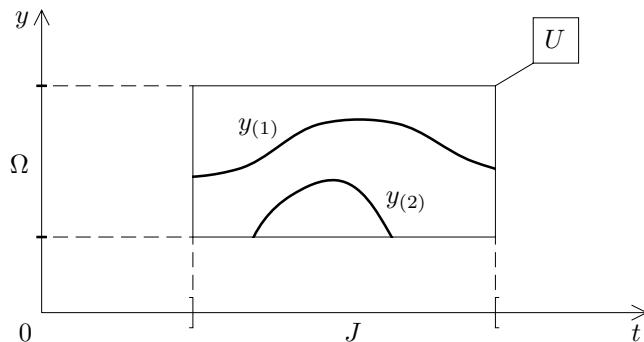
$$\tilde{b} = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} c_k.$$

Soit  $\tilde{y} : [a, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^m$  le prolongement commun des solutions  $y_{(k)}$ , éventuellement prolongé au point  $\tilde{b}$  si cela est possible. Soit  $z : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^m$  un prolongement de  $\tilde{y}$ . Alors  $z$  prolonge  $y_{(k-1)}$  et par définition de  $c_k$  il s'ensuit  $c \leq c_k$ . A la limite il vient  $c \leq \tilde{c}$ , ce qui montre que la solution  $\tilde{y}$  est maximale à droite. ■

#### 1.4. SOLUTIONS GLOBALES

On suppose ici que l'ouvert  $U$  est de la forme  $U = J \times \Omega$  où  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ .

**Définition** – Une solution globale est une solution définie sur l'intervalle  $J$  tout entier.



**Attention** : toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse.

Sur le schéma ci-dessus par exemple,  $y_{(1)}$  est globale tandis que  $y_{(2)}$  est maximale mais non globale.

Donnons un exemple explicite de cette situation.

**Exemple** – (E)  $y' = y^2$  sur  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Cherchons les solutions  $t \rightarrow y(t)$  de (E).

- On a d'une part la solution  $y(t) = 0$ .
- Si  $y$  ne s'annule pas, (E) s'écrit  $\frac{y'}{y^2} = 1$ , d'où par intégration

$$-\frac{1}{y(t)} = t + C, \quad y(t) = -\frac{1}{t + C}.$$

Cette formule définit en fait deux solutions, définies respectivement sur  $]-\infty, -C[$  et sur  $]-C, +\infty[$  ; ces solutions sont maximales mais non globales. Dans cet exemple  $y(t) = 0$  est la seule solution globale de (E).

### 1.5. RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS

Rappelons qu'une fonction de plusieurs variables est dite de classe  $C^k$  si elle admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre  $k$ .

**Théorème** – Si  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$  est de classe  $C^k$ , toute solution de (E)  $y' = f(t, y)$  est de classe  $C^{k+1}$ .

**Démonstration.** On raisonne par récurrence sur  $k$ .

- $k = 0$  :  $f$  continue.

Par hypothèse  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  est dérivable, donc continue.

Par conséquent  $y'(t) = f(t, y(t))$  est continue, donc  $y$  est de classe  $C^1$ .

- Si le résultat est vrai à l'ordre  $k - 1$ , alors  $y$  est au moins de classe  $C^k$ . Comme  $f$  est de classe  $C^k$ , il s'ensuit que  $y'$  est de classe  $C^k$  comme composée de fonctions de classe  $C^k$ , donc  $y$  est de classe  $C^{k+1}$ .

**Calcul des dérivées successives d'une solution  $y$**  – On suppose pour simplifier  $m = 1$ . En dérivant la relation  $y'(x) = f(x, y(x))$  il vient

$$\begin{aligned} y''(x) &= f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x))y'(x), \\ y'' &= f'_x(x, y) + f'(x, y)f(x, y) = f^{[1]}(x, y) \end{aligned}$$

avec  $f^{[1]} = f'_x + f'_y f$ . Notons de manière générale l'expression de la dérivée  $k$ -ième  $y^{(k)}$  en fonction de  $x, y$  sous la forme

$$y^{(k)} = f^{[k-1]}(x, y) ;$$

d'après ce qui précède  $f^{[0]} = f$ ,  $f^{[1]} = f'_x + f'_y f$ . En dérivant une nouvelle fois, on trouve

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= (f^{[k-1]})'_x(x, y) + (f^{[k-1]})'_y(x, y) y' \\ &= (f^{[k-1]})'_x(x, y) + (f^{[k-1]})'_y(x, y) f(x, y). \end{aligned}$$

On obtient donc les relations de récurrence

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= f^{[k]}(x, y) \\ f^{[k]} &= (f^{[k-1]})'_x + (f^{[k-1]})'_y f, \quad \text{avec} \quad f^{[0]} = f. \end{aligned}$$

En particulier, le lieu des points d'inflexion des courbes intégrales est contenu dans la courbe  $f^{[1]}(x, y) = 0$ .

## 2. THÉORÈME D'EXISTENCE DES SOLUTIONS

Dans tout ce paragraphe, on considère une équation différentielle

(E) 
$$y' = f(t, y)$$

où  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  est continue et  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ .

### 2.1. ÉQUIVALENCE DU PROBLÈME DE CAUCHY AVEC LA RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION INTÉGRALE

Le lemme très simple ci-dessous montre que la résolution de (E) est équivalente à la résolution d'une équation intégrale :

**Lemme** – *Une fonction  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une solution du problème de Cauchy de données initiales  $(t_0, y_0)$  si et seulement si*

- (i)  $y$  est continue et  $(\forall t \in I) (t, y(t)) \in U$ ,
- (ii)  $(\forall t \in I) y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du$ .

En effet si  $y$  vérifie (i) et (ii) alors  $y$  est différentiable et on a  $y(t_0) = y_0$ ,  $y'(t) = f(t, y(t))$ . Inversement, si ces deux relations sont satisfaites, (ii) s'en déduit par intégration. ■

### 2.2. CYLINDRES DE SÉCURITÉ

Pour résoudre l'équation différentielle (E), on va plutôt chercher à construire des solutions de l'équation intégrale 2.1 (ii), et en premier lieu, on va montrer qu'une solution passant par un point  $(t_0, y_0) \in U$  ne peut s'éloigner « trop vite » de  $y_0$ .

On note  $\|\cdot\|$  une norme quelconque sur  $\mathbb{R}^m$  et  $B(x, r)$  (resp.  $\overline{B}(x, r)$ ) la boule ouverte (resp. fermée) de centre  $x$  et de rayon  $r$  dans  $\mathbb{R}^m$ . Comme  $U$  est supposé ouvert, il existe un *cylindre*

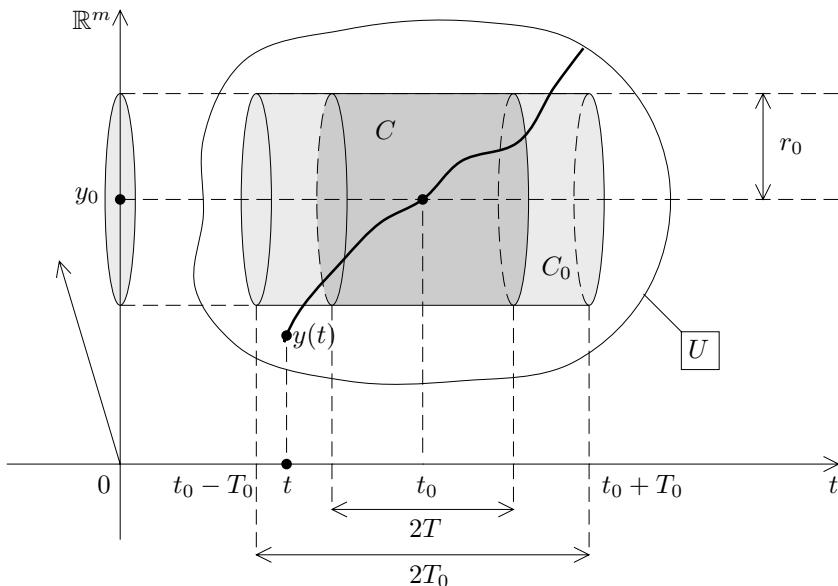
$$C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0)$$

de longueur  $2T_0$  et de rayon  $r_0$  assez petit, tel que  $C_0 \subset U$ . L'ensemble  $C_0$  est fermé dans  $\mathbb{R}^{m+1}$ , donc compact. Ceci entraîne que  $f$  est bornée sur  $C_0$ , c'est-à-dire

$$M = \sup_{(t,y) \in C_0} \|f(t, y)\| < +\infty.$$

Soit  $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset C_0$  un cylindre de même diamètre que  $C_0$  et de demi-longueur  $T \leq T_0$ .

**Définition** – On dit que  $C$  est un cylindre de sécurité pour l'équation (E) si toute solution  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  du problème de Cauchy  $y(t_0) = y_0$  avec  $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$  reste contenue dans  $\overline{B}(y_0, r_0)$ .



Sur le schéma ci-dessus,  $C$  est un cylindre de sécurité mais  $C_0$  n'en est pas un : la solution  $y$  « s'échappe » de  $C_0$  avant le temps  $t_0 + T_0$ .

Supposons que la solution  $y$  s'échappe de  $C$  sur l'intervalle  $[t_0, t_0 + T]$ . Soit  $\tau$  le premier instant où cela se produit :

$$\tau = \inf \{t \in [t_0, t_0 + T] ; \|y(t) - y_0\| > r_0\}.$$

Par définition de  $\tau$  on a  $\|y(t) - y_0\| \leq r$  pour  $t \in [t_0, \tau[$ , donc par continuité de  $y$  on obtient  $\|y(\tau) - y_0\| = r_0$ . Comme  $(t, y(t)) \in C \subset C_0$  pour  $t \in [t_0, \tau]$ , il vient  $\|y'(t)\| = \|f(t, y(t))\| \leq M$  et

$$r_0 = \|y(\tau) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^{\tau} y'(u) du \right\| \leq M(\tau - t_0)$$

donc  $\tau - t_0 \geq r_0/M$ . Par conséquent si  $T \leq r_0/M$ , aucune solution ne peut s'échapper de  $C$  sur  $[t_0 - T, t_0 + T]$ .

**Corollaire** – Pour que  $C$  soit un cylindre de sécurité, il suffit de prendre

$$T \leq \min \left( T_0, \frac{r_0}{M} \right).$$

Le choix  $T = \min \left( T_0, \frac{r_0}{M} \right)$  convient par exemple.

**Remarque** – Si  $C \subset C_0$  est un cylindre de sécurité, toute solution du problème de Cauchy  $y : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  vérifie  $\|y'(t)\| \leq M$ , donc  $y$  est lipschitzienne de rapport  $M$ .

### 2.3. SOLUTIONS APPROCHÉES. MÉTHODE D'EULER

On cherche à construire une solution approchée de (E) sur un intervalle  $[t_0, t_0 + T]$ . On se donne pour cela une subdivision

$$t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_{N-1} < t_N = t_0 + T.$$

Les pas successifs sont notés

$$h_n = t_{n+1} - t_n, \quad 0 \leq n \leq N - 1,$$

et on pose

$$h_{\max} = \max(h_0, \dots, h_{N-1}).$$

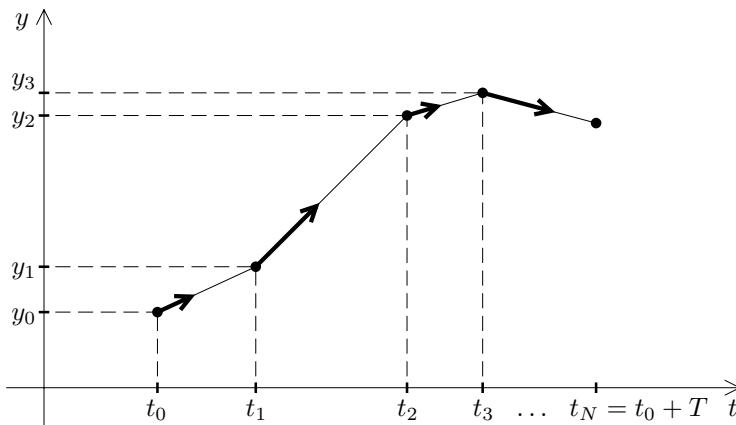
La méthode d'Euler (ou méthode de la tangente) consiste à construire une solution approchée  $y$  affine par morceaux comme suit. Soit  $y_n = y(t_n)$ . On confond la courbe intégrale sur  $[t_n, t_{n+1}]$  avec sa tangente au point  $(t_n, y_n)$  :

$$y(t) = y_n + (t - t_n)f(t_n, y_n), \quad t \in [t_n, t_{n+1}].$$

Partant de la donnée initiale  $y_0$ , on calcule donc  $y_n$  par récurrence en posant

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) \\ t_{n+1} = t_n + h_n, \quad 0 \leq n \leq N - 1. \end{cases}$$

La solution approchée  $y$  s'obtient graphiquement en traçant pour chaque  $n$  les segments joignant les points  $(t_n, y_n)$ ,  $(t_{n+1}, y_{n+1})$ .



On construit de même une solution approchée sur  $[t_0 - T, t_0]$  en prenant des pas  $h_n < 0$ .

**Proposition 1** — Si  $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$  est un cylindre de sécurité tel que  $T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M})$ , toute solution approchée  $y$  donnée par la méthode d'Euler est contenue dans la boule  $\overline{B}(y_0, r_0)$ .

**Démonstration.** On vérifie par récurrence sur  $n$  que

$$\begin{cases} y([t_0, t_n]) \subset \overline{B}(y_0, r_0) \\ \|y(t) - y_0\| \leq M(t - t_0) \quad \text{pour } t \in [t_0, t_n]. \end{cases}$$

C'est trivial pour  $n = 0$ . Si c'est vrai pour  $n$ , alors on a en particulier  $(t_n, y_n) \in C$ , donc  $\|f(t_n, y_n)\| \leq M$ , et par conséquent

$$\|y(t) - y_n\| = (t - t_n) \|f(t_n, y_n)\| \leq M(t - t_n)$$

pour  $t \in [t_n, t_{n+1}]$ . Par hypothèse de récurrence

$$\|y_n - y_0\| = \|y(t_n) - y_0\| \leq M(t_n - t_0).$$

L'inégalité triangulaire entraîne alors  $\forall t \in [t_n, t_{n+1}] :$

$$\|y(t) - y_0\| \leq M(t - t_n) + M(t_n - t_0) \leq M(t - t_0).$$

En particulier  $\|y(t) - y_0\| \leq MT \leq r_0$ , d'où

$$y([t_0, t_{n+1}]) \subset \overline{B}(y_0, r_0).$$

■

**Définition** — Soit  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction de classe  $C^1$  par morceaux (ceci signifie qu'il existe une subdivision  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$  de  $[a, b]$  telle que pour tout  $n$  la restriction  $y|_{[a_n, a_{n+1}]}$  soit de classe  $C^1$  ; on suppose donc seulement la continuité et l'existence d'une dérivée à droite et à gauche de  $y$  aux points  $a_n$ ). On dit que  $y$  est une solution  $\varepsilon$ -approchée de (E) si

- (i)  $(\forall t \in [a, b]) \quad (t, y(t)) \in U$  ;
- (ii)  $(\forall n), (\forall t \in [a_n, a_{n+1}]) \quad \|y'(t) - f(t, y(t))\| \leq \varepsilon$ .

Autrement dit,  $y$  est une solution  $\varepsilon$ -approchée si  $y$  vérifie (E) avec une erreur  $\leq \varepsilon$ .

**Majoration de l'erreur pour les solutions approchées d'Euler** – Soit  $\omega_f$  le module de continuité de  $f$  sur  $C$ , défini par

$$\omega_f(u) = \max\{\|f(t_1, y_1) - f(t_2, y_2)\|; |t_1 - t_2| + \|y_1 - y_2\| \leq u\}$$

où  $u \in [0, +\infty[$  et où les points  $(t_1, y_1)$ ,  $(t_2, y_2)$  parcourent  $C$ . Comme  $C$  est compact, la fonction  $f$  est uniformément continue sur  $C$ , par conséquent

$$\lim_{u \rightarrow 0_+} \omega_f(u) = 0.$$

On suppose dans la suite que  $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$  est un cylindre de sécurité tel que  $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$ .

**Proposition 2** – Soit  $y : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  une solution approchée construite par la méthode d'Euler avec pas maximum  $h_{\max}$ . Alors l'erreur  $\varepsilon$  vérifie  $\varepsilon \leq \omega_f((M + 1)h_{\max})$ .

En particulier, l'erreur  $\varepsilon$  tend vers 0 quand  $h_{\max}$  tend vers 0.

**Démonstration.** Majorons par exemple  $\|y'(t) - f(t, y(t))\|$  pour  $t \in [t_0, t_0 + T]$ , où  $y$  est la solution approchée associée à la subdivision  $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$ . Pour  $t \in ]t_n, t_{n+1}[$ , on a  $y'(t) = f(t_n, y_n)$  et

$$\begin{aligned} \|y(t) - y_n\| &= (t - t_n)\|f(t_n, y_n)\| \leq Mh_n, \\ |t - t_n| &\leq h_n. \end{aligned}$$

Par définition de  $\omega_f$ , il vient

$$\begin{aligned} \|f(t_n, y_n) - f(t, y(t))\| &\leq \omega_f(Mh_n + h_n), \\ \|y'(t) - f(t, y(t))\| &\leq \omega_f((M + 1)h_{\max}). \end{aligned}$$

■

Montrons finalement un résultat sur la convergence des solutions approchées.

**Proposition 3** – Soit  $y_{(p)} : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  une suite de solutions  $\varepsilon_p$ -approchées contenues dans le cylindre de sécurité  $C$ , telles que  $y_{(p)}(t_0) = y_0$  et  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \varepsilon_p = 0$ . On suppose que  $y_{(p)}$  converge uniformément sur  $[t_0 - T, t_0 + T]$  vers une fonction  $y$ . Alors  $y$  est une solution exacte du problème de Cauchy pour l'équation (E).

**Démonstration.** Comme  $\|y'_{(p)}(t) - f(t, y_{(p)}(t))\| \leq \varepsilon_p$ , il vient après intégration

$$\|y_{(p)}(t) - y_0 - \int_{t_0}^t f(u, y_{(p)}(u))du\| \leq \varepsilon_p |t - t_0|.$$

Si  $\delta_p = \max_{[t_0-T, t_0+T]} \|y - y_{(p)}\|$ , on voit que

$$\|f(u, y_{(p)}(u)) - f(u, y(u))\| \leq \omega_f(\delta_p)$$

tend vers 0, d'où, grâce à la convergence uniforme :

$$y(t) - y_0 - \int_{t_0}^t f(u, y(u))du = 0, \quad \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

Comme la limite uniforme  $y$  est continue, le lemme du début du § 2 entraîne que  $y$  est une solution exacte de (E).

## 2.4. THÉORÈME D'ASCOLI

Il s'agit d'un résultat préliminaire de nature topologique que nous allons formuler dans le cadre général des espaces métriques. Si  $(E, \delta)$  et  $(F, \delta')$  sont des espaces métriques, rappelons que par définition une suite d'applications  $\varphi_{(p)} : E \rightarrow F$  converge uniformément vers  $\varphi : E \rightarrow F$  si la distance uniforme

$$d(\varphi_{(p)}, \varphi) = \sup_{x \in E} \delta'(\varphi_{(p)}(x), \varphi(x))$$

tend vers 0 quand  $p$  tend vers  $+\infty$ .

**Théorème** (Ascoli) – *On suppose que  $E, F$  sont des espaces métriques compacts. Soit  $\varphi_{(p)} : E \rightarrow F$  une suite d'applications  $k$ -lipschitziennes, où  $k \geq 0$  est une constante donnée. Alors on peut extraire de  $\varphi_{(p)}$  une sous-suite  $\varphi_{(p_n)}$  uniformément convergente, et la limite est une application  $k$ -lipschitzienne.*

Soit  $\text{Lip}_k(E, F)$  l'ensemble des applications  $E \rightarrow F$  lipschitziennes de rapport  $k$ . Une autre manière d'exprimer le théorème d'Ascoli est la suivante.

**Corollaire** – *Si  $E, F$  sont compacts, alors  $(\text{Lip}_k(E, F), d)$  est un espace métrique compact.*

**Démonstration.** On construit par récurrence des parties infinies

$$S_0 = \mathbb{N} \supset S_1 \supset \dots \supset S_{n-1} \supset S_n \supset \dots$$

telles que la sous-suite  $(\varphi_{(p)})_{p \in S_n}$  ait des oscillations de plus en plus faibles.

Supposons  $S_{n-1}$  construite,  $n \geq 1$ . Comme  $E, F$  sont compacts, il existe des recouvrements finis de  $E$  (resp. de  $F$ ) par des boules ouvertes  $(B_i)_{i \in I}$ , resp.  $(B'_j)_{j \in J}$ , de rayon  $\frac{1}{n}$ . Notons  $I = \{1, 2, \dots, N\}$  et  $x_i$  le centre de  $B_i$ . Soit  $p$  un indice fixé. Pour tout  $i = 1, \dots, N$  il existe un indice  $j = j(p, i)$  tel que  $\varphi_{(p)}(x_i) \in B'_{j(p, i)}$ .

On considère l'application

$$S_{n-1} \longrightarrow J^N, \quad p \longmapsto (j(p, 1), \dots, j(p, N)).$$

Comme  $S_{n-1}$  est infini et que  $J^N$  est fini, l'un des éléments  $(l_1, \dots, l_N) \in J^N$  admet pour image réciproque une partie infinie de  $S_{n-1}$  : on note  $S_n$  cette partie. Ceci signifie que pour tout  $p \in S_n$  on a  $(j(p, 1), \dots, j(p, N)) = (l_1, \dots, l_N)$  et donc  $\varphi_{(p)}(x_i) \in B'_{l_i}$ . En particulier

$$(\forall p, q \in S_n) \quad \delta'(\varphi_{(p)}(x_i), \varphi_{(q)}(x_i)) \leq \text{diam } B'_{l_i} \leq \frac{2}{n}.$$

Soit  $x \in E$  un point quelconque. Il existe  $i \in I$  tel que  $x \in B_i$ , d'où  $\delta(x, x_i) < \frac{1}{n}$ . L'hypothèse que les  $\varphi_{(p)}$  sont  $k$ -lipschitziennes entraîne

$$\delta'(\varphi_{(p)}(x), \varphi_{(p)}(x_i)) < \frac{k}{n}, \quad \delta'(\varphi_{(q)}(x), \varphi_{(q)}(x_i)) < \frac{k}{n}.$$

L'inégalité triangulaire implique alors  $(\forall p, q \in S_n)$

$$\delta'(\varphi_{(p)}(x), \varphi_{(q)}(x)) \leq \frac{2}{n} + 2 \frac{k}{n} = \frac{2k+2}{n}.$$

Désignons par  $p_n$  le  $n$ -ième élément de  $S_n$ . Pour  $N \geq n$  on a  $p_N \in S_N \subset S_n$ , donc

$$\delta'(\varphi_{(p_n)}(x), \varphi_{(p_N)}(x)) \leq \frac{2k+2}{n}. \quad (*)$$

Ceci entraîne que  $\varphi_{(p_n)}(x)$  est une suite de Cauchy dans  $F$  pour tout  $x \in E$ . Comme  $F$  est compact,  $F$  est aussi complet, donc  $\varphi_{(p_n)}(x)$  converge vers une limite  $\varphi(x)$ . Quand  $N \rightarrow +\infty$ ,  $(*)$  implique à la limite  $d(\varphi_{(p_n)}, \varphi) \leq \frac{2k+2}{n}$ . On voit donc que  $\varphi_{(p_n)}$  converge uniformément vers  $\varphi$ . Il est facile de voir que  $\varphi \in \text{Lip}_k(E, F)$ . ■

**Exercice** – On pose  $E = [0, \pi]$ ,  $F = [-1, 1]$ ,  $\varphi_p(x) = \cos px$ . Calculer

$$\int_0^\pi (\varphi_p(x) - \varphi_q(x))^2 dx$$

et en déduire que  $d(\varphi_p, \varphi_q) \geq 1$  si  $p \neq q$ . L'espace

$$\text{Lip}(E, F) = \bigcup_{k \geq 0} \text{Lip}_k(E, F)$$

est-il compact ?

## 2.5. THÉORÈME D'EXISTENCE (CAUCHY-Peano-ARZELA)

L'idée est d'utiliser le théorème d'Ascoli pour montrer l'existence d'une sous-suite uniformément convergente de solutions approchées. On obtient ainsi le

**Théorème** – Soit  $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$  avec  $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$  un cylindre de sécurité pour l'équation (E) :  $y' = f(t, y)$ . Alors il existe une solution  $y : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \overline{B}(y_0, r_0)$  de (E) avec condition initiale  $y'(t_0) = y_0$ .

**Démonstration.** Soit  $y_{(p)}$  la solution approchée donnée par la méthode d'Euler en utilisant la subdivision avec pas constant  $h = T/p$  des intervalles  $[t_0, t_0 + T]$  et  $[t_0 - T, t_0]$ . Cette solution est  $\varepsilon_p$ -approchée avec erreur  $\varepsilon_p \leq \omega_f((M+1)T/p)$  tendant vers 0. Chaque application  $y_{(p)} : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \overline{B}(y_0, r_0)$  est lipschitzienne de rapport  $M$ , donc d'après le théorème d'Ascoli on peut extraire de  $(y_{(p)})$  une sous-suite  $(y_{(p_n)})$  convergeant uniformément vers une limite  $y$ . D'après la proposition 3 du § 2.3,  $y$  est une solution exacte de l'équation (E).  $\blacksquare$

**Corollaire** — *Par tout point  $(t_0, y_0) \in U$ , il passe au moins une solution maximale  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  de (E). De plus, l'intervalle de définition  $I$  de toute solution maximale est ouvert (mais en général, il n'y a pas unicité de ces solutions maximales).*

On vient de voir en effet qu'il existe une solution locale  $z$  définie sur un intervalle  $[t_0 - T, t_0 + T]$ . D'après le théorème du § 1.3,  $z$  se prolonge en une solution maximale  $y = \tilde{z} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Si  $y$  était définie au point  $b$ , il existerait une solution  $y_{(1)} : [b - \varepsilon, b + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^m$  du problème de Cauchy avec donnée initiale  $(b, y(b)) \in U$ . La fonction  $\tilde{y} : [a, b + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^m$  coïncidant avec  $y$  sur  $[a, b]$  et avec  $y_{(1)}$  sur  $[b, b + \varepsilon]$  serait alors un prolongement strict de  $y$ , ce qui est absurde.  $\blacksquare$

**Exemple** — Pour donner un exemple de non unicité, il suffit de considérer l'équation  $y' = 3|y|^{2/3}$ . Le problème de Cauchy de condition initiale  $y(0) = 0$  admet alors au moins 2 solutions maximales :

$$y_{(1)}(t) = 0, \quad y_{(2)}(t) = t^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

## 2.6. CRITÈRE DE MAXIMALITÉ DES SOLUTIONS

Nous allons voir ici une condition géométrique nécessaire et suffisante permettant d'affirmer qu'une solution est maximale.

**Théorème** — *U un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$  et  $y : I = [t_0, b[ \rightarrow \mathbb{R}^m$  une solution de l'équation (E)  $y' = f(t, y)$ , où  $f$  est une fonction continue sur  $U$ . Alors  $y(t)$  peut se prolonger au delà de  $b$  si et seulement si il existe un compact  $K \subset U$  tel que la courbe  $t \mapsto (t, y(t))$ ,  $t \in [t_0, b[$ , reste contenue dans  $K$ .*

Autrement dit,  $y$  est non prolongeable au delà du temps  $b$  si et seulement si  $(t, y(t))$  s'échappe de tout compact  $K$  de  $U$  quand  $t \rightarrow b_-$ . La conséquence suivante est immédiate.

**Critère de maximalité** — *Une solution  $y : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^m$  de (E) est maximale si et seulement si  $t \mapsto (t, y(t))$  s'échappe de tout compact  $K$  de  $U$  quand  $t \rightarrow a_+$  ou quand  $t \rightarrow b_-$ . Puisque les compacts sont les parties fermées bornées, ceci signifie encore que  $(t, y(t))$  s'approche du bord de  $U$  ou tend vers  $\infty$ , c'est-à-dire  $|t| + \|y(t)\| + 1/d((t, y(t)), \partial U) \rightarrow +\infty$  quand  $t \rightarrow a_+$  ou  $t \rightarrow b_-$ .*

**Démonstration du théorème.** La condition de prolongement est évidemment nécessaire, puisque si  $y(t)$  se prolonge à  $[t_0, b]$ , alors l'image du compact  $[t_0, b]$  par l'application continue  $t \mapsto (t, y(t))$  est un compact  $K \subset U$ .

Inversement, supposons qu'il existe un compact  $K$  de  $U$  tel que  $(t, y(t)) \in K$  pour tout  $t \in [t_0, b[$ . Posons

$$M = \sup_{(t,y) \in K} \|f(t, y)\| < +\infty$$

qui est fini par continuité de  $|f|$  et compacité de  $K$ . Ceci entraîne que  $t \mapsto y(t)$  est lipschitzienne sur  $[t_0, b[$ , donc uniformément continue, et le critère de cauchy montre que la limite  $\ell = \lim_{t \rightarrow b^-} y(t)$  existe. Nous pouvons prolonger  $y$  par continuité en  $b$  en posant  $y(b) = \ell$ , et nous avons  $(b, y(b)) \in K \subset U$  puisque  $K$  est fermé. La relation  $y'(t) = f(t, y(t))$  montre alors que  $y$  est de classe  $C^1$  sur  $[t_0, b]$ . Maintenant, le théorème d'existence locale des solutions implique qu'il existe une solution locale  $z$  d'problème de Cauchy de donnée initiale  $z(b) = \ell = y(b)$  sur un intervalle  $[b-\varepsilon, b+\varepsilon]$ . On obtient alors un prolongement  $\tilde{y}$  de  $y$  sur  $[t_0, b+\varepsilon]$  en posant  $\tilde{y}(t) = z(t)$  pour  $t \in [b, b+\varepsilon]$ . Le théorème est démontré.  $\blacksquare$

### 3. THÉORÈME D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ DE CAUCHY-LIPSCHITZ

Reprendons les notations du début du § 2. On suppose ici en outre que  $f$  est *localement lipschitzienne* en  $y$  : cela signifie que pour tout point  $(t_0, y_0) \in U$  il existe un cylindre  $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset U$  et une constante  $k = k(t_0, y_0) \geq 0$  tels que  $f$  soit  $k$ -lipschitzienne en  $y$  sur  $C_0$  :

$$\left( \forall (t, y_1), (t, y_2) \in C_0 \right) \quad \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|.$$

**Remarque** – Pour que  $f$  soit localement lipschitzienne en  $y$  sur  $U$ , il suffit que  $f$  admette des dérivées partielles  $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ , continues sur  $U$ . Soit en effet

$$A = \max_{1 \leq i, j \leq m} \sup_{(t, y) \in C_0} \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} (t, y) \right|.$$

Le nombre  $A$  est fini puisque  $C_0$  est compact. Le théorème des accroissement finis appliqués à  $f_i$  sur  $C_0$  donne

$$f_i(t, y_1) - f_i(t, y_2) = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial y_j} (t, \xi) (y_{1,j} - y_{2,j})$$

avec  $\xi \in ]y_1, y_2[$ . On a donc

$$\max_i |f_i(t, y_1) - f_i(t, y_2)| \leq mA \cdot \max_j |y_{1,j} - y_{2,j}|.$$

$\blacksquare$

Sous ces hypothèses sur  $f$ , nous allons montrer que la solution du problème de Cauchy est nécessairement unique, et que de plus toute suite de solutions  $\varepsilon$ -approchées avec  $\varepsilon$  tendant vers 0 converge nécessairement vers la solution exacte. Compte tenu de l'importance de ces résultats, nous donnerons ensuite une deuxième démonstration assez différente basée sur le théorème du point fixe (chapitre IV, § 1.1).

### 3.1. LEMME DE GRONWALL. CONVERGENCE ET UNICITÉ LOCALES

Soit  $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset U$  un cylindre sur lequel  $f$  est  $k$ -lipschitzienne en  $y$  et soit  $M = \sup_{C_0} \|f\|$ . On se donne  $\varepsilon > 0$  et on considère des solutions  $y_{(1)}$  et  $y_{(2)}$  respectivement  $\varepsilon_1$ -approchée et  $\varepsilon_2$ -approchée du problème de Cauchy de donnée initiale  $(t_0, y_0)$ , avec  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq \varepsilon$ .

On a alors  $\|y'_{(i)}(t)\| \leq M + \varepsilon$ , et un raisonnement analogue à celui du § 2.1 montre que les graphes de  $y_{(1)}, y_{(2)}$  restent contenus dans le cylindre

$$C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y, r_0) \subset C_0$$

dès que  $T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M+\varepsilon})$ , ce qu'on suppose désormais.

**Lemme de Gronwall** — *Sous les hypothèses précédentes, on a*

$$\|y_{(2)}(t) - y_{(1)}(t)\| \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}, \quad \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

**Démonstration.** Quitte à changer l'origine du temps on peut supposer  $t_0 = 0$  et, par exemple,  $t \in [0, T]$ . Posons alors

$$v(t) = \int_0^t \|y_{(2)}(u) - y_{(1)}(u)\| du.$$

Comme  $y_{(i)}$  satisfait l'équation différentielle à  $\varepsilon_i$  près, on obtient par soustraction

$$\begin{aligned} \|y'_{(2)}(t) - y'_{(1)}(t)\| &\leq \|f(t, y_{(2)}(t)) - f(t, y_{(1)}(t))\| + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ &\leq k \|y_{(2)}(t) - y_{(1)}(t)\| + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne en  $y$ . De plus

$$y_{(2)}(t) - y_{(1)}(t) = \int_0^t (y'_{(2)}(u) - y'_{(1)}(u)) du$$

puisque  $y_{(2)}(0) = y_{(1)}(0) = y_0$ . On en déduit

$$\|y_{(2)}(t) - y_{(1)}(t)\| \leq k \int_0^t \|y_{(2)}(u) - y_{(1)}(u)\| du + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t \quad (*)$$

c'est-à-dire

$$v'(t) \leq kv(t) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t.$$

Après soustraction de  $kv(t)$  et multiplication par  $e^{-kt}$ , on trouve

$$(v'(t) - kv(t))e^{-kt} = \frac{d}{dt} (v(t)e^{-kt}) \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)te^{-kt}.$$

Grâce à une nouvelle intégration (noter que  $v(0) = 0$ ), il vient

$$\begin{aligned} v(t)e^{-kt} &\leq \int_0^t (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)ue^{-ku}du = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{1 - (1 + kt)e^{-kt}}{k^2}, \\ v(t) &\leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{e^{kt} - (1 + kt)}{k^2}, \end{aligned}$$

tandis que la première inégalité intégrée (\*) donne

$$\|y_{(2)}(t) - y_{(1)}(t)\| \leq kv(t) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{e^{kt} - 1}{k}.$$

Le cas où  $t \in [-T, 0]$  s'obtient par un changement de variable  $t \mapsto -t$ . ■

**Théorème** (Cauchy-Lipschitz) – *Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  est localement lipschitzienne en  $y$ , alors pour tout cylindre de sécurité  $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$  comme ci-dessus, le problème de Cauchy avec condition initiale  $(t_0, y_0)$  admet une unique solution exacte  $y : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow U$ . De plus, toute suite  $y_{(p)}$  de solutions  $\varepsilon_p$ -approchées avec  $\varepsilon_p$  tendant vers 0 converge uniformément vers la solution exacte  $y$  sur  $[t_0 - T, t_0 + T]$ .*

**Existence.** Soit  $y_{(p)}$  une suite quelconque de solutions  $\varepsilon_p$  approchées avec  $\lim \varepsilon_p = 0$ , par exemple celles fournies par la méthode d'Euler. Le lemme de Gronwall montre que

$$d(y_{(p)}, y_{(q)}) \leq (\varepsilon_p + \varepsilon_q) \frac{e^{kT} - 1}{k} \quad \text{sur } [t_0 - T, t_0 + T],$$

par conséquent  $y_{(p)}$  est une suite de Cauchy uniforme. Comme les fonctions  $y_{(p)}$  sont toutes à valeurs dans  $\overline{B}(y_0, r_0)$  qui est un espace complet,  $y_{(p)}$  converge vers une limite  $y$ . Cette limite  $y$  est une solution exacte de l'équation (E) d'après la proposition 3 du § 2.3.

**Unicité.** Si  $y_{(1)}, y_{(2)}$  sont deux solutions exactes, le lemme de Gronwall avec  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  montre que  $y_{(1)} = y_{(2)}$ . ■

### 3.2.\* AUTRE DÉMONSTRATION (PAR LE THÉORÈME DU POINT FIXE)

Soit  $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset C_0$  avec  $T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M})$  un cylindre de sécurité pour (E).

Notons  $\mathcal{F} = \mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(y_0, r_0))$  l'ensemble des applications continues de  $[t_0 - T, t_0 + T]$  dans  $\overline{B}(y_0, r_0)$ , muni de la distance  $d$  de la convergence uniforme.

A toute fonction  $y \in \mathcal{F}$ , associons la fonction  $\phi(y)$  définie par

$$\phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u))du, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

D'après le lemme du § 2.1,  $y$  est une solution de (E) si et seulement si  $y$  est un point fixe de  $\phi$ . On va donc essayer d'appliquer le théorème du point fixe. Observons que

$$\|\phi(y)(t) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du \right\| \leq M|t - t_0| \leq MT \leq r_0,$$

donc  $\phi(y) \in \mathcal{F}$ . L'opérateur  $\phi$  envoie donc  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}$ . Soient maintenant  $y, z \in F$  et  $y_{(p)} = \phi^p(y)$ ,  $z_{(p)} = \phi^p(z)$ . On a

$$\begin{aligned} \|y_{(1)}(t) - z_{(1)}(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t (f(u, y(u)) - f(u, z(u))) du \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t k \|y(u) - z(u)\| du \right| \leq k|t - t_0| d(y, z). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \|y_{(2)}(t) - z_{(2)}(t)\| &\leq \left| \int_0^t k \|y_1(u) - z_1(u)\| du \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t k \cdot k|u - t_0| d(y, z) du \right| = k^2 \frac{|t - t_0|^2}{2} d(y, z). \end{aligned}$$

Par récurrence sur  $p$ , on vérifie aussitôt que

$$\|y_{(p)}(t) - z_{(p)}(t)\| \leq k^p \frac{|t - t_0|^p}{p!} d(y, z),$$

en particulier

$$d(\phi^p(y), \phi^p(z)) = d(y_{(p)}, z_{(p)}) \leq \frac{k^p T^p}{p!} d(y, z) \quad (*)$$

et  $\phi^p$  est lipschitzienne de rapport  $\frac{k^p T^p}{p!}$  sur  $\mathcal{F}$ . Comme  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{k^p T^p}{p!} = 0$ , il existe  $p$  assez grand tel que  $\frac{k^p T^p}{p!} < 1$  ; pour une telle valeur de  $p$ ,  $\phi^p$  est une application contractante de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{F}$ . Par ailleurs,  $\mathcal{F}$  est un espace métrique complet. Le théorème du point fixe démontré au chapitre IV (dans sa version généralisée au cas d'applications dont une itérée est contractante) montre alors que  $\phi$  admet un point fixe unique  $y$ . Nous avons donc bien redémontré le théorème de Cauchy-Lipschitz affirmant l'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy. ■

**Remarque** – D'après (\*), on voit que pour toute fonction  $z \in \mathcal{F}$  la suite itérée  $z_{(p)} = \phi^p(z)$  converge uniformément vers la solution exacte  $y$  du problème de Cauchy.

### 3.3. UNICITÉ GLOBALE

Le théorème d'unicité locale entraîne facilement un résultat d'unicité globale, au moyen d'un « raisonnement de connexité ».

**Théorème** – Soient  $y_{(1)}, y_{(2)} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  deux solutions de  $(E)$ , avec  $f$  localement lipschitzienne en  $y$ . Si  $y_{(1)}$  et  $y_{(2)}$  coïncident en un point de  $I$ , alors  $y_{(1)} = y_{(2)}$  sur  $I$ .

**Démonstration.** Supposons  $y_{(1)}(t_0) = y_{(2)}(t_0)$  en un point  $t_0 \in I$ . Montrons par exemple que  $y_{(1)}(t) = y_{(2)}(t)$  pour  $t \geq t_0$ . S'il n'en est pas ainsi, considérons le premier instant  $\tilde{t}_0$  où  $y_{(1)}$  et  $y_{(2)}$  bifurquent :

$$\tilde{t}_0 = \inf\{t \in I; t \geq t_0 \text{ et } y_{(1)}(t) \neq y_{(2)}(t)\}$$

On a par définition  $y_{(1)}(t) = y_{(2)}(t)$  pour  $t \in [t_0, \tilde{t}_0[$  et par continuité il s'ensuit que  $y_{(1)}(\tilde{t}_0) = y_{(2)}(\tilde{t}_0)$ . Soit  $\tilde{y}_0$  ce point et soit  $\tilde{C} = [\tilde{t}_0 - \tilde{T}, \tilde{t}_0 + \tilde{T}] \times \overline{B}(\tilde{y}_0, \tilde{r}_0)$  un cylindre de sécurité de centre  $(\tilde{t}_0, \tilde{y}_0)$ . Le théorème d'unicité locale implique que  $y_{(1)} = y_{(2)}$  sur  $[\tilde{t}_0 - \tilde{T}, \tilde{t}_0 + \tilde{T}]$ , ce qui contredit la définition de  $\tilde{t}_0$ . L'unicité est démontrée. ■

**Corollaire** – Si  $f$  est localement lipschitzienne en  $y$  sur  $U$ , pour tout point  $(t_0, y_0) \in U$  il passe une solution maximale  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  et une seule.

**Interprétation géométrique** – Le théorème d'unicité signifie géométriquement que des courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper.

**Exemple** –  $y' = 3|y|^{2/3}$  sur  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

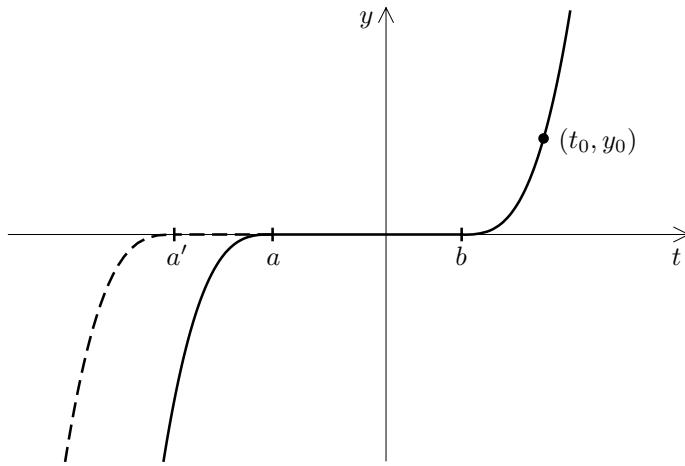
Déterminons l'ensemble des solutions maximales. On a ici  $f(t, y) = 3|y|^{2/3}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = \text{signe}(y) \times 2|y|^{-1/3}$  pour  $y \neq 0$ . La dérivée  $y \neq 0$  la dérivée  $\frac{\partial f}{\partial y}$  est continue sur les demi-plans  $y > 0$  et  $y < 0$ , mais discontinue en  $y = 0$ . La fonction  $f$  est localement lipschitzienne en  $y$  sur  $\{y > 0\}$  et  $\{y < 0\}$ , mais il est facile de voir qu'elle ne l'est pas au voisinage de tout point  $(t_0, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$  (on a vu d'ailleurs qu'il n'y a pas d'unicité locale en ces points). Sur  $\{y > 0\}$  (resp. sur  $\{y < 0\}$ ) l'équation équivaut à

$$\frac{1}{3} y' y^{-\frac{2}{3}} = 1 \quad (\text{resp.} \quad -\frac{1}{3} y' (-y)^{-\frac{2}{3}} = -1)$$

d'où  $y^{\frac{1}{3}} = t + C_1$  (resp.  $(-y)^{-\frac{1}{3}} = -(t + C_2)$ ) soit  $y(t) = (t + C_i)^3$ . Si  $y$  est une solution maximale dans  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , alors  $y' \geq 0$ , donc  $y$  est croissante. Notons

$$a = \inf\{t; y(t) = 0\}, \quad b = \sup\{t; y(t) = 0\}.$$

Si  $a \neq -\infty$ , on a  $y(a) = 0$  et  $y(t) < 0$  pour  $t < a$ , donc  $y(t) = (t - a)^3$ . De même  $y(t) = (t - b)^3$  pour  $t > b$  si  $b \neq +\infty$ .



On voit que pour tout point  $(t_0, y_0)$  il passe une infinité de solutions maximales : si  $y_0 > 0$ ,  $b = t_0 - y_0^{1/3}$  est imposé, mais le choix de  $a \in [-\infty, b]$  est arbitraire. Noter que ce phénomène se produit bien qu'on ait unicité locale au point  $(t_0, y_0)$  !

### 3.4. CONDITIONS SUFFISANTES D'EXISTENCE DE SOLUTIONS GLOBALES

Nous donnons ici des conditions suffisantes d'existence pour les solutions globales, reposant sur des hypothèses de croissance de  $f(t, y)$  lorsque  $\|y\|$  tend vers  $+\infty$ . On peut cependant obtenir des conditions suffisantes nettement plus faibles (voir l'exercice (b) ci-dessous, ainsi que le problème 5.9).

**Théorème** — Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application continue sur un ouvert produit  $U = J \times \mathbb{R}^m$ , où  $J \subset \mathbb{R}$  est un intervalle ouvert. On fait l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes :

- (1) Il existe une fonction continue  $k : J \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que pour tout  $t \in J$  fixé, l'application  $y \mapsto f(t, y)$  soit lipschitzienne de rapport  $k(t)$  sur  $\mathbb{R}^m$ .
- (2) Il existe des fonctions  $c, k : J \rightarrow \mathbb{R}_+$  continues telles que l'application  $y \mapsto f(t, y)$  satisfasse une croissance linéaire à l'infini du type

$$\|f(t, y)\| \leq c(t) + k(t)\|y\|.$$

Alors toute solution maximale de l'équation différentielle  $y' = f(t, y)$  est globale (c'est-à-dire définie sur  $J$  tout entier).

**Démonstration.** Il est évident que l'hypothèse (1) entraîne l'hypothèse (2) (avec  $c(t) = \|f(t, 0)\|$ ), il suffirait donc de donner la preuve pour (2). Cependant, il y a une démonstration sensiblement plus simple sous l'hypothèse (1).

*Démonstration sous l'hypothèse (1).* Soit  $(t_0, y_0) \in J \times \mathbb{R}^m$ , et  $[t_0 - T, t_0 + T']$  un intervalle compact quelconque contenu dans  $J$ . Reprenons la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Comme  $U = J \times \mathbb{R}^m$ , on peut choisir un cylindre de sécurité de rayon  $r_0 = +\infty$ . L'application  $\phi$  définie au § 3.2 opère donc sur l'espace complet

$$\mathcal{F} = \mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T'], \mathbb{R}^m).$$

Soit

$$K = \max_{t \in [t_0 - T, t_0 + T']} k(t).$$

L'application  $f$  est par hypothèse  $K$ -lipschitzienne en  $y$  sur  $[t_0 - T, t_0 + T'] \times \mathbb{R}^m$ . D'après le raisonnement du § 3.2, l'application  $\phi^p$  est lipschitzienne de rapport  $\frac{1}{p!} K^p (\max(T, T'))^p$  sur  $\mathcal{F}$ , donc contractante pour  $p$  assez grand. Ceci implique que la solution (unique) du problème de Cauchy est définie sur tout intervalle  $[t_0 - T, t_0 + T'] \subset J$ .  $\blacksquare$

*Démonstration sous l'hypothèse (2).* L'idée est d'utiliser le critère de maximalité des solutions démontré au 2.6. Supposons qu'on ait une solution  $y : [t_0, b[ \rightarrow \mathbb{R}^m$  avec  $t_0, b \in J$  (autrement dit, telle que  $b$  ne soit pas la borne supérieure de  $J$ ). Posons  $C = \sup_{t \in [t_0, b]} c(t)$  et  $K = \sup_{t \in [t_0, b]} k(t)$ . Nous obtenons

$$\|y'(t)\| = \|f(t, y(t))\| \leq C + K\|y(t)\|.$$

On utilise alors un raisonnement de type lemme de Gronwall pour majorer la norme  $\|y(t)\|$ . Nous avons  $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t y'(u) du$ , donc

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq v(t) = \|y(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|y'(u)\| du \quad \text{avec} \\ v'(t) &= \|y'(t)\| \leq C + K\|y(t)\| \leq C + Kv(t). \end{aligned}$$

Ceci donne la majoration

$$\frac{d}{dt} (v(t) e^{-K(t-t_0)}) = (v'(t) - K v(t)) e^{-K(t-t_0)} \leq C e^{-K(t-t_0)}.$$

Par intégration sur  $[t_0, t]$ , on obtient

$$v(t) e^{-K(t-t_0)} - v(t_0) \leq \frac{C}{K} (1 - e^{-K(t-t_0)}),$$

et comme  $v(t_0) = \|y(t_0)\|$ , il vient

$$\sup_{t \in [t_0, b[} \|y(t)\| \leq \sup_{t \in [t_0, b[} v(t) \leq R = \frac{C}{K} (e^{K(b-t_0)} - 1) + \|y(t_0)\| e^{K(b-t_0)}.$$

Par conséquent  $(t, y(t))$  décrit une partie compacte  $K = [t_0, b] \times \overline{B}(0, R)$  dans  $U = J \times \mathbb{R}^m$ , et  $y$  ne peut être une solution maximale. Toute solution maximale est donc globale. [Le lecteur pourra étudier l'exercice 5.9 pour un généralisation à une hypothèse de croissance plus faible que (2), tenant compte uniquement de la « direction radiale » du vecteur  $f(t, y)$ ].  $\blacksquare$

### Exercices

- (a) Montrer que toute solution maximale de l'équation différentielle  $y' = t\sqrt{t^2 + y^2}$ ,  $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , est globale.
- (b) On définit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par  $f(y) = e$  si  $y \leq e$  et  $f(y) = y \ln y$  si  $y \geq e$ . Montrer que  $f$  n'est pas lipschitzienne au voisinage de 0. Déterminer explicitement les solutions maximales de l'équation  $y' = f(y)$ . Les conditions suffisantes du théorème précédent sont-elles nécessaires ?

## 4. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR À UN

### 4.1. DÉFINITIONS

Un système différentiel d'ordre  $p$  dans  $\mathbb{R}^m$  est une équation de la forme

$$(E) \quad y^{(p)} = f(t, y, y', \dots, y^{(p-1)})$$

où  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une application continue définie sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^p$ .

Une *solution* de (E) sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  est une application  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$   $p$ -fois dérivable, telle que

- (i)  $(\forall t \in I) \quad (t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t)) \in U$ ,
- (ii)  $(\forall t \in I) \quad y^{(p)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p-1)}(t))$ .

Le résultat suivant se démontre par récurrence d'une manière entièrement analogue à celle utilisée pour les équations différentielles d'ordre 1. Le détail de l'argument est laissé au lecteur.

**Régularité des solutions** – Si  $f$  est de classe  $C^k$ , les solutions  $y$  sont de classe  $C^{k+p}$ .

### 4.2. SYSTÈME DIFFÉRENTIEL D'ORDRE UN ASSOCIÉ

Il est clair que le système (E) est équivalent au système différentiel d'ordre 1

$$(E_1) \quad \begin{cases} \frac{dY_0}{dt} = Y_1 \\ \frac{dY_1}{dt} = Y_2 \\ \dots \\ \frac{dY_{p-2}}{dt} = Y_{p-1} \\ \frac{dY_{p-1}}{dt} = f(t, Y_0, Y_1, \dots, Y_{p-1}) \end{cases}$$

si l'on pose  $Y_0 = y$ ,  $Y_1 = y'$ , .... Le système (E<sub>1</sub>) peut encore s'écrire

$$(E_1) \quad Y' = F(T, Y)$$

avec

$$Y = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{p-1}) \in (\mathbb{R}^m)^p$$

$$F = (F_0, F_1, \dots, F_{p-1}) : U \rightarrow (\mathbb{R}^m)^p$$

$$F_0(t, Y) = Y_1, \dots, F_{p-2}(t, Y) = Y_{p-1},$$

$$F_{p-1}(t, Y) = f(t, Y).$$

Tout système différentiel (E) d'ordre  $p$  dans  $\mathbb{R}^m$  est donc équivalent à un système différentiel (E<sub>1</sub>) d'ordre 1 dans  $(\mathbb{R}^m)^p$ . Il en résulte que les théorèmes d'existence et d'unicité démontrés pour les systèmes d'ordre 1 sont encore vrais pour les systèmes d'ordre  $p$ , avec des preuves qui sont des transpositions directes du cas d'ordre 1. En voici les principaux énoncés :

### 4.3. THÉORÈME D'EXISTENCE

Pour tout point  $(t_0, y_0, y_1, \dots, y_{p-1}) \in U$  le problème de Cauchy de conditions initiales

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(p-1)}(t_0) = y_{p-1}$$

admet au moins une solution maximale  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ , définie sur un intervalle ouvert.

**Remarque très importante** – On voit ainsi que pour un système d'ordre  $p$ , la condition initiale requiert non seulement la donnée de la valeur  $y_0$  de  $y$  au temps  $t_0$ , mais également la donnée de ses  $(p-1)$  premières dérivées.

### 4.4. THÉORÈME D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

Si de plus  $f$  est localement lipschitzienne en  $(y_0, \dots, y_{p-1})$  sur  $U$ , c'est-à-dire si  $\forall (t_0, y_0, \dots, y_{p-1}) \in U$  il existe un voisinage  $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0) \times \dots \times \overline{B}(y_{p-1}, r_{p-1})$  contenu dans  $U$  sur lequel

$$\|f(t, z_0, \dots, z_{p-1}) - f(t, w_0, \dots, w_{p-1})\| \leq k(\|z_0 - w_0\| + \dots + \|z_{p-1} - w_{p-1}\|),$$

alors le problème de Cauchy 4.3 admet une solution maximale et une seule.

### 4.5. SOLUTIONS GLOBALES

Si  $U = J \times (\mathbb{R}^m)^p$  et s'il existe une fonction  $k : J \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue telle que ( $\forall t \in J$ )

$$\|f(t, z_0, \dots, z_{p-1}) - f(t, w_0, \dots, w_{p-1})\| \leq k(t)(\|z_0 - w_0\| + \dots + \|z_{p-1} - w_{p-1}\|),$$

alors les solutions maximales sont définies sur  $J$  tout entier.

## 5. PROBLÈMES

**5.1.** On considère l'équation différentielle  $y' = y^2 - x$ .

(a) Quelles sont les lignes isoclines ?

On notera  $I_0$  l'isocline correspondant à la pente nulle.

Soit  $\mathcal{P}^-$  l'ensemble des points du plan où la pente des solutions est strictement négative. Décrire  $\mathcal{P}^-$ . Montrer que si une solution entre dans  $\mathcal{P}^-$ , alors elle y

reste (c'est-à-dire : si une solution  $y(x)$  a un point  $(x_0, y(x_0))$  dans  $\mathcal{P}^-$ , alors si  $x_1 > x_0$ ,  $(x_1, y(x_1)) \in \mathcal{P}^-$ ).

- (b) Étudier et tracer le graphe de la courbe  $\mathcal{I}$  ensemble des points d'inflexion des solutions de l'équation différentielle. Quelles sont les régions du plan où  $y'' > 0$ , respectivement  $y'' < 0$  ?

On notera  $\mathcal{I}_1$  la partie de  $\mathcal{I}$  extérieure à  $\mathcal{P}^-$ , et  $\mathcal{I}_2$  la partie de  $\mathcal{I}$  qui se trouve dans  $\mathcal{P}^-$ .

- (c) Soit  $\mathcal{C}$  une courbe solution rencontrant  $\mathcal{I}_1$  en un point  $(x, y)$ .

- ( $\alpha$ ) Montrer qu'en ce point, la pente de  $\mathcal{I}_1$  est strictement inférieure à la pente de  $\mathcal{C}$ .
- ( $\beta$ ) En déduire que  $\mathcal{C}$  ne coupe  $\mathcal{I}_1$  qu'en ce point, que  $\mathcal{C}$  ne rencontre pas  $\mathcal{P}^-$ , et que  $\mathcal{C}$  n'a qu'un point d'inflexion.
- ( $\gamma$ ) Montrer que  $\mathcal{C}$  possède 2 branches infinies à direction asymptotique verticale.
- ( $\delta$ ) Soit  $(x_0, y_0)$  un point de  $\mathcal{C}$ . Comparer en ce point, la pente de  $\mathcal{C}$  et la pente de la solution de l'équation différentielle  $y' = \frac{y^2}{2}$ . En déduire que les branches infinies de  $\mathcal{C}$  correspondent à des asymptotes verticales.

- (d) Soit  $\mathcal{D}$  une courbe solution rencontrant  $\mathcal{I}_0$ .

- ( $\alpha$ ) Montrer que  $\mathcal{D}$  possède une asymptote verticale.
- ( $\beta$ ) Montrer que  $\mathcal{D}$  a un point d'inflexion et un seul.
- ( $\gamma$ ) Montrer que lorsque  $x \rightarrow \infty$ ,  $\mathcal{D}$  est asymptote à  $\mathcal{I}_0$ .

- (e) Soit  $A$  (resp.  $B$ ) l'ensemble des points de l'axe  $Oy$  par où passe une courbe solution qui rencontre  $\mathcal{I}_1$  (resp.  $\mathcal{I}_0$ ).

- ( $\alpha$ ) Montrer qu'il existe  $a$  tel que  $A = \{0\} \times ]a, +\infty[$ .
- ( $\beta$ ) Montrer qu'il existe  $b$  tel que  $B = \{0\} \times ]-\infty, b[$ .
- ( $\gamma$ ) Montrer que  $a = b$ . Quelle est l'allure de la solution passant par le point de coordonnées  $(0, a)$  ?

**5.2.** On considère l'équation différentielle  $y' = f(t, y)$ , où  $f$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont continues. Soit  $\alpha$  une fonction réelle définie sur un intervalle  $[t_0, t_1[$  où  $t_1$  peut éventuellement être infini ; on suppose  $\alpha$  continue et dérivable par morceaux.

On dit que  $\alpha$  est une barrière inférieure [respectivement : supérieure] pour l'équation différentielle si  $\alpha'(t) < f(t, \alpha(t))$  [resp :  $\alpha'(t) > f(t, \alpha(t))$ ] pour tout  $t$  tel que  $\alpha'(t)$  existe, et, aux points où  $\alpha$  n'est pas dérivable, pour la dérivée à gauche et pour la dérivée à droite.

- (a) Montrer que si  $\alpha$  est une barrière inférieure pour  $t_0 \leq t \leq t_1$  et si  $u$  est une solution de l'équation différentielle vérifiant  $\alpha(t_0) \leq u(t_0)$ , alors  $\alpha(t) < u(t)$  pour tout  $t \in ]t_0, t_1[$ . Montrer un résultat analogue pour une barrière supérieure.

- (b) On suppose que  $\alpha$  est une barrière inférieure sur  $[t_0, t_1[$ , que  $\beta$  est une barrière supérieure sur  $[t_0, t_1[$ , et que  $\alpha(t) < \beta(t)$  pour tout  $t \in [t_0, t_1[$ . L'ensemble des points  $(t, x)$  tels que  $t_0 \leq t \leq t_1$  et  $\alpha(t) \leq x \leq \beta(t)$  est appelé entonnoir.
- ( $\alpha$ ) Montrer que si une solution  $u$  de l'équation différentielle est telle que  $(s, u(s))$  soit dans l'entonnoir pour un  $s \in [t_0, t_1[$ , alors  $(t, u(t))$  est dans l'entonnoir pour tout  $t \in [s, t_1[$ .
- ( $\beta$ ) Si  $\alpha$  est une barrière inférieure et  $\beta$  une barrière supérieure, et si  $\alpha(t) > \beta(t)$  pour  $t \in [t_0, t_1[$ , on dit que l'ensemble des  $(t, x)$  tels que  $t_0 \leq t \leq t_1$  et  $\alpha(t) \geq x \geq \beta(t)$  est un anti-entonnoir.
- Montrer qu'il existe une solution  $u(t)$  de l'équation différentielle, telle que  $\beta(t) \leq u(t) \leq \alpha(t)$  pour tout  $t \in [t_0, t_1[$ .
- (c) Dans la suite du problème, on prend  $f(t, y) = \sin(ty)$ . On se restreindra aux solutions vérifiant  $y > 0$ .
- ( $\alpha$ ) Déterminer les isoclines correspondant aux pentes  $-1, 0, 1$ .
- ( $\beta$ ) Pour quelles valeurs de  $t$  ces isoclines sont-elles des barrières inférieures ? supérieures ? Quels sont les entonnoirs formés par ces isoclines ?
- ( $\gamma$ ) Soit  $u$  une solution de l'équation différentielle ; soit  $\gamma$  la fonction continue, dérivable par morceaux, définie pour  $t \geq 0$  par :  $\gamma(0) = u(0) > 0$  ;  $\gamma$  est affine de pente 1 depuis  $t = 0$  jusqu'à ce que son graphe rencontre la première isocline de pente 0, puis  $\gamma$  est affine de pente 0 jusqu'à l'isocline de pente 0 suivante, puis  $\gamma$  est affine de pente 1 jusqu'à l'isocline de pente 0 suivante, et ainsi de suite. Montrer que le graphe de  $\gamma$  rencontre la droite  $y = t$ .
- ( $\delta$ ) Montrer que  $\gamma$  est une barrière supérieure.
- ( $\varepsilon$ ) En déduire que toute solution de l'équation différentielle rencontre la droite  $y = t$ , puis reste dans un entonnoir.
- ( $\zeta$ ) Dessiner l'allure des solutions de l'équation différentielle  $y' = \sin(ty)$ .

**5.3.** On considère l'équation (appelée équation de Van der Pol) :

$$(E) \quad \begin{cases} x'(t) = y(t) - x^3(t) + x(t), \\ y'(t) = -x(t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (a) Montrer que le problème de Cauchy correspondant admet une solution globale unique (on pourra utiliser le résultat de l'exercice 5.9).
- (b) On appelle trajectoire associée à une solution de (E), l'ensemble parcouru dans le plan Euclidien par le point de coordonnées  $(x(t), y(t))$  lorsque  $t$  parcourt  $\mathbb{R}$ . Montrer que les trajectoires associées à deux solutions distinctes de (E) coïncident ou n'ont aucun point commun ; montrer que par chaque point du plan passe une trajectoire et une seule ; montrer que si une trajectoire a un point double (c'est-à-dire correspondant à deux valeurs distinctes de  $t$ ), les solutions associées de (E) sont périodiques (et tous les points sont alors doubles). Quelles sont les trajectoires réduites à un point ?

(c) Montrer que la courbe symétrique d'une trajectoire par rapport à  $(0,0)$  est encore une trajectoire.

(d) On considère maintenant les sous-ensembles du plan

$$\begin{aligned} D^+ &= \{(0, y) ; y > 0\}; \quad D^- = \{(0, y) ; y < 0\}; \\ E_1 &= \{(x, y) ; x > 0 \text{ et } y > x^3 - x\}; \quad \Gamma_+ = \{(x, x^3 - x) ; x > 0\}; \\ E_2 &= \{(x, y) ; x > 0 \text{ et } y < x^3 - x\}; \\ E_3 &= \{(x, y) ; x < 0 \text{ et } y < x^3 - x\}; \quad \Gamma_- = \{(x, x^3 - x) ; x < 0\}; \\ E_4 &= \{(x, y) ; x < 0 \text{ et } y > x^3 - x\}. \end{aligned}$$

Soit  $(x(t), y(t))$  une solution de (E) ; montrer que, si  $(x(t_0), y(t_0)) \in D^+$ , il existe  $t_4 > t_3 > t_2 > t_1 > t_0$  tels que  $(x(t), y(t)) \in E_i$  pour  $t \in ]t_{i-1}, t_i[$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , et  $(x(t_1), y(t_1)) \in \Gamma^+$ ,  $(x(t_2), y(t_2)) \in D^-$ ,  $(x(t_3), y(t_3)) \in \Gamma^-$ ,  $(x(t_4), y(t_4)) \in D^+$ .

(e) Soit  $y_0 > 0$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$  ; il existe une solution de (E) telle que  $(x(t_0), y(t_0)) = (0, y_0)$  ; on pose  $\sigma(y_0) = y(t_2)$  ; montrer que  $\sigma(y_0)$  ne dépend que de  $y_0$  (et non de  $t_0$ ) et que  $\sigma$  est une application monotone continue de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^-$ .

(f) En utilisant le (c), montrer que  $(0, y_0)$  appartient à la trajectoire d'une solution périodique si et seulement si  $\sigma(y_0) = -y_0$ .

(g) Soit  $\beta > 0$  tel que pour la solution de (E) vérifiant  $(x(t_0), y(t_0)) = (0, \beta)$  on ait  $(x(t_1), y(t_1)) = (1, 0)$ . Montrer que pour  $y_0 < \beta$ , on a  $\sigma(y_0)^2 - y_0^2 > 0$  (regarder  $\int_{t_0}^{t_2} \frac{d}{dt} [x(t)^2 + y(t)^2] dt$ ).

(h) Soit  $y_0$  grand. Soit  $C$  la courbe formée des arcs suivants :

- le segment  $(0, y_0), (1, y_0)$  ;
- l'arc de cercle de centre  $O$  passant par  $(1, y_0)$  et coupant  $(y = x^3 - x)$  en  $(x_1, y_1)$  avec  $x_1 > 1$ .
- le segment  $(x_1, y_1), (x_1, 0)$ .
- l'arc de cercle de centre  $O$  passant par  $(x_1, 0)$  et coupant  $(x = 1)$  en  $(x'_1, y'_1)$ .
- la tangente en  $(x'_1, y'_1)$  à cet arc de cercle qui recoupe  $Oy$  en  $(0, y_2)$ .

Montrer que la solution de (E) passant par  $(0, y_0)$  est à l'intérieur de  $C$ . En déduire que  $\sigma(y_0)^2 - y_0^2 < 0$ .

(i) En déduire qu'il existe une trajectoire et une seule correspondant à des solutions périodiques de (E). Montrer que les trajectoires non réduites à  $(0, 0)$  convergent asymptotiquement vers cette trajectoire quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

**5.4.** Soit  $t$  une variable réelle  $\geq 0$ . On considère le problème de Cauchy

$$y' = ty, \quad y(0) = 1.$$

- (a) Démontrer que pour tout  $T > 0$ , ce problème admet une solution et une seule sur  $[0, T]$ , et indiquer comment la méthode d'Euler permet d'en trouver une approximation.

- (b) Déduire de ce qui précède la formule

$$y(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P_N(t) \quad \text{avec} \quad P_N(t) = \prod_{n=0}^{N-1} \left(1 + \frac{nt^2}{N^2}\right)$$

- (c) Pour  $\alpha > 0$ , étudier les variations de la fonction  $f(x) = x \ln(1 + \alpha/x)$  sur  $]0, +\infty[$ ; on montrera que  $f''(x) < 0$ .

En déduire l'encadrement

$$\left(1 + \frac{t^2}{N}\right)^{\frac{n}{N}} \leq 1 + \frac{nt^2}{N^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{N^2}\right)^n \quad \text{si } 0 \leq n \leq N-1.$$

- (d) Calculer la limite du (b), et en déduire  $y(t)$ .

**5.5.** On considère l'équation différentielle

$$y' = |y|^{-3/4}y + t \sin\left(\frac{\pi}{t}\right) = f(t, y)$$

où le second membre est défini sur  $\mathbb{R}^2$  à l'aide de prolongements par continuité. On note  $Y(t)$  la solution approchée définie sur  $\mathbb{R}$ , obtenue par la méthode d'Euler pour le pas  $h = \frac{1}{n+1/2}$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ , et vérifiant  $Y(0) = 0$ . On suppose dans un premier temps que  $n$  est pair.

- (a) Calculer  $Y(h)$ ,  $Y(2h)$  et  $Y(3h)$ .

Démontrer les inégalités  $Y(3h) > \frac{h^{3/2}}{2} > \frac{(3h)^{3/2}}{16}$ .

- (b) Déterminer  $c > 0$  tel que  $0 < t < c$  on ait  $\frac{1}{2}t^{3/8} - t > \frac{1}{10}t^{3/8}$ . En supposant de plus  $h \leq t$  et  $c$  assez petit vérifier  $\frac{(t+h)^{3/2} - t^{3/2}}{h} < \frac{8}{5}t^{3/8}$  (on pourra utiliser la formule de Taylor).

- (c) On suppose que pour  $m \in \mathbb{N}^*$  on a  $mh < c$  et  $Y(mh) > \frac{(mh)^{3/2}}{16}$ .

Démontrer les inégalités

$$f(mh, Y(mh)) > Y(mh)^{1/4} - mh > \frac{1}{2}(mh)^{3/8} - mh > \frac{1}{10}(mh)^{3/8}.$$

En déduire  $Y((m+1)h) > \frac{((m+1)h)^{3/2}}{16}$ .

Montrer que si  $p$  entier vérifie  $0 < ph \leq c$ , on a

$$Y(ph) > \frac{(ph)^{3/2}}{16}.$$

- (d) On suppose ici que  $n$  est impair. Calculer  $Y(h)$ ,  $Y(2h)$  et  $Y(3h)$ . Montrer l'inégalité  $Y(3h) < -\frac{(3h)^{3/2}}{16}$ .

On suppose que pour  $mh < c$  on a  $Y(mh) < -\frac{(mh)^{3/2}}{16}$  ; montrer comme ci-dessus que  $Y((m+1)h) < -\frac{((m+1)h)^{3/2}}{16}$ , puis que  $Y(ph) < -\frac{(ph)^{3/2}}{16}$  pour tout entier  $p$  tel que  $0 < ph \leq c$ .

- (e) Pour  $0 < t < c$ , montrer que les solutions approchées  $Y(t)$  ne tendent vers aucune limite  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**5.6.** Soit le système différentiel dans  $\mathbb{R}^2$  défini par

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2(x - ty) \\ \frac{dy}{dt} = 2y. \end{cases}$$

- (a) Déterminer la courbe intégrale qui passe par le point  $(x_0, y_0)$  au temps  $t = 0$ .
- (b) On utilise la méthode d'Euler avec pas constant  $h$ , démarrant au temps  $t_0 = 0$ . Soit  $(x_n, y_n)$  le point atteint au temps  $t_n = nh$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).
- (α) Écrire la relation qui lie  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  à  $(x_n, y_n)$ .
- (β) Calculer explicitement  $(x_n, y_n)$  en fonction de  $n$ ,  $h$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ .
- (γ) Sans utiliser les théorèmes généraux du cours, vérifier que la solution approchée qui interpole linéairement les points  $(x_n, y_n)$  converge sur  $\mathbb{R}_+$  vers la solution exacte de (S).

**5.7.** Soit  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et lipschitzienne de rapport  $k$  en sa deuxième variable. On définit une suite de fonctions  $y_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  en posant  $y_0(t) = \lambda$  et

$$y_{n+1}(t) = \lambda + \int_a^t f(u, y_n(u)) du, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On sait d'après V 3.2 que  $y_n$  converge uniformément vers la solution exacte de l'équation  $y' = f(t, y)$  telle que  $y(a) = \lambda$ . On étudie ici le cas particulier de l'équation

$$\frac{dy}{dt} = -2y + t, \quad t \in [0, +\infty[.$$

- (a) Montrer que  $y_n$  peut s'écrire sous la forme

$$y_n(t) = \lambda P_n(t) + Q_n(t)$$

où  $P_n$ ,  $Q_n$  sont des polynômes que l'on explicitera.

- (b) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n$ . Vérifier ce résultat en résolvant directement l'équation.

**5.8.** Soit  $T$  un réel positif et  $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue lipschitzienne de rapport  $k$  en la deuxième variable. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = f(t, y).$$

Soit un réel  $h \in ]0, T[$ . On dira que  $z$  est une solution retardée de retard  $h$  si  $z$  est une fonction continue sur  $[0, T]$ , dérivable sur  $]h, T]$  et si

$$z'(t) = f(t, z(t - h)), \quad \forall t \in ]h, T].$$

(a) Soit  $y_0$  un réel fixé. Montrer que (E) admet une solution retardée de retard  $h$  et une seule, notée  $z_h$ , telle que  $z_h(t) = y_0$  pour tout  $t \in [0, h]$ .

(b) Soit  $z$  une solution retardée de retard  $h$ . On pose

$$A = \max_{t \in [0, T]} |f(t, 0)|, \quad m(t) = \max_{u \in [0, t]} |z(u)|.$$

(α) Montrer que pour tout  $t \in [h, T]$  on a

$$m(t) \leq m(h) + \int_h^t (A + km(u))du.$$

(β) En déduire que

$$m(t) \leq \left( \frac{A}{k} + m(h) \right) e^{k(t-h)} - \frac{A}{k}, \quad \forall t \in [h, T].$$

[*Indication* : étudier la dérivée de la fonction  $M(t) = e^{-kt} \int_h^t (A + km(u))du$ .]

(γ) Montrer qu'il existe une constante  $B$  indépendante de  $h$ , que l'on explicitera, telle que  $\|z_h\|_\infty \leq B$  pour tout  $h > 0$ , si  $z_h$  désigne la solution retardée du (a).

(c) On se propose ici d'étudier la convergence de  $z_h$  quand  $h$  tend vers 0.

(α) Montrer que les fonctions  $z_h$  sont  $C$ -lipschitziennes avec une constante  $C$  indépendante de  $h$ .

(β) Soit  $y$  la solution exacte (non retardée) de (E) telle que  $y(0) = y_0$ . On pose

$$\delta(t) = \max_{u \in [0, t]} |z_h(u) - y(u)|.$$

Montrer que  $\delta$  vérifie l'inégalité intégrale

$$\delta(t) \leq \delta(h) + \int_h^t (kCh + k\delta(u))du.$$

où  $C$  est la constante de la question (c) α).

- ( $\gamma$ ) En déduire une majoration de  $\|\delta\|_\infty$  et conclure.
- (d) On construit maintenant une méthode de résolution approchée de (E) utilisant les solutions retardées  $z_h$ . Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \leq T/h$ , on pose

$$t_n = nh, \quad z_n = z_h(t_n);$$

dans la formule

$$z_{n+1} = z_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, z_h(t-h)) dt$$

on remplace la valeur exacte de l'intégrale par sa valeur approchée calculée au moyen de la méthode des trapèzes élémentaires.

- ( $\alpha$ ) Écrire la relation de récurrence définissant la suite  $(z_n)$ .
- ( $\beta$ ) Exprimer l'erreur de consistance relative à une solution exacte  $y$  ; en calculer un développement limité à l'ordre 2 en fonction de  $h$  et des dérivées partielles de  $f$  au point  $(t, y)$ . Quel est l'ordre de la méthode ? (voir chapitre VIII pour les définitions).

**5.9.** Soit  $J$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $f : J \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application continue. On se propose de démontrer que toute solution maximale de l'équation différentielle  $y' = f(t, y)$  est globale si  $f$  vérifie l'hypothèse suivante :

- (H) Il existe des fonctions  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}_+$  continues telles que

$$\langle f(t, y), y \rangle \leq a(t)\|y\|^2 + b(t), \quad \forall (t, y) \in J \times \mathbb{R}^m,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $\| \cdot \|$  désignent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne standards sur  $\mathbb{R}^m$ .

- (a) Soit  $y : [t_0, t_1[ \rightarrow \mathbb{R}^m$  une solution maximale à droite passant par un point  $(t_0, y_0)$  et soit  $r(t) = \|y(t)\|^2$ . Montrer que  $r'(t) \leq 2a(t)r(t) + 2b(t)$ .

En déduire que  $\|y(t)\|^2 \leq \rho(t)$  où  $\rho : J \rightarrow \mathbb{R}$  est la solution (toujours globale) de l'équation linéaire  $\rho' = 2a(t)\rho + 2b(t)$ , telle que  $\rho(t_0) = \|y_0\|^2$ .

[*Indication* : soit  $A(t)$  une primitive de  $a(t)$  ; étudier le signe de la dérivée de  $(r(t) - \rho(t))e^{-2A(t)}$ .

- (b) Déterminer un majorant explicite de  $\|y(t)\|$  lorsque  $a$  et  $b$  sont des constantes.

- (c) On suppose que  $t_1 < \sup J$ . Montrer que  $y(t)$ ,  $y'(t)$  sont bornées sur  $[t_0, t_1[$  et que ces fonctions se prolongent par continuité en  $t_1$ . Montrer que ceci conduit à une contradiction. Conclure.