## النماذج المتباطئة زمنيا

يحتل التباطؤ الزمني مكانا هاما في الاقتصاد لذلك ينبغي إدخال عامل التباطؤ الزمني للمتغيرات المفسرة في نماذج الانحدار لوجود فارق زمني بين لحظة اتخاذ القرار الاقتصادي و التأثير النهائي في متغيرات السياسة الاقتصادية المستهدفة.

### 1- النماذج الخطية للإنحدار الذاتي

في هذا النوع من النماذج يرتبط المتغير التابع بقيم ماضية للمتغير نفسه و بـ k متغير مستقل في اللحظة t و يكتب الشكل العام للنموذج كما يلي

$$Y_t = \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + \cdots \dots \dots + \beta_p Y_{t-p} + \alpha_0 + \alpha_1 X_{t\,1} + \alpha_2 X_{t\,2} + \cdots \dots \dots + +\alpha_k X_{t\,k} + \varepsilon_t$$

أو بالصيغة المختصرة

$$Y_t = \sum_{j=1}^{p} \beta_j Y_{t-j} + X\alpha + \varepsilon_t$$

في هذا النموذج فرضية الاستقلالية بين المتغيرات المفسرة و الخطأ العشوائي غير محققة لأن المتغيرات $Y_{t-1}, Y_{t-2} \dots \dots \dots Y_{t-p}$ ترتبط بـ $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2} \dots \dots \dots \varepsilon_{t-p}$ باعتبار أن $Y_{t+1}$ دالة تابعة ل $Y_t$. التي ترتبط بـ $\varepsilon_t$

- **طريقة التقدير**: تعتمد طريقة التقدير المناسبة على مدى ارتباط الأخطار العشوائية ذاتيا

- <u>اختبار الارتباط الذاتي:</u> في حالة النموذج أعلاه لا يمكن الاستعانة باختبار ديربين واتسون للارتباط الذاتي و هنا نستخدم إحصائية أخرى تعرف بإحصائية Durbin h حيث

$$h = \hat{\rho}\sqrt{\frac{n}{1-n\hat{\sigma}_\beta^2}} \qquad h \sim (0\,,1)$$

حيث:

$\hat{\rho}$ معامل الارتباط الذاتي، n حجم العينة، $\hat{\sigma}_\beta^2$ التباين المقدر للمعلمة β في نموذج الانحدار الذاتي AR(1)

نختبر إحدى الفرضيتين المتكافئتين التاليتين

$$\begin{cases} H_0: \rho = 0 \\ H_1: \rho \neq 0 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} H_0: h = 0 \\ H_1: h \neq 0 \end{cases}$$

نقارن h مع القيمة الجدولية للتوزيع الطبيعي عند مستوى معنوية $\alpha$

إذا كانت $|h| < Z\alpha_{/2}$ نقبل $H_0$ أي قبول فرضية استقلالية الأخطاء و العكس بالعكس

- نلاحظ أنه إذا كان $n\hat{\sigma}_{\beta}^{2} \geq 1$ فمن المستحيل استخدام إحصائية h و هنا يمكن الاستعانة بإختبار BGF

- <u>التقدير في حالة عدم وجود الارتباط الذاتي:</u> تستخدم طريقة المربعات الصغرى العادية لتقدير معالم نموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الأولى، و لا ينبغي استخدامها إلا في حالة العينات الكبيرة للحصول على مقدرات جيدة و تفادي مشكل التعدد الخطي.

- <u>التقدير في حالة وجود الارتباط الذاتي:</u> تستخدم عدة طرق لتقدير معالم النموذج

- الإنحدار على الفروق الأولى: نجري انحدار بالقيم الأصلية ثم انحدار على الفروق الأولى للمتغيرات و نقارن بين نتائج الانحدارين، فإذا كانت النتائج متقاربة يمكن القول بأن مقدرات النموذج الأصلي مقبولة.

- تصحيح الارتباط الذاتي بإحدى الطرق المعروفة.

- نستخدم طرق أخرى للتقدير مثل طريقة المعقولية العظمى أو استخدام المتغيرات الأداة.

**مثال:** لديك المعطيات التالية لدراسة العلاقة بين مستوى المخزونات y و حجم المبيعات x في قطاع الصناعات التحويلية الأمريكي وفق النموذج التالي

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \beta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 124.7 | 110.8 | 98.8 | 86.6 | 84.8 | 73 | 63 | 55.9 | 52.8 | 53.5 | 50.3 | 46.5 | 44.9 | 41 | 37.3 | 35.1 | 33.4 | 30.9 | 30.9 | 30.3 | X |
| 198 | 180 | 170.2 | 158.2 | 157.9 | 124.7 | 108.3 | 102.7 | 101.7 | 98.2 | 90.6 | 84.7 | 78 | 68.2 | 63.4 | 60 | 58.2 | 54.9 | 53.8 | 52.9 | Y |

باستخدام برمجية Eviews نقدر النموذج بطريقة المربعات الصغرى العادية و نحصل النتائج كما يلي:

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | 2.712781 | 3.292904 | 0.823826 | 0.4221 |
| X | 0.940381 | 0.231105 | 4.069058 | 0.0009 |
| Y(-1) | 0.468643 | 0.155347 | 3.016750 | 0.0082 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.988410 | Mean dependent var | 105.8789 |
| Adjusted R-squared | 0.986962 | S.D. dependent var | 46.17620 |
| S.E. of regression | 5.272662 | Akaike info criterion | 6.306887 |
| Sum squared resid | 444.8155 | Schwarz criterion | 6.456009 |
| Log likelihood | -56.91543 | Hannan-Quinn criter. | 6.332124 |
| F-statistic | 682.2701 | Durbin-Watson stat | 1.354996 |
| Prob(F-statistic) | 0.000000 | | |

توضح مخرجات التقدير أن النموذج يتمتع بمعنوية إحصائية جيدة و تشير إحصائية ديربين واتسون إلى عدم وجود الارتباط الذاتي للأخطاء و للتأكد من ذلك نستخدم إحصائية Durbin h

- نختبر الفرضيتين التاليتين:

H0 : h = 0
H1 : h ≠ 0

- حساب إحصاءة الاختبار:

$$h = (1-\frac{1.355}{2})\sqrt{\frac{19}{1-19(0.1553)^2}} = 0.3225\sqrt{\frac{19}{1-0.4582}} = 0.61\sqrt{\frac{19}{0.5418}} = 0.61\sqrt{35.0682} = 1.9097 \prec t^{0.05} = 1.96$$

وبالتالي نقبل $H_0$ و نرفض $H_1$ ، أي أن النموذج خال من مشكل الارتباط الذاتي.

## 2- نماذج فترات الإبطاء الموزعة

في نماذج فترات الإبطاء الموزعة يعتمد المتغير التابع على مجموع مرجح للمتغير المستقل في الفترات السابقة ( k فترة) وفق العلاقة

$$Y_t = \beta + \alpha_0 X_t + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \cdots \dots \dots + +\alpha_k X_{t-k} + \varepsilon_t \quad \dots \dots \quad (1)$$

حيث يتلاشى تأثير المتغير المستقل على المتغير التابع مع مرور الزمن

**- تقدير نموذج فترات الإبطاء الموزعة:**

قد تكون طريقة المربعات الصغرى العادية غير عملية لتقدير نماذج فترات الإبطاء الموزعة لعدة أسباب

- تحديد عدد فترات الإبطاء المستخدمة: قد يكون عدد فترات الإبطاء k محدودا أو غير محدود، و إذا كانت غير معروفة يمكن تحديدها بتدنئة معياري Akaike و Schwarz المعرفين كما يلي:

$$AIC(k) = ln\left(\frac{RSS_k}{n}\right) + \frac{2k}{n}$$

$$SC(k) = ln\left(\frac{RSS_k}{n}\right) + \frac{kln(n)}{n}$$

حيث:

$RSS_k$ مجموع مربعات البواقي للنموذج المقدر بـ k درجة إبطاء

n حجم العينة

ln اللوغاريتم الطبيعي

- فقدان درجات الحرية بسبب العدد الكبير لفترات التأخير خاصة في حالة العينات الصغيرة مما يؤثر على معنوية التحليل الإحصائي.

- يمكن أن يؤدي الارتباط بين المتغيرات المبطأة إلى ظهور مشكل التعدد الخطي.

لذلك توجد عدة نماذج تقترح حلا لمشكلة التعدد الخطي تحت فرضيات معينة حول الشكل الذي تتخذه استجابة المتغير التابع للمتغيرات المستقلة المبطأة:

- **نموذج إبطاء كويك Koyck:** يعتمد على استخدام توزيع هندسي لتقدير معاملات النموذج

فانطلاقا من أن جميع المعاملات $\alpha_i$ في نموذج فترات الإبطاء الموزعة لها نفس الإشارة يفترض كويك أنها تتناقص بشكل متتالية هندسية وفقا للعلاقة

$$\alpha_k = \alpha_0 \lambda^k \ldots\ldots \; (2) \setminus \quad k = 0,1,\ldots ; 1 > \lambda > 0$$

حيث تمثل $\lambda$ معدل التناقص أو التآكل

$\lambda - 1$ تمثل سرعة التعديل أو التكيف أو سرعة استجابة المتغير التابع للتغير في القيم الجديدة للمتغير المفسر

- <u>**تحويل كويك:**</u> لتقدير النموذج نستخدم تحويل كويك كما يلي

نعيد كتابة النموذج 1 بتعويض $\alpha_k$ من 2 بما يساويها

$$Y_t = \beta + \alpha_0 X_t + \alpha_0 \lambda X_{t-1} + \alpha_0 \lambda^2 X_{t-2} + \cdots \ldots\ldots + +\alpha_0 \lambda^k X_{t-k} + \varepsilon_t \ldots\ldots \; (3)$$

نبطيء المعادلة 3 ونضربها في $\lambda$

$$\lambda Y_{t-1} = \lambda\beta + \alpha_0 \lambda X_{t-1} + \alpha_0 \lambda^2 X_{t-2} + \cdots \ldots\ldots + +\alpha_0 \lambda^k X_{t-k} + \lambda\varepsilon_{t-1} \ldots\ldots \; (4)$$

نطرح 4 من 3

$$Y_t - \lambda Y_{t-1} = \beta - \lambda\beta + \alpha_0 X_t + \varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1} \Rightarrow Y_t = \beta - \lambda\beta + \alpha_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + \varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1}$$

$$\Rightarrow Y_t = (1-\lambda)\,\beta + \alpha_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + \varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1}$$

نضع $(1-\lambda)\,\beta = \beta^*$ و $\varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1} = u_t$ و نعيد كتابة المعادلة على النحو التالي

$$Y_t = \beta^* + \alpha_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + u_t$$

نلاحظ أنه باستخدام تحويل كويك تم تبسيط النموذج و كتابته في شكل نموذج انحدار ذاتي من الرتبة الأولى.

نموذج كويك سيؤدي إلى اختراق بعض الفرضيات الأساسية للنموذج نظرا لكون حد الخطأ $u_t$ لا يحقق فرضية استقلالية الأخطاء، إضافة إلى أن المقدرات تكون متحيزة وغير متسقة، و يمكن التغلب على هذا المشكل باستخدام نموذج سولو وفق توزيع باسكال.[1]

[1] أنظر: شيخي محمد، طرق الاقتصاد القياسي محاضرات و تطبيقات، دار الحامد، عمان، 2011، ص 130

**مثال:** باستخدام معطيات المثال السابق

- حدد عدد فترات الإبطاء المثلى حسب معيار معلومات Akaike لتقدير نموذج فترات الإبطاء الموزعة
- قدر نموذج فترات الإبطاء الموزعة وفق تحويل koyck لفترة الإبطاء الملائمة

لتحديد عدد فترات الإبطاء المثلى نستخدم برمجية Eviews و نحصل على النتائج كما يلي:

| Lag | LogL | LR | FPE | AIC | SC | HQ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | -119.3767 | NA | 36614.38 | 16.18355 | 16.27796 | 16.18255 |
| 1 | -81.49127 | 60.61662 | 403.7027 | 11.66550 | 11.94872 | 11.66249 |
| 2 | -73.69285 | 10.39789* | 253.7256 | 11.15905 | 11.63108 | 11.15402 |
| 3 | -70.51993 | 3.384444 | 314.2237 | 11.26932 | 11.93017 | 11.26228 |
| 4 | -62.82098 | 6.159160 | 238.1654 | 10.77613 | 11.62579 | 10.76708 |
| 5 | -47.43930 | 8.203564 | 80.88998* | 9.258573* | 10.29705* | 9.247511* |

نلاحظ من الجدول أن معياري المعلومات AIC و SC أن عدد فترات الإبطاء المثلى هو 5 فترات

**- تقدير نموذج فترات الإبطاء الموزعة وفق تحويل koyck**

من مخرجات التقدير لدينا نموذج الانحدار

$$\hat{Y}_t = 2.7127 + 0.9403X_t + 0.4686$$

من تحويل كويك نجد

$$(1-\lambda)\beta = 2.712 \Rightarrow \beta = \frac{2.7127}{0.5314} = 5.1048$$

$$\alpha_0 = 0.9403$$

$$(1-\lambda) = 0.4686 \Rightarrow \lambda = 1 - 0.4686 = 0.5314$$

ومنه تكون معاملات نموذج فترات الإبطاء الموزعة كما يلي:

$$\alpha_1 = \alpha_0\lambda = (0.9403)(0.4686) = 0.4406$$

$$\alpha_2 = \alpha_0\lambda^2 = (0.9403)(0.4686)^2 = 0.2064$$

$$\alpha_3 = \alpha_0\lambda^3 = (0.9403)(0.4686)^3 = 0.0967$$

$$\alpha_4 = \alpha_0\lambda^4 = (0.9403)(0.4686)^4 = 0.0045$$

$$\alpha_5 = \alpha_0\lambda^5 = (0.9403)(0.4686)^5 = 0.0021$$

$$\widehat{Y}_t = 5.1048 + 0.9403x_t + 0.4406x_{t-1} + 0.2064x_{t-2} + 0.0967x_{t-3} + 0.0045x_{t-4} + 0.0021x_{t-5}$$

من معادلة الانحدار نجد أن معامل التأثير قصير الأجل لتغير حجم المبيعات على مستوى المخزون يتمثل بالمعامل $B_0$ ويساوي 0.94 أما معامل التأثير الطويل الأجل فيساوي مجموع معاملات الميل في المعادلة، أي: 0.9403+0.4406+0.2064+0.0967+0.0045+0.0021=1.6906

أي أن زيادة وحده واحدة من المبيعات ستؤدي إلى زيادة 0.94 وحدة من المخزون في السنة الحالية t و 0.44 بعد سنة و 0.2 بعد سنتين و 0.096 بعد ثلاث سنوات و 0.004 بعد أربع سنوات و 0.002

بعد خمس سنوات و بذلك يكون التأثير طويل الأجل يساوي 1.69 وهذا يعني أن 55% من التغير الكلي سيظهر أثره في السنة الأولى و 82% بعد سنة و94% بعد سنتين و 99.6% بعد ثلاث سنوات و 99.87% بعد أربع سنوات و 100% بعد خمس سنوات.

## 3- أمثلة لبعض النماذج الديناميكية

- **نموذج التوقعات المكيفة:** وفق هذا النموذج تكون قيم المتغير التابع دالة تابعة للقيم المتوقعة للمتغير المستقل على الشكل التالي:

$$Y_t = \alpha + \beta\ X_t^e + \varepsilon_t \text{.........(1)}$$

حيث: $X_t^e$ تمثل القيمة المتوقعة للمتغير المستقل

و من الأمثلة الاقتصادية لهذا النوع من النماذج نجد نموذج فيليبس المعدل الذي يدرس العلاقة بين التضخم و البطالة و نموذج أوكن (Oukun) الذي يدرس العلاقة بين البطالة و إجمالي الناتج الوطني

عمليا لا يمكن تقدير المعادلة 1 لعدم توفر البيانات عن $X_t^e$ و عليه لا بد من تحقق بعض الفرضيات بصياغة التوقعات، و الفرضية العامة هي التوقعات المكيفة التي تعرف رياضيا بالعلاقة

$$X_t^e - X_{t-1}^e = \lambda(X_t - X_{t-1}^e) \quad \text{........(2)}$$

حيث: λ معامل التوقع و $0 \leq \lambda \leq 1$

تعرف هذه الفرضية أيضا بفرضية التوقع المتطور أو فرضية تعلم الخطأ

وتشير المعادلة (2) الى ان الأعوان الاقتصاديين يكيفون توقعاتهم على ضوء تجاربهم السابقة ويتعلمون من اخطائهم و تبين معادلة أن التوقعات يتم تعديلها في كل فترة بنسبة من λ حتى يتم سد الفارق بين القيمة الحالية للمتغير والقيمة السابقة. و يمكن إعادة كتابتها كما يلي

$$X_t^e - X_{t-1}^e = \lambda X_t - \lambda X_{t-1}^e \Rightarrow X_t^e = \lambda X_t + X_{t-1}^e - \lambda X_{t-1}^e$$

$$\Rightarrow X_t^e = \lambda X_t + (1-\lambda)X_{t-1}^e \text{......(3)}$$

أي أن القيمة المتوقعة للمتغير $X_t^e$ في اللحظة t تساوي المتوسط المرجح للقيمة الحقيقية للمتغير في اللحظة t و القيمة المتوقعة في اللحظة السابقة t-1 بمعامل λ و λ -1 على الترتيب.

و بتعويض 3 في 1

$$Y_t = \alpha + \beta[\lambda X_t + (1-\lambda)X_{t-1}^e] + \varepsilon_t \Rightarrow Y_t = \alpha + \beta\lambda X_t + \beta\ (1-\lambda)X_{t-1}^e + \varepsilon_t \text{......(4)}$$

نبطئ المعادلة 1 ونضربها في $(1-\lambda)$

$$(1-\lambda)Y_{t-1} = (1-\lambda)\alpha + (1-\lambda)\beta\ X_t^e + (1-\lambda)\varepsilon_{t-1} \text{..........(5)}$$

بطرح المعادلة 5 من المعادلة1 نجد

$$Y_t = \alpha\lambda + \beta\lambda X_t + (1-\lambda)Y_{t-1} + \varepsilon_t - (1-\lambda)\varepsilon_{t-1} \Rightarrow Y_t = \alpha^* + \beta^* X_t + \gamma Y_{t-1} + u_t$$

حيث $\alpha^* = \alpha\lambda, \quad \beta^* = \beta\lambda, \quad \gamma = (1-\lambda) \quad u_t = \varepsilon_t - (1-\lambda)\varepsilon_{t-1}$

المعادلة الأخيرة لنموذج التوقعات المكيفة عبارة عن نموذج انحدار ذاتي وفق نموذج كويك.

- **نموذج التعديل الجزئي:** و يعرف أيضا بنموذج تعديل المخزون أو نموذج نيرلوف Nerlove و يمكن صياغته كما يلي:

$$Y_t^d = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t \text{ ............(1)}$$

حيث:

$Y_t^d$ تمثل المستوى المرغوب للمتغير التابع وهو غير معروف.

$X_t$ تمثل المستوى الفعلي للمتغير المستقل.

ولتحديد المستوى المرغوب للمتغير التابع يفترض نيرلوف مايلي :

- المستوى الفعلي للمتغير التابع $Y_t$ يكون عادة أقل من المستوى المرغوب للمتغير نفسه $Y_t^d$.

- التغير الفعلي والذي يقاس بالفرق $(Y_t - Y_{t-1})$ عادة ما يكون أقل من التغير المرغوب $(Y_t^d - Y_{t-1})$ في أي فترة زمنية وقد يعود ذلك إلى مجموعة من القيود التكنولوجية والمالية والإدارية والعادات والتقاليد التي تحول دون حدوث التكيف الكامل خلال الفترة الزمنية. ويمكن صياغة هذا الافتراض كما يلي:

$$\frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_t^d - Y_{t-1}} = \lambda \Rightarrow Y_t - Y_{t-1} = \lambda\left(Y_t^d - Y_{t-1}\right) \text{ .............(2)}$$

حيث: $\lambda$ تمثل معامل التعديل أو التكيف و $0 \le \lambda \le 1$

وتشير المعادلة (2) إلى ان التغير في المخزون بين الفترتين t-1 و t هو نسبة من الفرق بين مستوى المخزون الفعلي $Y_{t-1}$ و المستوى المرغوب $Y_t^d$ .

لايمكن تقدير المعادلة (1) لأن المستوى المرغوب $Y_t^d$ غير معروف، ولذلك نستخدم علاقة التعديل الجزئي بتعويض المعادلة (1) في المعادلة (2) نجد:

$$Y_t - Y_{t-1} = \lambda(\alpha + \beta X_t + \varepsilon_t - Y_{t-1}) \Rightarrow Y_t - Y_{t-1} = \lambda\alpha + \lambda\beta X_t + \lambda\varepsilon_t - \lambda Y_{t-1}$$
$$\Rightarrow Y_t = \lambda\alpha + \lambda\beta X_t + \lambda\varepsilon_t + (1-\lambda)Y_{t-1}$$
$$\Rightarrow Y_t = \alpha^* + \beta^* X_t + \gamma Y_{t-1} + u_t$$

حيث: $\alpha^* = \alpha\lambda, \quad \beta^* = \beta\lambda, \quad \gamma = (1-\lambda) \quad u_t = \lambda\varepsilon$

المعادلة الأخيرة لنموذج التعديل الجزئي عبارة عن نموذج انحدار ذاتي مشابه لنموذج كويك و الخطأ العشوائي في هذا النموذج وليس مرتبطا ذاتيا لذلك يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية لتقدير معالم النموذج.

**مثال:** باستخدام معطيات المثال السابق

قدر نموذج التوقعات المكيفة و نموذج التعديل الجزئي:

- نموذج التوقعات المكيفة:

من معادلة الانحدار نجد:

$$\lambda\alpha = 2.712 \Rightarrow \alpha = \frac{2.7127}{0.5314} = 5.1048$$

$$\lambda\beta = 0.9403 \Rightarrow \beta = \frac{0.9403}{0.5314} = 1.7694$$

$$(1-\lambda) = 0.4686 \Rightarrow \lambda = 1 - 0.4686 = 0.5314$$

ومنه يكتب النموذج على الشكل:

$$Y_t = 5.1048 + 1.7694 X_t^p$$

$$X_t^p - X_{t-1}^p = 0.5314(X_t - X_{t-1}^p)$$

- نموذج التعديل الجزئي:

$$Y_t^d = 5.1048 + 1.7694 X_t$$

$$Y_t - Y_{t-1} = 0.5314(Y_t^d - Y_{t-1})$$

**<u>المراجع</u>**

- شيخي محمد، طرق الاقتصاد القياسي محاضرات و تطبيقات، دار الحامد، عمان، 2011

- عبد القادر محمد عبد القادر عطية، الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق، الدار الجامعية، الإسكندرية، 2000

- Bourbonnais, R, Econométrie, 5e édition, Paris, Dunod, 2003.