Part I

Chapitre 3: logique propositionnelle

1 La proposition (assertion) logique et la valeur de vérité

Définition 1 *C'est une phrase informative qu'on peut juger vraie ou fausse. La valeur de vérité est "vrai" ou "faux" noté* 1 *pour vrai et* 0 *pour* $faux$*.La proposition peut être affirmative ou négative.*

Exemple 1 *La terre est sphérique (affirmative) sa négation: la terre n'est pas sphérique.*

La proposition peut être composée. Dans ce cas sa valeur de vérité dépend des valeurs de vérité des propositions qui la composent.

Exemple 2 *La terre est sphérique et tourne autour du soleil.*

Remarque 1 *Une question, un ordre, un paradoxe ne sont pas des propositions car on ne peut pas les attribuer des valeurs de vérité.*

Exemple 3 *Où alez-vous ? Rangez vos affaires, je mens.*

1.1 Langage propositionnel

Il est composé de :

1. **L'Alphabet:** Une proposition notée P, Q, R,.... , un connecteur logique $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, des parenthèses.
2. **La syntaxe:** Une formule notée α , β , $\ldots$ est une composition de propositions à l'aide de connecteurs logiques. La composition se fait en respectant les règles suivantes :

   i) Toute proposition est une formule.

   ii) Si α est une formule alors $\rceil\alpha$ est aussi une formule.

iii) Si α est β sont deux formules alors $\alpha \circ \beta$ est aussi une formule, où $\circ$ l'un des connecteurs $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

iv) Si α est une formule alors (α) est aussi une formule.

Remarque 2 *Toute formule contient des propositions ou des connecteurs juxtaposés est consédérée mal formée.*

2 Priorité des connecteurs

La connaissance des priorités permet la bonne lecture de la formule et évite les parenthèses supplémentaires.

- La priorité des connecteurs de la plus forte à la plus faible: $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.
- Lorsque le même connecteur se répète dans la même formule, la priorité est donné à celui le plus à gauche.
- Lorsqu'un connecteur est mis entre parenthèse alors il est prioritaire.

3 Sémantique

La sémantique du langage propositionnelle s'intéresse à donner une valeur de vérité à chaque formule du langage.

On peut définir une fonction $v : EF \longrightarrow V = \{0, 1\}$, tel que EF désigne l'ensemble des formules.

Exercice 1 *Ètablir les tables de vérité de toutes les formules contenant deux propositions. Trois propositions. Déduire le nombre de lignes de la table d'une formule contenenant n propositions.*

4 Satisfiabilité

Une formule α est *satisfiable* ou satisfaisable, ssi, sa table de vérité contient au moins une ligne dont la valeur de vérité de α est 1. En généralisant, on dit qu'un ensemble de formules $\Gamma = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ est satisfiable ssi, dans sa table de vérité contient au moins une ligne tel que toutes les valeurs sont vraies.

Exercice 2 *Déterminer les formules satisfiables dans les tables que vous avez établi dans l'exercice précédent.*

5 Tautologie et antilogie

On dit qu'une formule β est une *tautologie*, si elle est vraie dans toutes les lignes de sa table de vérité. On note $\vdash \beta$. Une *antilogie* est une formule fausse dans toutes les lignes de sa table de vérité.

Exemple 4 *Les propositions* $\rceil(\rceil P) \Leftrightarrow P$, $\rceil(P \wedge \rceil P)$, $(P \vee \rceil P)$, $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$, $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$ *sont des tautologies tandis que la proposition* $((P \wedge Q) \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge (Q \vee R))$ *n'est pas une tautologie. (Ètablir les tables de vérité).*

6 Èquivalence logique

On dit que α et β sont *logiquement équivalentes* si elles ont la même table de vérité et on note : $\alpha \equiv \beta$

Exemple 5 $(\rceil P \vee Q) \equiv (P \Rightarrow Q) \equiv (\rceil Q \Rightarrow \rceil P)$ *(établir la table de vérité).*

7 Conséquence logique

On dit qu'une formule β est une *conséquence logique* d'une formule α et on note $\alpha \vdash \beta$ si la valeur de vérité de β est 1 dans toutes les lignes où la valeur de vérité de α est 1, en d'autre terme: la formule $(\alpha \Rightarrow \beta)$ est une tautologie. En généralisant, on dit que qu'une formule β est une conséquence logique de l'ensemble de formules $\Gamma = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ et on note $\Gamma \vdash \beta$ si la valeur de vérité de β est 1 dans toutes les lignes où les valeurs de vérité des formules de Γ sont toutes 1.

Exemple 6 $(\rceil P \vee Q) \vdash (P \Rightarrow Q)$ *(établir la table de vérité).*

Exemple 7 *Même résultat pour* $\Gamma = \{P \Rightarrow Q, \rceil Q\} \vdash \rceil P$.

7.1 Règles d'inférence logique

Proposition 1 *Les tableaux associés montrent les régles d'inférence (déduction) pour la logique propositionnelle et la logique des prédicats. En particulier, la régle de Modus Ponens:* $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \vdash Q$ *et la règle de Modus Tollens;* $(P \Rightarrow Q) \equiv (\rceil Q \Rightarrow \rceil P)$*,ou encore sous forme du règle de Modus ponens:* $(\rceil Q \wedge (\rceil Q \Rightarrow \rceil P)) \vdash \rceil P$.

Exercice 3 *À l'aide des tables de vérité, montrer les règles dans les tableaux associés*

Règles d'inférence pour la logique propositionnelle

$\neg a$	$\vdash$	$a \Rightarrow b$	condition suffisante	CS
$a,\ a \Rightarrow b$	$\vdash$	b	*modus ponens*	MP
$a \Rightarrow b,\ \neg b$	$\vdash$	$\neg a$	preuve par l'absurde	PA-1
$a \Rightarrow b,\ b \Rightarrow c$	$\vdash$	$a \Rightarrow c$	transitivité de l'implication	TI
$a \vee b,\ \neg a \vee c$	$\vdash$	$b \vee c$	résolution de Robinson	RR
$a \wedge b$	$\vdash$	a	élimination selon $\wedge$	$E_\wedge$
a, b	$\vdash$	$a \wedge b$	introduction selon $\wedge$	$I_\wedge$
a	$\vdash$	$a \vee b$	introduction selon $\vee$	$I_\vee$
$a \Leftrightarrow b$	$\vdash$	$a \Rightarrow b$	élimination selon $\Leftrightarrow$	$E_\Leftrightarrow$
$a \Rightarrow b,\ b \Rightarrow a$	$\vdash$	$a \Leftrightarrow b$	introduction selon $\Leftrightarrow$	$I_\Leftrightarrow$
$a,\ \neg a$	$\vdash$	faux	contradiction	C
$a \vee b,\ a \Rightarrow c,\ b \Rightarrow c$	$\vdash$	c	preuve par cas	PC
$\neg a \Rightarrow$ faux	$\vdash$	a	preuve par l'absurde	PA-2
si $a, \Gamma \vdash b$	alors	$\Gamma \vdash a \Rightarrow b$	théorème d'Herbrand	TH

Règles d'inférence pour la logique des prédicats

	$(\forall x)\, a(x)$	$\vdash$	$a[x := t]$	cas particulier	CP
$\star$	$a(x)$	$\vdash$	$(\forall x)\, a(x)$	généralisation	GE
	$a[x := t]$	$\vdash$	$(\exists x)\, a(x)$	preuve d'existence	PE
	$(a(x) \Rightarrow b(x)),\, (\forall x)\, a(x)$	$\vdash$	$(\forall x)\, b(x)$	*modus ponens*	MP
$\star$	$(a(x) \Rightarrow b(x)),\, (\exists x)\, a(x)$	$\vdash$	$(\exists x)\, b(x)$	*modus ponens*	MP

NOTES.

La notation $a[x := t]$ représente la formule construite à partir de $a(x)$ en remplaçant par le terme t chaque occurrence libre de la variable x. *Exemple : si la formule* $a(x)$ *est* $x > 1 \wedge (\forall x)\, x \leq 0$ *et si* $t = 3$, *alors la formule* $a[x := t]$ *sera* $3 > 1 \wedge (\forall x)\, x \leq 0$.

$\star$ La règle de la généralisation et le *modus ponens* avec $\exists$ s'appliquent seulement lorsque la variable x n'a fait l'objet d'aucune hypothèse.

Lois d'équivalence et implications pour $\wedge$, $\vee$ et $\Rightarrow$

faux est absorbant pour et	$a \wedge \text{faux}$	$\Leftrightarrow$	faux	LE-1
vrai est absorbant pour ou	$a \vee \text{vrai}$	$\Leftrightarrow$	vrai	LE-2
vrai est neutre pour et	$a \wedge \text{vrai}$	$\Leftrightarrow$	a	LE-3
faux est neutre pour ou	$a \vee \text{faux}$	$\Leftrightarrow$	a	LE-4
idempotence-et	$a \wedge a$	$\Leftrightarrow$	a	LE-5
idempotence-ou	$a \vee a$	$\Leftrightarrow$	a	LE-6
commutativité-et	$a \wedge b$	$\Leftrightarrow$	$b \wedge a$	LE-7
commutativité-ou	$a \vee b$	$\Leftrightarrow$	$b \vee a$	LE-8
associativité-et	$a \wedge (b \wedge c)$	$\Leftrightarrow$	$(a \wedge b) \wedge c$	LE-9
associativité-ou	$a \vee (b \vee c)$	$\Leftrightarrow$	$(a \vee b) \vee c$	LE-10
distributivité-et-sur-ou	$a \wedge (b \vee c)$	$\Leftrightarrow$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	LE-11
distributivité-ou-sur-et	$a \vee (b \wedge c)$	$\Leftrightarrow$	$(a \vee b) \wedge (a \vee c)$	LE-12
absorption-et-sur-ou	$a \wedge (a \vee b)$	$\Leftrightarrow$	a	LE-13
absorption-ou-sur-et	$a \vee (a \wedge b)$	$\Leftrightarrow$	a	LE-14
absorption-et-sur-ou avec $\neg$	$a \wedge (\neg a \vee b)$	$\Leftrightarrow$	$a \wedge b$	LE-15
absorption-ou-sur-et avec $\neg$	$a \vee (\neg a \wedge b)$	$\Leftrightarrow$	$a \vee b$	LE-16
De-Morgan-négation-et	$\neg (a \wedge b)$	$\Leftrightarrow$	$\neg a \vee \neg b$	LE-17
De-Morgan-négation-ou	$\neg (a \vee b)$	$\Leftrightarrow$	$\neg a \wedge \neg b$	LE-18
contradiction	$a \wedge \neg a$	$\Leftrightarrow$	faux	LE-19
tiers-exclus	$a \vee \neg a$	$\Leftrightarrow$	vrai	LE-20
involution	$\neg\neg a$	$\Leftrightarrow$	a	LE-21

implication-comme-disjonction	$a \Rightarrow b \quad \Leftrightarrow \quad \neg a \vee b$	LE-22
contraposée	$a \Rightarrow b \quad \Leftrightarrow \quad \neg b \Rightarrow \neg a$	LE-23
négation-implication	$\neg(a \Rightarrow b) \quad \Leftrightarrow \quad a \wedge \neg b$	LE-24
distributivité-implication-ou-gauche	$a \Rightarrow (b \vee c) \quad \Leftrightarrow \quad (a \wedge \neg b) \Rightarrow c$	LE-25
distributivité-implication-ou-droite	$(a \vee b) \Rightarrow c \quad \Leftrightarrow \quad (a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow c)$	LE-26
distributivité-implication-et-gauche	$a \Rightarrow (b \wedge c) \quad \Leftrightarrow \quad (a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c)$	LE-27
double-implication	$(a \Leftrightarrow b) \quad \Leftrightarrow \quad (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$	LE-28
ou-exclusif-en-f.n.c.	$(a \oplus b) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$	LE-29
négation-de-l'implication	$(a \oplus b) \quad \Leftrightarrow \quad \neg (a \Leftrightarrow b)$	LE-30

	$\neg a \quad \Rightarrow \quad (a \Rightarrow b)$	IT-1
modus ponens	$a \wedge (a \Rightarrow b) \quad \Rightarrow \quad b$	IT-2
	$(a \Rightarrow b) \wedge \neg b \quad \Rightarrow \quad \neg a$	IT-3
transitivité	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c) \quad \Rightarrow \quad (a \Rightarrow c)$	IT-4
	$(a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \quad \Rightarrow \quad b \vee c$	IT-5

Équivalences et implications pour la logique des prédicats

permutation des $\forall$	$(\forall x)(\forall y)a(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall y)(\forall x)a(x,y)$	PO-1
permutation des $\exists$	$(\exists x)(\exists y)a(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists y)(\exists x)a(x,y)$	PO-2
négation	$\neg (\forall x)a(x) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x)\neg a(x)$	PO-3
négation	$\neg (\exists x)a(x) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x)\neg a(x)$	PO-4
distributivité	$(\forall x)(a(x) \wedge b(x)) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x)a(x) \wedge (\forall x)b(x)$	PO-5
distributivité	$(\exists x)(a(x) \vee b(x)) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x)a(x) \vee (\exists x)b(x)$	PO-6
	$(\exists x)(a(x) \wedge b(x)) \quad \Rightarrow \quad (\exists x)a(x) \wedge (\exists x)b(x)$	PO-7
	$(\forall x)a(x) \vee (\forall x)b(x) \quad \Rightarrow \quad (\forall x)(a(x) \vee b(x))$	PO-8
	$((\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x))) \quad \Rightarrow \quad ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))$	PO-9
	$((\exists x)a(x) \Rightarrow (\exists x)b(x)) \quad \Rightarrow \quad ((\exists x)(a(x) \Rightarrow b(x)))$	PO-10