نماذج الانحدار غير الخطي

في الكثير من الأحيان تأخذ بيانات الظواهر الاقتصادية شكلا غير خطي، لذلك نستعمل الانحدار غير الخطي لتقدير النماذج الممثلة لهذه الظواهر، ونميز بين هذه النماذج نوعين نماذج غير خطية قابلة للتحويل إلى شكل خطي ونماذج غير خطية غير قابلة للتحويل وهذا ما سنبينه في مايلي:

1- نماذج غير خطية قابلة للتحويل إلى الصيغة الخطية:

قد نصادف في بعض الأحيان تمثيل للظواهر الاقتصادية في شكل معادلة غير خطية مع إمكانية تحويل هذه الدوال إلى الصيغة الخطية بحيث يمكن تقدير هذه النماذج بعد تحويلها باستعمال التحويل المناسب بطريقة المربعات الصغرى العادية ومن أمثلة هذه النماذج نجد النموذج الأسي، حيث يتم تحويل قيم المتغير التابع Y_i إلى قيم لوغاريتمية حتى يمكن التعبير عن العلاقة بعد عملية التحويل بعلاقة خطية، ومن ثم استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير المعالم.

وتأخذ الصيغة الأسية الشكل الآتي:

$$Y_i = e^{(a+bx_i)}$$

حيث (e) أساس اللوغاريتم الطبيعي.

وتتم عملية التحويل بإدخال اللوغاريتم على طرفي المعادلة:

$$\text{Ln}\,(Y_i) = a + bX_i$$

و بوضع $W_i = \text{Ln}\,(Yi)$

تكون المعادلة:

$$W_i = a + bX_i$$

من هذه المعادلة يمكن تقدير العلاقة بين المتغيرين باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية.

- **مثال:** لتكن لديك المعطيات التالية لدراسة العلاقة بين حجم الإنتاج y و العمل x

X	2	4	6	8	10	12
Y	10	18	24	28	30	31

- قدّر معادلة الانحدار بعد إجراء التحويل المناسب إذا علمت أن العلاقة بين المتغيرين تأخذ الشكل التالي: $\hat{y} = a\,X^b$

بإدخال اللوغريتم على الطرفين نجد:

$$Ln\,y = Ln\,a\,X^b \Longrightarrow Ln\,y = \;Ln\,a + b\,Ln\,X$$

- تقدير النموذج: نضع Ln y = w و Ln x = z و Ln a = α

و باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية نحصل على النتائج كما يلي:

$\bar{z} = 1.79 \quad \bar{w} = 3.09$

$$\hat{b} = \frac{\sum zw - n\,\bar{z}\bar{w}}{\sum z^2 - n\,\bar{z}^2} = \frac{34.591 - 6 * 1.79 * 3.09}{21.413 - 6 * (1.79)^2} = 0.644$$

$$\widehat{\alpha} = \bar{w} - b\bar{z} = 3.09 - 0.644 * 1.79 = 1.938$$

$$\hat{a} = e^{\hat{\alpha}} = 6.944$$

و منه تكون المعادلة

$$\hat{y} = 6.944\, X^{0.644}$$

2- تقدير النماذج غير القابلة للتحويل إلى الصيغة الخطية:

تتمثل صعوبة هذه النماذج في كونها غير خطية وبالتالي لا يمكن تقديرها بالانحدار الخطي، غير أنه يمكن تقريبها للصيغة الخطية باستخدام النشر المحدود لتايلور بإعطاء قيم ابتدائية للمعالم و من ثم تقديرها بتكرار العملية أو بالطرق الرياضية بحل المعادلات غير الخطية باستخدام العديد من الخوارزميات مثل خوارزمية غوص نيوتن.

ليكن النموذج غير الخطي $Y_i = f(X,\beta) + \varepsilon_i$ حيث X مصفوفة المتغيرات المفسرة و β شعاع المعالم

يمكن تقدير شعاع المعالم في ظل الفرضيات الكلاسيكية للنموذج بتدنئة مربعات البواقي

$$\sum \varepsilon^2 = \left(Y - f(X,\beta)\right)^2 = \left(Y - f(X,\beta)\right)'\left(Y - f(X,\beta)\right) = S(\beta)$$

و يكون لدينا k+1 مشتقة جزئية من الدرجة الأولى:

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow -2\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta}\left(Y - f(X,\beta)\right) = 0$$

حيث:

$$\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta} = Z(\beta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(X_1,\beta)}{\partial \beta_0} & \cdots & \frac{\partial f(X_1,\beta)}{\partial \beta_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(X_n,\beta)}{\partial \beta_0} & \cdots & \frac{\partial f(X_n,\beta)}{\partial \beta_k} \end{pmatrix}$$

لتكن $Z(\beta^{(1)})$ المصفوفة المحسوبة من أجل القيم الخاصة (الأولية) لـ β $(\beta = \beta^{(1)})$ ثم باستعمال النشر المحدود لتايلور بجوار $\beta^{(1)}$ يمكن تقريب المشاهدة Y_t كما يلي:

$$f(X,\beta) \cong f\left(X,\beta^{(1)}\right) + \left[\frac{\partial f(X_1,\beta^{(1)})}{\partial \beta_0} + \ \dots\dots + \frac{\partial f(X_1,\beta^{(1)})}{\partial \beta_k}\right]\left(\beta - \beta^{(1)}\right)$$

أي:

و منه

$$Y \cong f\left(X,\beta^{(1)}\right) + Z\left(\beta^{(1)}\right)\left(\beta - \beta^{(1)}\right) + \varepsilon_t \cong \ f\left(X,\beta^{(1)}\right) + Z\left(\beta^{(1)}\right)\beta - Z\left(\beta^{(1)}\right)\beta^{(1)} + \varepsilon_t$$

نضع:

$$\tilde{Y} = Y - \ f\left(X,\beta^{(1)}\right) + Z\left(\beta^{(1)}\right)\beta^{(1)}$$

نجد

$$\tilde{Y} = \ Z\left(\beta^{(1)}\right)\beta + \varepsilon_t$$

المعادلة الأخيرة تمثل تقريبا للنموذج غير الخطي إلى الشكل الخطي، و يمكن تقدير معالم هذا النموذج كما يلي:

$$\beta^{(2)} = \left[Z\left(\beta^{(1)}\right)'Z\left(\beta^{(1)}\right)\right]^{-1}Z\left(\beta^{(1)}\right)'\tilde{Y}\left(\beta^{(1)}\right)$$

نواصل العملية حتى نحصل على القيم المثلى لشعاع المعالم في المرحلة P حيث نلاحظ سكون المعاملات المقدرة: $\hat{\beta} = \beta^{(P)} = \beta^{(P-1)}$ وفقا للخطوات التالية:

- تقدير قيمة ابتدائية لكل معلمة في النموذج.
- تقدير نموذج من القيم الابتدائية.
- حساب مجموع مربعات الأخطاء.
- تعديل المعالم حتى يكون المنحنى ممثلا لنقاط البيانات بصورة جيدة.
- نكرر الخطوة السابقة حتى نتأكد من جودة تمثيل المنحنى لنقاط البيانات.
- نتوقف عن التكرار عند ثبات قيمة مجموع المربعات.

مثال: لتكن لديك المعطيات التالية

X	1	2	3	4	5	6
Y	10	5.49	0.89	-0.14	-1.07	0.84

- قدّر معادلة الانحدار الأسّي بطريقة غوص- نيوتن إذا علمت أن القيم الابتدائية للمعلمتين $B_0 = 25.5$ و $B_1 = -0.905$

تقدير معادلة الانحدار الأسي وفق خوارزمية غوص-نيوتن

- المشتقات الجزئية لمعادلة الانحدار: $Y = \beta_0\, e^{\beta_1 X_t}$

- مصفوفة المشتقات الجزئية بالنسبة للقيم الابتدائية

$$Z(B^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0.4045 & 10.3158 \\ 0.1637 & 8.3464 \\ 0.0662 & 5.0647 \\ 0.0268 & 2.7318 \\ 0.0108 & 1.3814 \\ 0.0044 & 0.6706 \end{pmatrix}$$

- حساب الشعاع $\tilde{Y} = Y_t - f(x, B^{(0)})$

$$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} -0.3158 \\ 1.3168 \\ -0.7982 \\ -0.823 \\ -1.3463 \\ 0.7282 \end{pmatrix}$$

- حساب الشعاع $(Z(B^{(0)})^t\, \tilde{Y})$

$$\left(Z\left(B^{(0)}\right)^t \tilde{Y}\right) = \begin{pmatrix} 0.0015 \\ 0.0704 \end{pmatrix}$$

- حساب شعاع المقدرات $B^{(1)}$

$$B^{(1)} = [Z(B^{(0)})^t\, Z(B^{(0)})]^{-1} * Z\left(B^{(0)}\right)^t \tilde{Y}$$

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 36.4248 & -1.0271 \\ -1.0271 & 0.0337 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0015 \\ 0.0704 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0191 \\ 0.0008 \end{pmatrix}$$

باستخدام البرمجية Minitab نحصل على القيم المثلى للمقدرات بعد 10 تكرارات كما هو مبين في ما يلي:

Nonlinear Regression: y = a * exp(b * x)

```
Method

Algorithm         Gauss-Newton
Max iterations             200
Tolerance              0.00001


Starting Values for Parameters

Parameter   Value
a            25.5
b          -0.905


Estimates at Each Iteration
```

```
Iteration      SSE        a          b
        0  7.96190  25.5000  -0.905000
        1  7.86255  24.1086  -0.856040
        2  7.85418  24.5176  -0.869060
        3  7.85376  24.4312  -0.866037
        4  7.85373  24.4526  -0.866761
        5  7.85373  24.4476  -0.866589
        6  7.85373  24.4488  -0.866630
        7  7.85373  24.4485  -0.866621
        8  7.85373  24.4485  -0.866623
        9  7.85373  24.4485  -0.866622
       10  7.85373  24.4485  -0.866622
```

```
Equation

y = 24.4485 * exp(-0.866622 * x)


Parameter Estimates

Parameter  Estimate  SE Estimate
a           24.4485      4.33997
b           -0.8666      0.13654

y = a * exp(b * x)
```

و منه تكون معادلة الانحدار على الشكل: $Y_t = 24.448e^{(-0.866)X_t}$

3- نماذج الإنتشار:

في كثير من الأحيان عند تحليل بيانات خاصة بالنمو في الاقتصاد أو البيولوجيا و غيرها فإن الشكل البياني للمنحنى الممثل للبيانات يشبه حرف s حيث ينطلق من نقطة معينة و يتزايد النمو تدريجيا إلى نقطة التواء ثم الانخفاض بعدها، و قد تم استخدام العديد من الدوال الرياضية للتعبير عن هذه النماذج و منها ما يلي:

3-1 النموذج اللوجيستي (logistic) : يعرف بالعلاقة الرياضية التالية:

$$Y_t = \frac{Y_{max}}{1 + br^t}$$

حيث أن: b ،r، α هي معالم النموذج.

$\alpha = \text{Max } Y_t$ « حد الإشباع ».

و r سرعة الإنتشار $0 < r < 1$.

3-2 نموذج غومبرتز (Gompertz) : يعرف بالشكل الرياضي التالي:

$$Y_t = e^{(\alpha + br^t)}$$

حيث أن: e أساس اللوغاريتم الطبيعي.

$e^{\alpha} = \text{Max } Y_t$ حد الإشباع.

و r سرعة الإنتشار $0 < r < 1$.

وb α معالم النموذج، حيث: $b < 0$.

3-3 طرق التقدير: يمكن تقدير نماذج الانتشار بتقريبها إلى الصورة الخطية إذا كان ذلك ممكنا بمعلومية حد الإشباع أو بالانحدار غير الخطي.

و تقدير عتبة التشبع أو حد الإشباع عن طريق الحدس أو المسح.

أ - طريقة الحدس: يتم تقدير عتبة التشبع أو حد الإشباع من دراسة سابقة لعينة مماثلة اعتمادا على التشابه الجغرافي أو الخصائص الديمغرافية أو الاجتماعية و غيرها.

ب - طريقة المسح: يتم تقدير عتبة التشبع أو حد الإشباع عن طريق تحديد مجال محتمل للعتبة و التقدير خطوة بخطوة n مرة بطول معين داخل المجال و يتم اختيار العتبة التي تحقق أدنى مجموع لمربعات الأخطاء.

مثال: لتكن المعطيات التالية حول نسبة امتلاك السكان في بلد أوروبي لأجهزة إلكترونية خلال 19 سنة

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y ‰	44.7	61	81.3	105.8	134	165.6	200.1	236.9	275.4	315
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
y ‰	355.2	395.3	434.8	473.3	510.1	544.9	577.3	607	633.9	

إذا علمت أن أقصى قيمة لنسبة الامتلاك حددت من دراسة سابقة في الو م أ بـ 800 بالألف،

- قدر معادلة الانحدار وفق النموذج اللوجيستي
- قدر معادلة الانحدار وفق نموذج Gompertz (الحل كتمرين للطالب)

تقدير النموذج اللوجيستي

لتقدير المعالم نقرب المعادلة إلى الشكل الخطي

$$Y_t = \frac{800}{1+br^t} \Rightarrow \frac{800}{Y_t} = 1 + br^t$$
$$\Rightarrow \frac{800}{Y_t} - 1 = br^t \Rightarrow \log\left(\frac{800}{Y_t} - 1\right) = \log(br^t)$$
$$\Rightarrow \log\left(\frac{800}{Y_t} - 1\right) = \log b + t \log r$$

نضع $\log\left(\frac{800}{Y_t} - 1\right) = W$ و $\log b = \alpha_1$ و $\log r = \alpha_2$ فنجد

باستخدام برمجية Eviews تم تقدير المعلمتين α_1 و α_2

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.788297	0.054746	50.93144	0.0000
T	-0.224566	0.004802	-46.76960	0.0000

R-squared	0.992288	Mean dependent var	0.542632
Adjusted R-squared	0.991834	S.D. dependent var	1.268607
S.E. of regression	0.114635	Akaike info criterion	-1.394819
Sum squared resid	0.223402	Schwarz criterion	-1.295405
Log likelihood	15.25079	Hannan-Quinn criter.	-1.377995
F-statistic	2187.395	Durbin-Watson stat	0.166365
Prob(F-statistic)	0.000000		

و منه

$$b = e^{(2.7883)} = 16.2533$$

$r = e^{(-0.22456)} = 0.7988$

و بالتالي

$$Y_t = \frac{800}{1 + 16,25(0.7988)^t}$$