Introduction à la théorie des ensembles

2.1 Théorie naive des ensembles

Dans la théorie naïve des ensembles les notions d'ensemble et d'appartenance jugés intuitives ne sont pas définis de façon précise.

On note $x \in E$ le fait que x soit un élément de E. Deux ensembles sont égaux lorsqu'ils ont les mêmes éléments.

L'ensemble vide est noté par $\{\}$ ou $\varnothing$.

En général on décrit un ensemble ou bien en donnant la liste de tous ses éléments. Par exemple, l'ensemble des étudiants de 2ème année licence Analyse promotion 2016-2017 ou bien en caractérisant ses éléments parmi ceux d'un ensemble déjà connu. Par exemple $E = \{n \in \mathbb{N} \,|\, (\exists m \in \mathbb{N})\ (n = 2m)\}$.

On dit que F est un *sous-ensemble* de E, ou bien F est contenu dans E, et on note $F \subset E$, si tout élément de F appartient aussi à E. On dit aussi que F est une *partie* de E.

La réunion de deux ensembles notée $E \cup F$ est l'ensemble de tous les éléments de E et de F. L'intersection de deux ensembles noté $E \cap F$ est l'ensemble de tous les éléments

2.2 Paradoxe liés à la théorie naive des ensembles

Un paradoxe, d'après l'étymologie (du grec paradoxos : « contraire à l'opinion commune », de para : « contre », et doxa : « opinion »), est une idée ou une proposition à première vue surprenante ou choquante, c'est-à-dire allant contre le sens commun.

En mathématique un paradoxe (ou antinomie) est un énoncé ou un raisonnement qui contient ou semble contenir une contradiction logique.

Plusieurs paradoxes apparaissent dans la théorie naive des ensembles où justement les notions d'ensemble et d'apprtenance ne sont pas définies clairement.

Russell décrivit le paradoxe portant son nom dans une lettre adressée en 1902 à Gottlob Frege, où il montrait à ce dernier que l'une des règles introduite dans ses Grundgesetze der Arithmetik, la compréhension non restreinte, rendait la théorie de Frege contradictoire.

Frege affirmait que n'importe quel énnoncé dépendant d'une ou plusieurs variables permet de définir un ensemble. C'est ce qui est appelé le schéma de compréhension non restreint.

2.2.1 Le paradoxe de Russell (1901)

Le paradoxe de Russell résulte de la question suivante :

"*L'ensemble de tous les ensembles qui ne s'appartiennent pas eux mêmes appartient il à lui même ?*"

L'ensemble peut se traduire par la notation suivante :

$$E = \{x : \ x \notin x\}$$

Nous avons alors deux possibilités :

1. Supposons que l'ensemble E appartient à lui même donc il vérifie le prédicat $x \notin x$ et par conséquent $E \notin E$.
2. Supposons à présent que l'ensemble E n'appartient pas à lui même on a alors :$E \notin E$ donc par définition $E \in E$.

2.2.2 Autres versions du paradoxe de Russell

Le paradoxe de Russell peut être énnoncé sous des formes plus ludiques, nous proposons ici certaines de ces formes.

Le paradoxe du barbier

Le barbier du village décide de raser tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes, et seulement ceux-là.

On se pose alors la question : qui rase le barbier ? Nous avons dans ce cas deux possibilités :

1. S'il se rase lui-même, alors il rase quelqu'un qui ne se rase pas lui-même.
2. S'il ne se rase pas lui-même alors il devrait se raser en respectant sa décision.

Le paradoxe du menteur crêtois

Le crétois Épiménide (entre 600 et 550 av. J.-C.) a écrit un vers à l'origine de ce paradoxe :

"Les Crétois sont toujours menteurs, de méchantes bêtes, des ventres paresseux."
On se pose alors la question suivante : Est ce qu'Épiménide dit la vérité ?

Nous avons dans ce cas deux possibilités :

1. L'affirmation :"Les Crétois sont toujours menteurs" est vraie dans ce cas Épiménide dit la vérité or Épiménide est crêtois donc il ment.
2. L'affirmation :"Les Crétois sont toujours menteurs" est fausse dans ce cas Épiménide dit la vérité.

Le paradoxe du bibliothécaire

Le catalogue de tous les catalogues qui ne se mentionnent pas eux-mêmes doit il se mentionner lui même ?

1. Si le catalogue ne se mentionne pas lui même alors il devra dès lors figurer dans la liste des catalogues ne se mentionnant pas eux-mêmes.
2. Si le catalogue se mentionne lui même c'est que c'est un catalogue qui ne se mentionne pas par définition.

2.2.3 Paradoxe de Berry

L'idée de départ est de décrire les entiers naturels par des énoncés (en français).Par exemple :

1. Deux est une expression d'un mot décrivant un entier naturel.
2. Un plus deux est une expression de trois mots décrivant un entier naturel.
3. Un plus deux plus trois plus...plus neuf est une expression de 17 mots décrivant un entier naturel.

Comme le vocabulaire disponible est fini -Les dictionnaires français les plus complets atteignent 90 000 mots- les énoncés de N mots peuvent décrire au plus 90000^N entiers naturels.

Considérons à présent l'ensemble des entiers naturels non descriptibles par une expression de quinze mots ou moins.Cet ensemble possède un plus petit élément.[1] Ce plus petit élément devrait donc être exprimé par seize mots et plus or l'énoncé :

«Le plus petit entier naturel non descriptible par une expression de quinze mots ou moins.»

contient quinze mots justement d'où le paradoxe.

2.2.4 Ensemble bien défini :

Un ensemble E est bien défini si pour tout objet x l'énoncé "$x \in E$ et $x \notin E$" est faux.

2.3 Théorie de Zermelo-Fraenkel

Nous présentons une version simplifiée de la théorie de Zermelo Fraenkel. Cette théorie repose sur les axiomes suivants :

Axiome de l'égalité (ou Extensionalité)

Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments.

$$\forall x \ \forall y \ \ [\forall z(z \in x \Longleftrightarrow z \in y) \Longrightarrow x = y]$$

[1] Pourquoi est ce vrai ?

Axiome de compréhension (ou de séparation).

Étant donné un ensemble U et un prédicat $P(x)$ il existe un ensemble E dont les éléments sont ceux, parmi les éléments de U, qui ont la propriété $P(x)$.

$$E = \{x \in U : P(x)\}$$

Remarque 2.1 *Cet axiome est également appelé axiome de compréhension restreint par opposition à l'axiome de compréhension universel qui mène au paradoxe de Russel.*

Proposition 2.1 *Il n'y a pas d'ensemble ayant pour éléments tous les ensembles.*

Preuve. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un ensemble de tous les ensembles noté E.
Dans ce cas l'écriture suivante est correcte

$$F = \{x \in E : x \notin x\}.$$

Or cette écriture mène au paradoxe de Russel et donc à une contradiction.
Ainsi il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles. ■

Remarque 2.2 *On parle dans ce cas de collection de tous les ensembles.*

Axiome de la paire

Étant donnés deux ensembles a et b, il existe un ensemble c qui contient a et b et eux seulement.

$$\forall a\ \forall b\ \exists c\ \forall t\ [t \in c \Longleftrightarrow (t = x \vee t = y)]$$

L 'ensemble c dont les seuls éléments sont a et b est noté $\{a, b\}$.

Si $a \neq b$ l'ensemble$\{a, b\}$ est appelé une paire. Si $a = b$ l'ensemble $\{a, b\}$ est appelé un singleton, on le note $\{a\}$.

Axiome de la réunion (ou de la somme)

Pour tout ensemble a il existe un ensemble b dont les éléments sont exactement les éléments des éléments de a. La formule correspondante est :

$$\forall a \ \exists b \ \left(\forall x, x \in b \Longleftrightarrow \exists y \ , y \in a \wedge x \in y\right).$$

Cet ensemble est unique, on l'appelle la réunion des éléments de x et on le note $\cup_{y \in x} y$.

Axiome de l'ensemble des parties

A tout ensemble on peut associer un ensemble qui contient exactement les parties du premier.

$$\forall a \exists b \left(\forall x, x \in b \Rightarrow x \subset a\right)$$

Remarque 2.3 *La notation $x \subset a$ est une abbréviation pour $\forall y, y \in x \Leftrightarrow y \in a$.*

Remarque 2.4 *L'ensemble des parties de l'ensemble a est noté $\mathfrak{P}(a)$.*

2.3.1 Axiome de l'infini

Il existe un ensemble $\mathbb{M}$ dont $\emptyset$ est élément et tel que pour tout x appartenant à $\mathbb{M}$ l'ensemble $\{x\}$ appartient aussi à $\mathbb{M}$.

Remarque 2.5 *Cet axiome construit indirectement les entiers naturels. Aini $\emptyset$ correspond à 0 et pour chaque entier n l'entier $n+1$ correspond à $n \cup \{n\}$.*

Exemple 2.5

Entier naturel	*Notation ensembliste*
0	$\emptyset$
1	$\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$
2	$\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
3	$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

qui appartiennent à la fois à E et à F.La différence de deux ensembles noté $E \backslash F$ est l'ensemble de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à F.

Si $F \subset E$ alors nous notons $C_E F = E \backslash F$ l'ensemble complément de F dans E. Enfin la différence symétrique $E \Delta F$ est l'ensemble défini par $E \Delta F = (E \backslash F) \cup (F \backslash E)$.

2.1.1 Le produit cartésien

Définition 2.1 *Soient E et F deux ensembles et soient $x \in E$ et $y \in F$. Alors on définit le couple ordonné (x, y) par*

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Lemme 2.1 *On a $(x, y) = (x', y')$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.*

Preuve. On a :

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}.$$

On a deux situations :

1- $\{x\} = \{x'\} \Rightarrow x = x'$ d'où $\{x, y\} = \{x', y'\}$ ainsi on obtient $y = y'$.

2- $\{x\} = \{x', y'\} \Rightarrow x = x' = y'$ comme $\{x, y\} = \{x'\}$ on obtient $x = x' = y' = y$. ■

2.1.2 Ensembles des parties

Définition 2.2 *Soit E un ensemble. On appelle ensemble des parties de E l'ensemble, noté $\mathcal{P}(E)$ constitué de touts les sous-ensembles de E.*

Exemple 2.1 *Soit $E = \{a, b, c\}$ alors*

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

2.1.3 Relation binaire

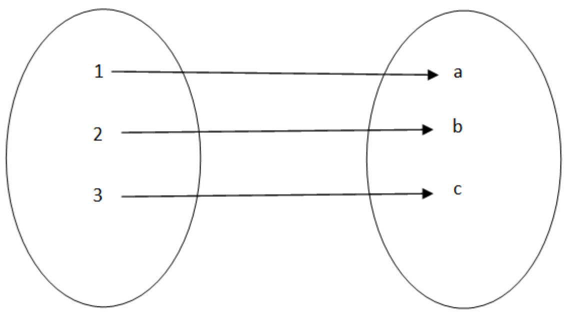
Une relation binaire $\mathcal{R}$ d'un ensemble E vers un ensemble F est définie par une partie $G_{\mathcal{R}}$ de $E \times F$. Les composantes d'un couple appartenant au graphe d'une relation $\mathcal{R}$ sont dit en relation par $\mathcal{R}$

Si $(x, y) \in G$, on dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}y$.

Quand une relation binaire est définie d'un ensemble E vers lui-même, on l'appelle relation interne sur E, ou simplement relation sur E.

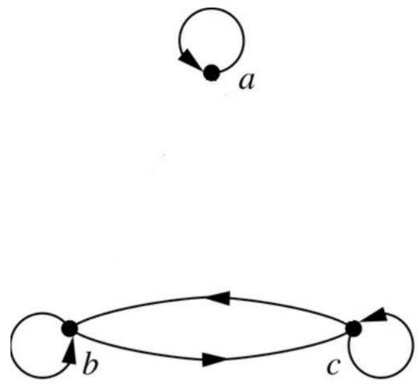
Exemple 2.2 *Soient les ensembles* $E = \{1, 2, 3\}$ *et* $F = \{a, b, c\}$ *et la relation* $\mathcal{R}$ *définie par* $\{(1, a), (2, b), (3, c)\}$.

On peut représenter la relation $\mathcal{R}$ *par le graphe suivant dit représentation* sagittale *:*



Exemple 2.3 *Soit l'ensemble* $E = \{a, b, c\}$ *et la relation* $\mathcal{R}$ *définie par* $\{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c$

Comme l'ensemble de départ et d'arrivée sont identiques on se contente de représenter *la relation par un graphe* orienté *:*



Définition 2.3 *1- Soit $\mathcal{R}$ une relation de E sur F et $\mathcal{S}$ une relation de E dans G, on définit la relation de composition $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ de E sur G par :*

$$G_{\mathcal{S}\circ\mathcal{R}} = \left\{(x,y) \in E \times G : \exists z \in F \ \ (x,z) \in G_{\mathcal{R}} \ \ et \ \ (z,y) \in G_{\mathcal{S}}\right\}.$$

2- Soit $\mathcal{R}$ une relation de E sur F, on peut définir une relation $\mathcal{R}^{-1}$ de F sur E dite relation inverse ou réciproque par :

$$G_{\mathcal{R}^{-1}} = \left\{(x,y) \in F \times E : (y,x) \in G_{\mathcal{R}}\right\}.$$

3- Soit $\mathcal{R}$ une relation de E sur F, on peut définir une relation $\mathcal{R}$ de F sur E dite relation complémentaire par :

$$G_{\overline{\mathcal{R}}} = \left\{(x,y) \in F \times E : (x,y) \notin G_{\mathcal{R}}\right\}.$$

4- La diagonale Δ_E d'un ensemble E et la diagonale $\left|\overline{\mathcal{R}}\right|$ d'une relation interne $\mathcal{R} \subset E \times E$ sont définis par :

$$\Delta_E = \left\{(x,x) : x \in E\right\}, \qquad \left|\overline{\mathcal{R}}\right| = \left\{x \in E, (x,x) \in G_{\mathcal{R}}\right\}.$$

Définition 2.4 *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.*
- $\mathcal{R}$ est réflexive si $\Delta_E \subset G_{\mathcal{R}}$.
- $\mathcal{R}$ est irréflexive si $\Delta_E \cap G_{\mathcal{R}} = \varnothing$.
- $\mathcal{R}$ est symétrique si $G_{\mathcal{R}} = \mathcal{G}_{\mathcal{R}^{-\infty}}$.
- $\mathcal{R}$ est anti-symétrique si $\mathcal{G}_{\mathcal{R}} \cap \mathcal{G}_{\mathcal{R}^{-\infty}} = \Delta_E$.
- $\mathcal{R}$ est transitive si $G_{\mathcal{R} \circ \mathcal{R}} \subset \mathcal{G}_{\mathcal{R}}$.

La définition précédente peut se traduire sous la forme suivante plus pratique lors des démonstrations.

Définition 2.5 *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.*
- On dit que $\mathcal{R}$ est réflexive quand : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
- On dit que $\mathcal{R}$ est irréflexive ou antiréflexive si aucun élément de E n'est en relation avec lui-même.
- On dit que $\mathcal{R}$ est symétrique quand : $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
- On dit que $\mathcal{R}$ est anti-symétrique quand : $\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.
- On dit que $\mathcal{R}$ est transitive quand : $\forall (x, y, z) \in E^3, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Exemple 2.4 *- La relation d'ordre usuel sur $\mathbb{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive.*
- La relation d'ordre strict sur $\mathbb{R}$ est antiréflexive, antisymétrique et transitive.

2.1.4 Les applications

Définition 2.6 *Un triplet $f = (E, F, G)$ avec une relation binaire $G \subset E \times F$ est une application s'il vérifie*

$$\forall x \in E, \exists! y \in F : (x, y) \in G.$$

Si $E = F = \emptyset$ alors la fonction $f = (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ est appelée la fonction vide.

Définition 2.7 *Soient E et F deux ensembles. On dit qu'une fonction f de E dans F est :*

- *injective si*

$$\forall x, y \in E, (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$$

- *surjective si*

$$\forall y \in F, \exists x \in E \ \ (f(x) = y)$$

- *Une bijection est une application qui est injective et surjective.*

Les définitions de relation et d'application que nous venons de voir font appel au produit cartésien et par conséquent à la notion d'ensemble. On dit dans ce cas que les définitions sont ensemblistes.

Les ensembles sont d'une importance fondamentale en mathématiques. La mécanique interne des mathématiques (nombres, relations, fonctions, etc.) peut se définir en termes d'ensembles.

2.2 Paradoxe liés à la théorie naive des ensembles

Un paradoxe, d'après l'étymologie (du grec paradoxos : « contraire à l'opinion commune », de para : « contre », et doxa : « opinion »), est une idée ou une proposition à première vue surprenante ou choquante, c'est-à-dire allant contre le sens commun.

En mathématique un paradoxe (ou antinomie) est un énoncé ou un raisonnement qui contient ou semble contenir une contradiction logique.

Plusieurs paradoxes apparaissent dans la théorie naive des ensembles où justement les notions d'ensemble et d'apprtenance ne sont pas définies clairement.

Russell décrivit le paradoxe portant son nom dans une lettre adressée en 1902 à Gottlob Frege, où il montrait à ce dernier que l'une des règles introduite dans ses Grundgesetze der Arithmetik, la compréhension non restreinte, rendait la théorie de Frege contradictoire.

Frege affirmait que n'importe quel énnoncé dépendant d'une ou plusieurs variables permet de définir un ensemble. C'est ce qui est appelé le schéma de compréhension non