Chapitre 02
La logique des propositions
Ordre0

1. Introduction

Dans la logique propositionnelle, on étudie les relations entre des énoncés, que l'on va appeler propositions ou encore des formules ou des assertions. Ces relations peuvent être exprimées par l'intermédiaire de connecteurs logiques qui permettent, par composition, de construire des formules syntaxiquement correctes. On trouve principalement : la conjonction, la disjonction (inclusive), l'implication, l'équivalence et la négation.

D'autre termes La logique propositionnel est appelé aussi booléenne est la plus simple logique, elle ne comporte que des variables et des connecteurs logiques. Comme toute logique, elle est caractérisé par :

- Une syntaxe : la façon de construire les formules ;
- Une sémantique : la signification des formules ;
- Un système de preuve : comment démontrer les formules.

2. Syntaxe (Formalisation)

S'intéresser à la syntaxe de la logique propositionnelle, c'est considérer les formules qui sont "bien écrites". Pour cela, on se donne un alphabet (langage que l'on notera **L**), i.e. un ensemble de symboles, avec :

- **Un ensemble** V = {p,q,r,...} dénombrable de lettres appelées variables propositionnelles. Il s'agit des propositions atomiques telles que par exemple « 6 est divisible par 2 » ;

- **Atomes :** Nous appellerons atomes ou variables propositionnelles ou propositions élémentaires des énoncés dont nous ne connaissons pas la structure interne, et qui gardent leur identité tout au long du calcul propositionnel qui nous occupe. L'ensemble des variables propositionnelles est noté v(L). Elles sont écrites en minuscules (p, q...);
- **Connecteurs logiques** : ¬ (opérateur unaire) , ⇒ ,**⇔,** ∧, ∨(opérateurs binaires)
- **Les constantes** {vrai et faux}. On rappelle que ⊥ désigne une constante propositionnelle toujours fausse, et ⊤ une constante propositionnelle toujours vraie.

- **Formules :** Nous dénoterons les formules par des lettres majuscules de l'alphabet latin ou grec (A, B, . . . ou φ...). L'ensemble des formules, noté F(L), est défini par : les atomes sont des formules (v(L) ⊆ F(L)) .

Si A et B sont des formules, alors (A ↔B), (A→ B), (A ∧ B), (A ∨B) et (¬ B) sont des formules.

- Littéral : Un littéral est un atome (littéral positif) ou la négation d'un atome (littéral négatif).

- **Clause :** Une clause est une disjonction de littéraux ($p_1 \vee p_2 \vee . . . \vee p_n$), les littéraux pouvant être positifs ou négatifs.

3. Les formules bien formées

Le langage est constitué de l'ensemble des Formules Bien Formées (appelées aussi : fbfs) ou expressions bien formées défini comme suit:

- ***Base :*** tout atome est une fbf, de même les constantes propositionnelles sont des fbf.

- **Induction :** si F et G sont des fbfs alors (¬G), (F ∨ G), (F ∧ G), (F ⇒ G) et (F⇔G) sont des fbfs.
- **Clôture :** toutes les fbfs sont obtenues par application des 2 règles

Ci-dessus.

Exemple

Les expressions suivantes sont-elles des formules bien formées ?

1. p ∧ ¬q,

2. p ∨ ∨r,

3. (p ∨ ∧ (¬p)),

4. (p ∨ ¬p).

Solution

Réponse	V/F
1	V
2	F
3	F
4	V

4. Le langage propositionnel

Le langage propositionnel est composé de formules représentant des propositions. Comme les autres langages, le langage du calcul propositionnel est caractérisé par sa syntaxe et sa sémantique.

Exercice d'application 1

Plaçons-nous dans le contexte suivant : « Il aime les fraises et la chantilly ».

Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. « Il aime les fraises et il aime la chantilly ».
2. « Il aime les fraises et il n'aime pas la chantilly ».
3. « Il aime les fraises ou il aime la chantilly ».
4. « Il aime les fraises ou il n'aime pas la chantilly ».
5. « Il aime les fraises donc il aime la chantilly ».
6. « Il aime les fraises donc il n'aime pas la chantilly ».
7. « Il n'aime pas les fraises donc il aime la chantilly ».
8. « Il n'aime pas les fraises donc il n'aime pas la chantilly ».

Exercice d'application 2

Essayez de déterminer si les formules suivantes appartiennent à la logique des

Propositions :

Soient A, B, C, D des fbfs :

a) $((A \vee (\neg B)) \wedge (C \vee D))$: oui
b) $(A \vee B) (\wedge \vee C)$: non

5. Sémantique

La sémantique de la logique propositionnelle s'intéresser de déterminer la valeur de vérité d'un énoncé, c'est-à-dire d'une formule. On parle de l'interprétation d'une formule : il s'agit plus concrètement d'affecter une valeur vraie ou fausse à chacune des variables propositionnelles qui la compose. Pour une formule à n variables, il y a 2^n mondes possibles. Pour cela, on utilise ce qu'on appelle des tables de vérité.(Voir chapitre 01) .

5.1. Une interprétation

Une interprétation est une fonction qui associe une valeur de vérité à chaque variable propositionnelle.

5.2. La table de vérité

Une **table de vérité** (parfois appelée **fonction de vérité**) est une table mathématique utilisée en logique classique en particulier le calcul propositionnel classique et l'algèbre de Boole. Afin de représenter de manière sémantique des expressions logiques et calculer la valeur de leur fonction relativement à chacun de leurs arguments fonctionnels (chaque combinaison de valeur assumée par leurs variables logiques).

Une table de vérité est un tableau comportant plusieurs colonnes. Les valeurs des cellules de ce tableau sont appelées « valeurs de vérité » (1 ou V pour vrai, 0 ou F pour faux) en logique.

Les colonnes de gauche définissent les valeurs de vérité de différentes propositions en mathématiques (logique propositionnelle).

La colonne de droite indique la valeur de vérité de l'expression logique en mathématiques, ou en logique.

Exemple

Les deux tables de vérité présentées ci-dessous permettent de définir les connecteurs logiques **et**, **ou**, en mathématiques ou en logique propositionnelle.

P	**Q**	**(P ∧ Q)**
V	F	F
V	V	V
F	F	F
F	V	F

Table 2.1: Table de vérité de la conjonction

P	**Q**	**(P ∨ Q)**
V	F	V
V	V	V
F	F	F
F	V	V

Table 2.2: Table de vérité de la disjonction

5.3. Catégories de formule

- **Modèle** : On appelle modèle une interprétation pour laquelle une formule est vraie.
- **Consistance :** On dit qu'une formule A est consistante , ou satisfiable, ou vérifiable , s'il existe une interprétation de ses variables propositionnelles qui la rende vraie. Autrement dit la formule A est consistante si et seulement si la formule A a un modèle.
- **Inconsistance :** Une formule pour laquelle il n'existe pas d'interprétation qui la rende vraie est dite inconsistante, ou encore insatisfiable, ou , invérifiable , ou plus simplement fausse. La formule $(A \wedge \neg A)$ est inconsistante .
- **Tautologie :** Une formule valide, ou tautologie, est une formule vraie quelles que soient les valeurs de vérité des atomes qui la composent (vraie dans toute interprétation). On la note $\models A$. La formule $(A \vee \neg A)$ est une tautologie .
- **antilogies :** Une formule insatisfiable, falsifiable ou sémantiquement inconsistante, ou encore antilogie, est une formule fausse dans toute interprétation.
- **Formules invalides :** Une formule invalide est fausse dans au moins une interprétation.
- **Formules contingentes :** Une formule contingente est vraie dans certaines interprétations et fausse dans d'autres.
- **Conséquence logique :** Soient deux formules A et B. Nous dirons que B est la conséquence valide de A notée $(A \models B)$ si tout modèle de A est un modèle de B.

Exercice d'application 3

Soit la table de vérité suivante :

A	B	C	$B \wedge C$	$A \rightarrow (B \wedge C)$
vrai	vrai	vrai	vrai	vrai
vrai	vrai	faux	faux	faux
vrai	faux	vrai	faux	faux
vrai	faux	faux	faux	faux
faux	vrai	vrai	vrai	vrai
faux	vrai	faux	faux	vrai
faux	faux	vrai	faux	vrai
faux	faux	faux	faux	vrai

La formule $A \Rightarrow (B \wedge C)$:

1. A= faux , B= vrai, C= vrai est un modèle pour la formule $A \Rightarrow (B \wedge C)$

- La formule $A \Rightarrow (B \wedge C)$: est
  1. **Consistante (satisfiable , vérifiable)**
  2. **Invalide**

3. **Formule contingente**

4. B ∧ C ⊨ A⇒ (B ∧ C) on dit que A⇒ (B ∧ C) est une conséquence logique de B ∧ C car tout modèle de B ∧ C est un modèle de A⇒ (B ∧ C).

5.4. Formes normales (Normalisation)

5.4.1. Forme normale conjonctive

Une formule en forme normale conjonctive ou FNC (en anglais, Conjunctive Normal Form, Clausal Normal Form ou CNF) est une conjonction de clauses, où une clause est une disjonction de littéraux. Les formules en FNC sont utilisées dans le cadre de la démonstration automatique de théorèmes ou encore dans la résolution du problème SAT (en particulier dans l'algorithme DPLL).

Exemple

Toutes les expressions suivantes sont en FNC:

- A ∧ B
- A
- (A ∨B) ∧C
- (A ∨ ¬B ¬C ∨ ¬D) ∧ (¬D∨ E∨F)

5.4.2. Algorithme de mise sous FNC

Début

1- Éliminer toute les occurrences des connecteurs → et ↔ en remplaçant :

F → G par ¬F∨G

et F ↔G par (¬F∨G) ∧ (¬G∨F)

2- Appliquer les lois de Morgan pour faire entrer la ¬ vers l'intérieur en remplaçant :

¬(F∨G) par ¬F∧¬G

¬(F∧G) par ¬F∨¬G

3- Éliminer les doubles négations en remplaçant ¬¬ F par F.

4- Appliquer les règles de distributivité en remplaçant:

F∨(G ∧H) par (F∨G) ∧ (F∨H)

(F∧G)∨H par (F∨H) ∧ (G∨H)

5.4.3. Forme normale disjonctive

Une **forme normale disjonctive** ou **FND** (en anglais, *disjunctive normal form* ou *DNF*) est une normalisation d'une expression logique qui est une disjonction de clauses conjonctives. Elle est utilisée dans la démonstration automatique de théorèmes. Une expression logique est en FND si et seulement si elle est une disjonction d'une ou plusieurs conjonctions d'un ou plusieurs littéraux.

Exemple

Toutes les expressions suivantes sont en FND:

- $A \vee B$
- A
- $(A \wedge B) \vee C$
- $(A \wedge \neg B \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg D \wedge E \wedge F)$

5.4.4. Algorithme de mise sous FND

Idem que la méthode de mise sous FNC où le $\wedge$ est remplacé par $\vee$ et le $\vee$ est remplacé par $\wedge$ dans les étapes 2 et 4.

Exemple 1

Transformer en forme normale conjonctive la formule donnée ci-dessous.

$((b \vee c) \Longrightarrow a \vee d$

1. Appliquer l'équivalence double-implique et implique-ou pour supprimer les $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$. La formule devient donc : $(\neg(b \vee c) \vee a) \vee d$.
2. Appliquer la loi de Morgan pour "descendre" les négations près des variables. La formule devient : $((\neg b \wedge \neg c) \vee a) \vee d$.
3. Appliquer la distributivité pour descendre les $\vee$ et remonter les $\wedge$, donc $((\neg b \vee a) \wedge (\neg c \vee a)) \vee d \equiv ((\neg b \vee a) \vee d) \wedge ((\neg c \vee a)) \vee d)$.
4. Appliquer l'associativité des $\vee$ et $\wedge$ $\equiv$ $(\neg b \vee a \vee d) \wedge (\neg c \vee a \vee d)$.

Exemple 2

a) Donner la fnc (forme normale conjonctive) de

$(P \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow S)$

Solution

$(P \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow S) \rightarrow \neg(P \wedge (Q \Rightarrow R)) \vee S$

$\rightarrow (\neg P \vee \neg(Q \Rightarrow R)) \vee S$

$\rightarrow (\neg P \vee \neg(\neg Q \vee R)) \vee S)$

$\rightarrow (\neg P \vee (Q \wedge \neg R)) \vee S$

$\rightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg R)) \vee S$

$\rightarrow (\neg P \vee Q \vee S) \wedge (\neg P \vee \neg R \vee S)$

b) Donner la fnd (forme normale disjonctive) de

$(P \lor \neg Q) \Rightarrow R$

Solution

$(P \lor \neg Q) \Rightarrow R \rightarrow \neg(P \lor \neg Q) \lor R$
$\rightarrow (\neg P \land Q) \lor R$

Exercice d'application

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Si Napoléon était chinois alors $3 - 2 = 2$
2. Soit Cléopâtre était chinoise, soit les grenouilles aboient.
3. Soit les roses sont des animaux, soit les chiens ont 4 pattes.
4. Si l'homme est un quadrupède, alors il parle.
5. Les roses ne sont ni des animaux, ni des fleurs.
6. Paris est en France ou Madrid est en chine.
7. La pierre ponce est un homme si et seulement si les femmes sont des sardines.
8. Les poiriers ne donnent pas de melons, et Cléopâtre n'est pas chinoise.

Solution d'exercice d'application

1. Il s'agit, ici d'une implication. « Napoléon est chinois » est faux et « $3 - 2 = 2$ » est faux, or la seule possibilité pour qu'une implication soit fausse est qu'une assertion vraie implique une assertion fausse, donc l'assertion 1. est vraie.

2. Une phrase, en français, du genre « soit …, soit … » se traduit mathématiquement par « … ou … » « Cléopâtre était chinoise » est faux et « les grenouilles aboient » est faux donc l'assertion 2. est fausse.

3. « les roses sont des animaux » est faux et « les chiens ont 4 pattes » est vrai, donc l'assertion 3. est vraie.

4. « l'homme est un quadrupède » est faux et «il parle » est vrai, donc l'assertion 4. est vraie.

5. « les roses ne sont ni des animaux, ni des fleurs » peut se traduire par « les roses ne sont pas des animaux et les roses ne sont pas des fleurs ». « les roses ne sont pas des animaux » est vrai et « les roses ne sont pas des fleurs » est faux donc « les roses ne sont ni des animaux, ni des fleurs » est faux. Avec un minimum de bon sens c'est assez évident !

6. « Paris est en France » est vrai et « Madrid est en chine » est faux, donc « Paris est en France ou Madrid est en chine » est vrai.

7. « la pierre ponce est un homme » est faux et «les femmes sont des sardines » est faux, une équivalence entre deux assertion fausse est vraie.

8. « les poiriers ne donnent pas de melons » est vrai et «Cléopâtre n'est pas chinoise » est vrai, donc « les poiriers ne donnent pas de melons, et Cléopâtre n'est pas chinoise » est vrai.

6. Résolution

6.1. Mise en forme clausale

On appelle clause une formule qui n'utilise que des littéraux (positive ou négative) et la disjonction.

Remarque : Un litteral tout seul est une clause dans laquelle il n'y a pas de disjonction. Si on veut faire apparaître une disjonction, on peut toujours rééecrire le littéral l en $l \vee \bot$.

Exemple 2

Soi p,q des variables propositionnelles.

- $\bot$, p, $\top$, $\neg p$, $p \vee q$, $p \vee q \vee \neg p$ *sont des clauses.*
- $p \wedge q$, $p \wedge \top$, $p \Rightarrow q$ *ne sont pas des clauses.*

6.2. La réfutation

La table de vérité est un moyen simple et sûr pour contrôler la validité d'une déduction logique. Néanmoins, cette assertion n'est pas toujours vraie, spécialement si le nombre de variables propositionnelles dépassent un certains nombre comme 8, 16 ou plus. Dans ces cas le contrôle de la validité d'une déduction logique par la table de vérité ne sera pratique.

Pou trouver un moyen alternatif qui permet de vérifier la validité d'une déduction logiques nous devons rendre compte aux théorèmes mathématiques. Plus généralement, si F ={F1, . . . ,Fn} est un ensemble de formules et C une formule, on a ***le théorème de déduction (TD)*** suivant :

$$F \models C \text{ si et seulement si } \models (F \rightarrow C)$$

Ce théorème peut s'exprimer ainsi : « C se déduit de F si et seulement si (F → C) est une tautologie ».

Parmi les variantes intéressantes de ce théorème, on retiendra essentiellement au théorème suivant :

$$F \models C \text{ si et seulement si } F \cup \{\neg C\} \text{ est inconsistant}$$

Ce théorème aussi connu sous le nom ***de théorème de réfutation (TR),*** est à la base de la méthode de résolution que nous verrons à la fin de ce chapitre.

6.3 Schémas de résolution

Nous avons principalement trois schémas de résolution :

A. ***Modus ponens*** : c'est le schémas le plus simple, {Contrôle, Contrôle → Note}|= Note

B. Modus tollens : Nous aurions pu raisonner différemment au schéma précédemment cité, en partant de la négation de la conclusion, c'est-à-dire ¬Note, associée à notre connaissance Contrôle → Note. En utilisant cette règle, nous avons {Contrôle →Note,

¬Note} |= ¬Contrôle. Cela étant contradictoire avec le fait que nous savons Contrôle, nous en déduisons nécessairement Note.

C. règle d'inférence générale : Parmi les divers schémas de raisonnement existants, nous allons nous concentrer sur la règle de résolution, dont le modus ponens et le modus tollens sont en fait des cas particuliers. Cette règle d'inférence s'exprime ainsi :

$\{ X \vee A, \neg X \vee B\} \models A \vee B$.

Le principe de résolution

Règle de transitivité du calcul propositionnel : $p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$

Forme clausale : { ¬p∨q, ™¬q∨r } |= { ¬p∨r }

Si A et B sont deux clauses Complémentaires (qui contiennent respectivement les littéraux Φ et ¬Φ) , alors on peut déduire la nouvelle clause C, dite ***Résolvant*** obtenue en réunissant tous les littéraux de A et B sauf Φ et ¬Φ.

Remarque : Le principe de résolution étant complet, si l'ensemble de clauses considéré est inconsistant, on arrive toujours à générer la clause vide.

Preuve par réfutation en logique des propositions

• ***Méthode***

– négation de la conclusion

– mise sous forme clausale

– application du principe de résolution jusqu' à obtention de la clause vide

– conclusion

Exercice d'application

Il existe en Alger un club qui obéit aux règles suivantes :

a) Tout joueur algérois porte un short.

b) Tout joueur qui porte un short est algérois et marié.

c) Tout joueur non algérois porte des chaussettes rouges.

d) Tout joueur porte un short ou ne porte pas de chaussettes rouges.

e) Les joueurs mariés ne sortent pas le vendredi.

f) Un joueur sort le vendredi si et seulement s'il est algérois.

1. Traduire l'énoncé ci-dessus en logique propositionnelle.
2. Prouver en utilisant la méthode de résolution que l'ensemble est insatisfiable.

Solution d'exercice d'application

1. Traduire l'énoncé ci-dessus en logique propositionnelle :

- Tout joueur algérois porte un short $A \rightarrow S$.
- Tout joueur qui porte un short est algérois et marié. $S \rightarrow A \wedge M$
- Tout joueur non algérois porte des chaussettes rouges. $\neg A \rightarrow R$.
- Tout joueur porte un short ou ne porte pas de chaussettes rouges $S \vee \neg R$.
- Les joueurs mariés ne sortent pas le vendredi $M \rightarrow \neg V$.
- Un joueur sort le vendredi si et seulement s'il est algérois $V \leftrightarrow A$.

2. Forme clausale :

$\{ \neg A \vee S,\ \neg S \vee A,\ \neg S \vee M,\ A \vee R,\ S \vee \neg R,\ \neg M \vee \neg V,\ \neg V \vee A,\ \neg A \vee V \}$.

En appliquant le principe de résolution à cet ensemble, on produit la clause vide : cela signifie que l'ensemble est inconsistant.(démonstration par réfutation)

i. $A \vee R, S \vee \neg R$ ---- $A \vee S$.
ii. $A \vee S, \neg A \vee S$----S.
iii. $S, \neg S \vee M$-----M.
iv. $M, \neg M \vee \neg V$--- $\neg V$.
v. $\neg V, \neg A \vee V$ ---- $\neg A$.
vi. $\neg A, \neg S \vee A$---- $\neg S$.
vii. $\neg S, S$---- $\perp$.

Donc, l’ensemble est insatisfiable.

7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la logique propositionnelle définie autant que logique sans quantificateurs qui s'intéresse uniquement aux opérations logiques : la négation, la conjonction, la disjonction, l'implication et l'équivalence. Elle permet de construire des raisonnements à partir de ces connecteurs. Nous aborderons dans le prochain chapitre la logique descriptive ou souvent appelée « logique d'ordre 1 ».