نماذج المعادلات الآنية

1- مفهوم نموذج المعادلات الآنية: هو أحد النماذج متعددة المعادلات تكون المتغيرات التابعة فيها متغيرات مفسرة في معادلات أخرى و لا يمكن تقدير معالم معادلة وحيدة من معادلات النموذج بدون الأخذ في الاعتبار المعادلات الأخرى في النموذج.

يتكون نموذج المعادلات الآنية من العديد من المعادلات تصنف إلى معادلات سلوكية تفسر التغير في ظاهرة معينة بدلالة متغير أو مجموعة متغيرات أخرى، و معادلات تعريفية تمثل تعريفا رياضيا لمتغير ما في إطار نظام محاسبي معين، و معادلات توازنية تمثل شروطا اقتصادية معينة كتساوي العرض والطلب في سوق معينة، كما يتضمن نموذج المعادلات الآنية العديد من المتغيرات التي تصنف إلى متغيرات داخلية تتحدد آنيا داخل النموذج نفسه ومتغيرات خارجية تعتبر قيما معطاة، إضافة إلى متغيرات عشوائية تتمثل في حد الخطأ في المعادلات.

2- أمثلة لنماذج المعادلات الآنية:

2-1- نموذج توازن السوق: يتحدد توازن السوق أي السعر والكمية المباعة من سلعة ما من خلال تفاعل قوى العرض والطلب. وبغرض التبسيط نفترض أن معادلات العرض والطلب خطية وبإضافة المتغير العشوائي نكتب النموذج كما يلي:

دالة الطلب $Q_{dt} = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \varepsilon_{1t}$ مع $\alpha_1 < 0$

دالة العرض $Q_{st} = \beta_0 + \beta_1 P_t + \varepsilon_{2t}$ مع $\beta_1 > 0$

شرط التوازن $Q_{dt} = Q_{st}$

نلاحظ أن تحديد سعر التوازن أو كمية التوازن كمتغيرات داخلية يتطلب استخدام جميع معادلات النموذج في آن واحد، كما نلاحظ أيضا أن الحدود العشوائية تؤثر على المتغير التابع و المتغير المفسر أيضا، فإذا تغير المتغير العشوائي ε_{1t} بسبب التغير في العوامل التي تؤثر على الطلب مثل الدخل و ذوق المستهلك، ينتقل منحنى الطلب إلى اليمين إذا كانت قيمة ε_t موجبة و ينتقل إلى اليسار إذا كانت القيمة سالبة، مما يؤدي إلى تغير قيمة P و Q التوازنية. وكذلك إذا تغير ε_{2t} بسبب التغير في العوامل التي تؤثر على العرض مثل تغير تكاليف عوامل الإنتاج، ينتقل منحنى العرض إلى اليسار إذا كانت قيمة ε_t موجبة و ينتقل إلى اليمين إذا كانت القيمة سالبة، مما يؤدي أيضا إلى تغير قيمة P و Q التوازنية لذلك

لا يمكن تطبيق طريقة المربعات الصغرى نظرا لخرق فرضية الاستقلالية بين المتغيرات المفسرة والمتغير العشوائي.

2-2- النموذج الكينزي البسيط للدخل الوطني: نكتب نموذج كينز البسيط للدخل الوطني المكون من ثلاث قطاعات على الشكل التالي:

دالة الاستهلاك $C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \varepsilon_{1t}$ مع $0 < \alpha_1 < 1$

دالة الاستثمار $I_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \varepsilon_{2t}$

شرط التوازن $Y_t = C_t + I_t + G_t$

نلاحظ في هذا النموذج أن تحديد قيم التوازن للمتغيرات الداخلية يتطلب استخدام جميع معادلات النموذج في آن واحد، و ينتج من ذلك أن الحدود العشوائية تؤثر على المتغير التابع و المتغير المفسر أيضا؛ فنجد من معادلة الاستهلاك أن التغير في الحد العشوائي ε_{1t} يؤدي إلى التغير في الاستهلاك C_t و الذي يؤدي بدوره إلى التغير في الدخل في معادلة شرط التوازن و من ثم فإن ε_{1t} يؤدي إلى التغير في الدخل كمتغير مفسر في معادلة الاستهلاك، و الحال نفسه بالنسبة للمتغير ε_{2t} الذي يؤثر في الاستثمار I_t والذي يؤثر بدوره في الدخل في معادلة شرط التوازن و من ثم فإن ε_{2t} يؤثر في تغير الدخل كمتغير مفسر في معادلة الاستثمار، و بالتالي فإن المتغيرات المفسرة غير مستقلة عن حد الخطأ و هو ما يمثل خرقا لفرضيات المربعات الصغرى العادية التي لا تصلح للتقدير في هذه الحالة لكونها تعطي مقدرات متحيزة و غير متسقة.

3- المعادلات الهيكلية و المعادلات المختصرة:

3-1- النموذج الهيكلي: تمثل المعادلات الهيكلية توصيفا للعلاقات بين المتغيرات الاقتصادية أي تصور لبنية أو سلوك متغيرات معينة و كيفية التفاعل فيما بينها حسب ما يراه الباحث و الذي ينطلق عادة من النظرية الاقتصادية. و لبناء نموذج المعادلات الآنية يجب أن نفرق بين المتغيرات الداخلية التي تتحدد آنيا و المتغيرات الخارجية التي تعتبر قيما معطاة، كما نميز أيضا بين المعادلات السلوكية أو الهيكلية التي تسمى معاملاتها بالمعاملات الهيكلية التي يتم اختبار قيمتها و إشاراتها، و المعادلات التعريفية أو التوازنية التي تسمى المتطابقات و هي معادلات صحيحة بالتعريف.

من نموذج كينز للدخل الوطني أعلاه المتغيرات C و I و Y متغيرات داخلية يتم تحديد قيمتها بحل النموذج أما G و Y_{t-1} فهي متغيرات خارجية تتحدد خارج النموذج بقيمة محددة سلفا. و تمثل معادلتا الاستهلاك والاستثمار المعادلات الهيكلية للنموذج و معاملاتها α_0 و α_1 و β_0 و β_1 هي المعاملات الهيكلية.

3-2- النموذج المختصر: تعبر المعادلات المختصرة لنموذج المعادلات الآنية عن كتابة كل متغير داخلي كدالة لجميع المتغيرات الخارجية و حد الخطأ في النموذج، و من خلال النموذج الكينزي يكون الشكل المختصر على النحو التالي:

$$C_t = \frac{\alpha_0 + \alpha_1\beta_0}{1-\alpha_1} + \frac{\alpha_1\beta_1}{1-\alpha_1}Y_{t-1} + \frac{\alpha_1 G_t}{1-\alpha_1} + \frac{\varepsilon_{1t} + \alpha_1\varepsilon_{2t}}{1-\alpha_1}$$

$$I_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \varepsilon_{2t}$$

$$Y_t = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{1-\alpha_1} + \frac{\beta_1}{1-\alpha_1}Y_{t-1} + \frac{G_t}{1-\alpha_1} + \frac{\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t}}{1-\alpha_1}$$

3-3- الشكل العام لنماذج المعادلات الآنية:

ليكن لدينا نموذج خطي مكون من G معادلة هيكلية بـ m متغير داخلي وK متغير خارجي و متغيرات الحد العشوائي، نكتب النموذج الهيكلي في شكل جملة معادلات خطية غير متجانسة على النحو التالي:

$$b_{11}Y_{1t} + b_{12}Y_{2t} + b_{13}Y_{3t} + \ldots\ldots\ldots + b_{1m}Y_{mt} + c_{11}X_{1t} + c_{12}X_{2t} + c_{13}X_{3t} + \ldots\ldots\ldots + c_{1k}X_{kt} = \varepsilon_{1t}$$

$$b_{21}Y_{1t} + b_{22}Y_{2t} + b_{23}Y_{3t} + \ldots\ldots\ldots + b_{2m}Y_{mt} + c_{21}X_{1t} + c_{22}X_{2t} + c_{23}X_{3t} + \ldots\ldots\ldots + c_{2k}X_{kt} = \varepsilon_{2t}$$

. . . .

. . . .

$$b_{m1}Y_{1t} + b_{m2}Y_{2t} + b_{m3}Y_{3t} + \ldots\ldots\ldots + b_{mm}Y_{mt} + c_{m1}X_{1t} + c_{m2}X_{2t} + c_{m3}X_{3t} + \ldots\ldots\ldots + c_{mk}X_{kt} = \varepsilon_{mt}$$

و بصيغة المصفوفات على النحو التالي:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & & b_{2m} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ \vdots \\ Y_{mt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & & c_{2k} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ \vdots \\ X_{kt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{mt} \end{pmatrix}$$

أي:

إذا كانت المصفوفة B نظامية يمكن الانتقال من النموذج الهيكلي إلى النموذج المختصر بإيجاد الشعاع Y بدلالة الشعاع X كما يلي:

$$Y = -B^{-1}CX + B^{-1}\varepsilon$$

حيث إن $-B^{-1}C$ مصفوفة معاملات النموذج المختصر.

تعطي طريقة المربعات الصغرى العادية تقديرات متحيزة للمعالم الهيكلية و يعرف هذا التحيز بالتحيز الآني أو تحيز المعادلات الآنية، و يظهر هذا التحيز لأن المتغيرات الداخلية في النموذج و التي تظهر أيضا كمتغيرات مفسرة ترتبط بحدود الخطأ، فتكون القيم المتوقعة لمقدرات المعالم الهيكلية لا تساوي القيم الحقيقية $E(\hat{\beta}) \neq \beta$.

فإذا كان $\hat{\beta}$ معامل الانحدار الخطي المقدر بطريقة المربعات الصغرى العادية وفق العلاقة $\hat{\beta} = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$

وبتعويض y في هذه العلاقة بـ $y = \beta x_t + \varepsilon_t$ نجد:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x(\beta x + \varepsilon)}{\sum x^2} \Rightarrow \hat{\beta} = \frac{\sum(\beta x^2 + x\varepsilon)}{\sum x^2}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = \frac{\beta \sum x^2}{\sum x^2} + \frac{\sum x\varepsilon}{\sum x^2}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = \beta + \frac{\sum x\varepsilon}{\sum x^2}$$

وبالتالي إذا كان هناك ارتباط بين متغير مفسر و حد الخطأ فإن $\sum x\varepsilon \neq 0$ و يكون $\hat{\beta}$ مقدر متحيز لـ β

4- مشكلة التعريف[1]

يقصد بمشكلة التعريف اختبار إلى إمكانية إيجاد تقديرات وحيدة و غير متحيزة للمعالم الهيكلية لكل معادلة في نموذج المعادلات الآنية من معالم النموذج المختصر، و قبل تقدير النموذج يجب تعريف المعادلات كل على حدى باستخدام شروط التعريف.

4-1- شروط التعريف:

<u>أ- شرط الرتبة:</u> هو الشرط الضروري و الكافي للتعريف، ووفقا لهذا الشرط في نموذج معادلات آنية عددها G تكون معادلة معرّفة إذا وجد محدد واحد غير معدوم من الدرجة G -1 لمصفوفة المعاملات المستبعدة من هذه المعادلة و إن كانت تدخل في المعادلات الأخرى في النموذج، و يتم تعريف هذا الشرط بعبارة أخرى حيث يجب أن يكون عدد المتغيرات المفسرة الواردة في المعادلة محل التعريف k سواء كانت داخلية أو خارجية أكبر من أو يساوي عدد معادلات النموذج مطروحا منه واحد.

ولاختبار شرط الرتبة نتبع الخطوات التالية:

- نحول النموذج إلى جملة معادلات متجانسة مع إهمال حد الخطأ؛
- نرتب المعاملات الهيكلية في مصفوفة بدلالة جميع المتغيرات كما هي مرتبة في النموذج؛
- نلغي من المصفوفة سطر المعادلة محل التعريف و الأعمدة ذات المعاملات غير الصفرية للسطر نفسه؛
- نحسب محدد المصفوفة الناتجة لتحديد الرتبة.

<u>ب- شرط الدرجة:</u> شرط ضروري و لكنه غير كاف لتعريف أي معادلة في النموذج، حيث تكون أي معادلة معرفة وفقا لهذا الشرط إذا كان عدد المتغيرات التي لا تظهر في المعادلات الأخرى أكبر من أو يساوي عدد معادلات النموذج مطروحا منه واحد.

$$K - M \geq G - 1$$

حيث:

[1] تسمى أيضا بمشكلة التمييز أو مشكلة التعرّف أو مشكلة التشخيص أو التحديد

K: العدد الكلي للمتغيرات في النموذج

M: العدد الكلي للمتغيرات في المعادلة محل التشخيص

G: عدد معادلات النموذج و يساوي عدد المتغيرات الداخلية في النموذج

و يمكن صياغة شرط الرتبة بشكل آخر كما يلي:

تكون أي معادلة معرفة إذا كان عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة منها أكبر من أو يساوي عدد المتغيرات الداخلية المدرجة فيها مطروحا منه واحد.

$$m - m` + k - k` \geq G - 1$$

حيث:

k: عدد المتغيرات الخارجية في النموذج

k`: عدد المتغيرات الخارجية في المعادلة محل التشخيص

m: عدد المتغيرات الداخلية في النموذج

m`: عدد المتغيرات الداخلية في المعادلة محل التشخيص

G: عدد معادلات النموذج و يساوي عدد المتغيرات الداخلية في النموذج

و من خلال تعريف كل معادلة نميز ثلاث حالات:

- المعادلة ناقصة التعريف إذا كانت $m - m` + k - k` < G - 1$/ $K - M < G - 1$ و في هذه الحالة لا يمكن تقدير معالم المعادلة.

- المعادلة تامة التعريف إذا كانت $m - m` + k - k` = G - 1$/ $K - M = G - 1$ ويمكن تقدير معالمها.

- المعادلة زائدة التعريف أو فائقة التعريف إذا كانت $m - m` + k - k` > G - 1$/ $K - M > G - 1$ ويمكن تقدير معالمها.

5- طرق تقدير نماذج المعادلات الآنية:

هناك العديد من الطرق المستخدمة لتقدير نماذج المعادلات الآنية للتغلب على التحيز الذي يحدث عند استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية لتقدير المعالم الهيكلية.

5-1- طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة ILS: تستخدم هذه الطريقة لتقدير المعادلات تامة التعريف فقط، حيث يتم تقدير معالم النموذج المختصر بطريقة المربعات الصغرى العادية و استخدامها لتقدير المعالم الهيكلية للمعادلات المعرّفة. تتضمن هذه الطريقة الخطوات التالية:

- إيجاد النموذج المختصر.
- تقدير معالم النموذج المختصر بطريقة المربعات الصغرى العادية.
- تقدير المعالم الهيكلية من مقدرات معالم النموذج المختصر باستخدام العلاقات الرياضية التي تربط بينهما.

5- 2- طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين 2SLS: هي الطريقة الأكثر استخداما في الدراسات التطبيقية لتقدير المعالم الهيكلية للمعادلات المعرّفة تماما و المعادلات زائدة التعريف في نموذج المعادلات الآنية لتجنب تحيز مقدرات المربعات الصغرى العادية بإيجاد متغير يتميز بأنه مساويا للمتغير الداخلي في القيمة وغير مرتبط مع حد الخطأ العشوائي، يسمى بالمتغير الأداة Instrumental variable و يحل محل المتغير الداخلي الأصلي كمتغير مفسر في الطرف الأيمن للمعادلات ويكون غير مرتبط مع الخطأ العشوائي وحيث إنه لا توجد سببية بين المتغير الأداة وأي من المتغيرات الداخلية فإن فرضيات المربعات الصغرى العادية تكون محققة.

يتم التقدير بطريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين كما يلي:

- المرحلة الأولى: يتم إجراء انحدار النموذج المختصر للحصول على القيم المقدرة للمتغيرات الداخلية $\hat{Y}_t$

- المرحلة الثانية: يتم تقدير المعالم الهيكلية بطريقة المربعات الصغرى العادية بعد تعويض المتغيرات الداخلية الموجودة على يمين المعادلة الهيكلية (كمتغيرات مفسرة) بالقيم المقدرة التي تسمى بالمتغيرات الأداة.

وتتميز مقدرات 2SLS بأنها متحيزة في العينات الصغيرة ولكنها متسقة أو غير متحيزة في العينات الكبيرة.

مثال: لتكن البيانات التالية حول الأجور، الرقم القياسي للأسعار، الإنتاجية و الناتج الداخلي الخام للو م أ

	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969
W	2.09	2.14	2.22	2.28	2.36	2.46	2.56	2.68	2.85	3.04
P	88.7	89.6	90.6	91.7	92.9	94.5	97.2	100	104.2	109.8
Q	80.9	83	86.6	89.6	92.8	95.9	98.4	100	103.2	102.9
Y	506	523.3	563.8	594.7	635.7	688.1	753	796.3	868.5	935.5
	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
W	3.23	3.45	3.7	3.94	4.24	4.53	4.86	5.25	5.69	6.16
P	116.3	121.3	125.3	133.1	147.7	161.2	170.5	181.5	195.4	217.4
Q	103	106.2	110.1	112	108.5	110.5	114.4	116.2	116.8	115.5
Y	982.4	1063.4	1171.1	1306.6	1412.9	1528.8	1702.2	1899.5	2127.6	2368.5

لتقدير نموذج الأسعار و الأجور على الشكل التالي:

$$W_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 Q_t + \varepsilon_{1t}$$
$$P_t = \beta_0 + \beta_1 W_t + \beta_2 Y_t + \varepsilon_{2t}$$

الحل:

- النموذج المطلوب تقديره ذو طبيعة آنية لوجود تأثير متبادل بين المتغيرين الداخليين حيث إن W دالة في P وهذه الأخيرة دالة في W و التقدير بطريقة المربعات الصغرى العادية يعطي تقديرات متحيزة للمعالم لأن P مرتبط مع ε_{1t} و W مرتبط مع ε_{2t}.

- تعريف النموذج: يتم التعريف وفق شرط الدرجة و شرط الرتبة

- تعريف معادلة الأجور:

المتغيرات الداخلية W و P

المتغيرات الخارجية Q

1- شرط الدرجة:

العدد الكلي للمتغيرات في النموذج K = 4

العدد الكلي للمتغيرات في المعادلة محل التشخيص M = 3

عدد معادلات النموذج و يساوي عدد المتغيرات الداخلية في النموذج G = 2

K - M = 4 - 3 = G - 1 = 2 - 1 = 1

وفق شرط الدرجة المعادلة معرفة تماما.

2- شرط الرتبة:

مصفوفة المعاملات الهيكلية

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\alpha_0 & -\alpha_2 & 0 \\ -\beta_1 & 1 & -\beta_0 & 0 & -\beta_2 \end{pmatrix}$$

بإلغاء السطر الأول من المصفوفة (سطر المعادلة محل التعريف) و الأعمدة ذات المعاملات غير الصفرية للسطر نفسه نحصل على الشعاع $\begin{pmatrix} 0 \\ -\beta_2 \end{pmatrix}$ و رتبته تساوي الواحد

$Rang(V_1) = G-1=1$

وفق شرط الرتبة المعادلة معرفة تماما.

- تعريف معادلة الأسعار:

المتغيرات الداخلية W و P

المتغيرات الخارجية Y

1- شرط الدرجة:

العدد الكلي للمتغيرات في النموذج K = 4

العدد الكلي للمتغيرات في المعادلة محل التشخيص M = 3

عدد معادلات النموذج و يساوي عدد المتغيرات الداخلية في النموذج G = 2

K - M = 4 - 3 = G - 1 = 2 - 1 = 1

وفق شرط الدرجة المعادلة معرفة تماما.

2- شرط الرتبة:

مصفوفة المعاملات الهيكلية

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\alpha_0 & -\alpha_2 & 0 \\ -\beta_1 & 1 & -\beta_0 & 0 & -\beta_2 \end{pmatrix}$$

بإلغاء السطر الثاني من المصفوفة (سطر المعادلة محل التعريف) و الأعمدة ذات المعاملات غير الصفرية للسطر نفسه نحصل على الشعاع $\begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ و رتبته تساوي الواحد

Rang(V_2) = G-1=1

وفق شرط الرتبة المعادلة معرفة تماما.

النموذج معرّف تماما و يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة لتقدير المعالم الهيكلية

- التقدير بطريقة المربعات الصغرى غير المباشرة:

1- كتابة النموذج المختصر:

- معادلة الأجور:

$$W_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 Q_t + \varepsilon_{1t} \Rightarrow W_t = \alpha_0 + \alpha_1(\beta_0 + \beta_1 W_t + \beta_2 Y_t + \varepsilon_{2t}) + \alpha_2 Q_t + \varepsilon_{1t}$$

$$\Rightarrow W_t = \frac{\alpha_0 + \alpha_1\beta_0}{1-\alpha_1\beta_1} + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1\beta_1}Q_t + \frac{\alpha_1\beta_2}{1-\alpha_1\beta_1}Y_t + \frac{\varepsilon_{1t} + \alpha_1\varepsilon_{2t}}{1-\alpha_1\beta_1}$$

أي:

$$W_t = a_0 + a_1 Q_t + a_2 Y_t + u_{1t}$$

- معادلة الأسعار:

$$P_t = \beta_0 + \beta_1 W_t + \beta_2 Y_t + \varepsilon_{2t} \Rightarrow P_t = \beta_0 + \beta_1(\alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 Q_t + \varepsilon_{1t}) + \beta_2 Y_t + \varepsilon_{2t}$$

$$\Rightarrow P_t = \frac{\beta_0 + \alpha_1\beta_0}{1-\alpha_1\beta_1} + \frac{\alpha_2\beta_1}{1-\alpha_1\beta_1}Q_t + \frac{\beta_2}{1-\alpha_1\beta_1}Y_t + \frac{\beta_1\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t}}{1-\alpha_1\beta_1}$$

أي:

$$P_t = b_0 + b_1 Q_t + b_2 Y_t + u_{2t}$$

2- تقدير معادلات الشكل المختصر بطريقة المربعات الصغرى العادية:

$$\widehat{W}_t = \underset{(2.083)}{0.5466} + \underset{(1.569)}{0.0049}\, Q_t + \underset{(34.202)}{0.0022} Y_t \qquad R^2 = 0.997$$

$$\widehat{P}_t = \underset{(10.183)}{92.522} - \underset{(-5.009)}{0.547}\, Q_t + \underset{(36.486)}{0.0802} Y_t \qquad R^2 = 0.996$$

3- إيجاد المعاملات الهيكلية

لدينا مصفوفة معاملات النموذج المختصر $A = -B^{-1}C$

و منه: $BA = -C$

بتعويض المصفوفات نجد

و نحصل على البرنامج الخطي غير المتجانس التالي:

$$0.5466 - 92.522\,\alpha_1 = \alpha_0$$
$$0.0049 + 0.547\,\alpha_1 = \alpha_2$$
$$0.0022 - 0.0802\,\alpha_1 = 0$$

$-0.5466\,\beta_1 + 92.522 = \beta_0$
$-0.0049 - 0.547\,\alpha_1 = 0$
$-0.0022\beta_1 + 0.0802 = \beta_2$

نحل النموذج بطريقة التعويض فنحصل على قيم المعاملات الهيكلية كما يلي:

$\alpha_0 = -0.19885$, $\alpha_1 = 0.0274$, $\alpha_2 = 0.01988$, $\beta_0 = 153.5403$, $\beta_1 = -111.6326$, $\beta_2 = 0.3258$

و يكون النموذج الهيكلي على الشكل:

$\widehat{W}_t = = -0.19885 + 0.0274\,P_t + 0.01988\,Q_t$
$\widehat{P}_t = 153.5403 - 111.6326\,W_t + 0.3258\,Y_t$

- التقدير بطريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين:

1- بعد تقدير معادلات الشكل المختصر بطريقة المربعات الصغرى العادية الذي تم سابقا في طريقة

ILS نجد القيم المقدرة للمتغيرات الداخلية (المتغيرات الأداة) التي نستخدمها لتقدير المعادلات الهيكلية:

	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969
	88.82	89.06	90.34	91.17	92.71	95.21	99.05	101.65	105.69	111.22
	2.05	2.09	2.20	2.28	2.39	2.51	2.67	2.77	2.94	3.09
	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
	114.93	119.67	126.18	136.00	146.44	154.64	166.41	181.25	199.21	219.24
	3.19	3.38	3.63	3.94	4.15	4.41	4.81	5.24	5.74	6.26

2- نقدر المعادلات الهيكلية بطريقة المربعات الصغرى العادية باستخدام القيم المقدرة للمتغيرات الداخلية في محل القيم الأصلية كمتغيرات مفسرة في الطرف الثاني للمعادلات

$W_t = \alpha_0 + \alpha_1\widehat{P}_t + \alpha_2 Q_t + \varepsilon_{1t}$
$P_t = \beta_0 + \beta_1\widehat{W}_t + \beta_2 Y_t + \varepsilon_{2t}$

فنحصل على

$\widehat{W}_t = -1.957 + 0.027\,\widehat{P}_t + 0.01976\,Q_t \qquad R^2 = 0.997$
$\qquad (-9.468) \quad (34.202) \quad (7.114)$

$\widehat{P}_t = 152.957 - 110.573\,\widehat{W}_t + 0.32\,Y_t \qquad R^2 = 0.996$
$\qquad (7.25) \quad (-5.009) \quad (6.422)$