الفصل ألأول : مدخل الى مقياس تحليل المعطيات

تلعب عملية تحليل المعطيات دورا كبيرا في مختلف البحوث العلمية. سوف نقوم في هذا الفصل بالتطرق الى مجموعة من المفاهيم الاساسية والممهدة للتعريف بالمقياس مع تسليط الضوء على اهم الطرق الاكثر استعمالا من طرق المتعددة الابعاد. ثم الانتقال الى التذكير ببعض اساسيات الجبر الخطي والمساعدة على فهم مختلف الطرق رياضيا.

I-1 ماهية تحليل المعطيات

سوف نتطرق فيما يلي الى مفهوم تحليل المعطيات وكذا مختلف تقنيات التحليل بالاعتماد على نوع المتغيرات وكذا العلاقة التي تربط بينها.

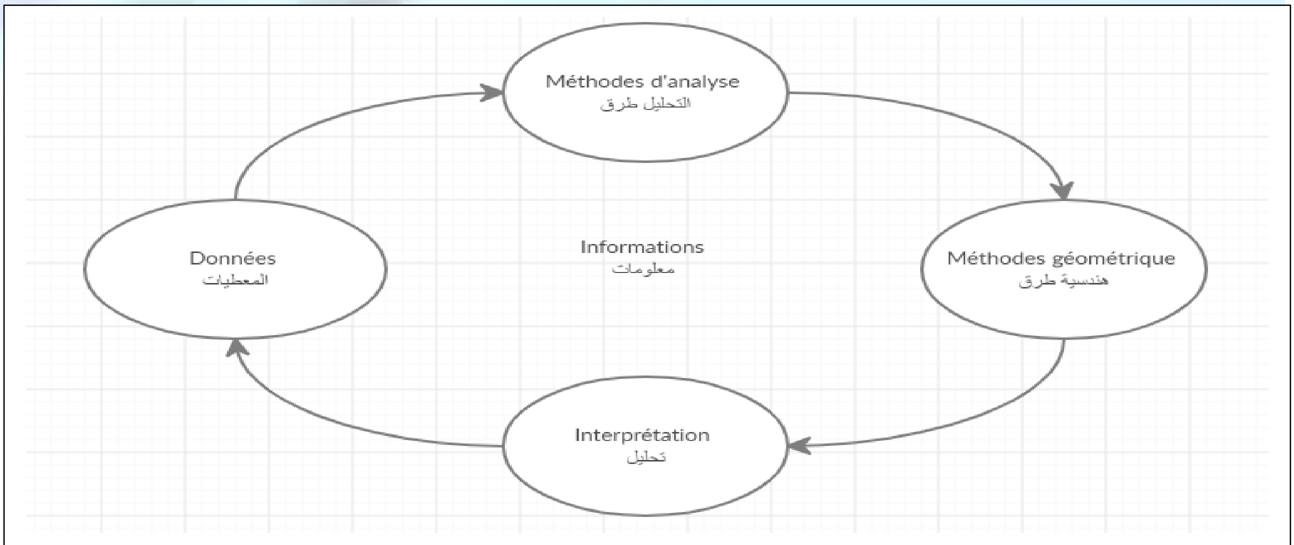
I -1-1 مفهوم تحليل المعطيات

تحليل المعطيات هو مجموعة من الاساليب اوالطرق الاحصائية ذات الابعاد المتعددة (تهتم بثلاث متغيرات فأكثر) والتي تهدف الى استخراج المعلومات من خلال مجموعة او كم هائل من المعطيات والتي تكون في شكلها الخام حيث تقوم بتوفير النتائج عن طريق تقليل عدد الابعاد. هذه الطرق تتطلب المعالجة بالأداة الاحصائية أي الاعلام الالي لذلك فهي تعتبر من طرق الخوارزميات (méthode algorithmique). كما تعتبر في الكثير من الحالات مراحل ابتدائية تسبق اتخاذ القرار من طرف الباحث خلال دراسة ما وداخل مؤسسة معينة وفقا لأهداف الدراسة.

كما يمكن القول انها مجموعة من الطرق الاحصائية الوصفية ذات الطابع الاستكشافي/التفسيري تسمح بمعالجة كم هائل من قواعد البيانات في آن واحد (مجموعة من المتغيرات حيث تقوم بتحويلها الى جداول خاصة، ومجموعة من المخططات (graphiques)) وذلك باستعمال نماذج هندسية (modèles géométrique) –في مساحة ذات ابعاد متعددة- وامكانيات اسقاطها في مساحات فرعية ذات ابعاد مخفضة .وبذلك تسمح بإعطاء نظرة شمولية من 360 درجة لمجموع المعلومة.

على العموم فان تحليل المعطيات يتناول التحليل متعدد الابعاد (او بالأحرى الطرق المتعددة منه) للحالات التي يجب فيها دراسة مجموعة من المتغيرات في ان واحد .وفقا للمخطط التالي:

ألمخطط I-1: سيرورة تحليل المعطيات احصائيا



2-1- I مجالات التطبيق

هناك العديد من مجالات التطبيق والتي يمكن ان نقوم بتطبيق مجموع هذه الطرق عليها حيث يمكن ان نذكر منها:

- ❖ الاقتصاد: وهو من اكثر المجالات انتفاعا لهذه الطرق حيث يتميز بكثرة البيانات وتنوعها والخاصة بمجموع الظواهر المتعددة ك (النمو الاقتصادي ، البطالة ، التضخم ، الصادرات، الواردات وغيرها ......).
- ❖ اقتصاد الصحة: هو ايضا باعتباره جزء من الاقتصاد يمكن اسقاط العديد من طرق التحليل عليه حيث نجد ايضا كما هائلا من المعطيات سواء الخاصة بنفقات الصحة او المتغيرات الاخرى مثل: الاستهلاك الصحي، الاوبئة ، التغطية الصحية وغيرها.
- ❖ المناخ: حيث يمكن الاعتماد على درجات الحرارة او التموضع بالنسبة لخطوط الطول ودوائر العرض من تحليل حالة الطقس في مجموعة من الدول، كما يمكن ايضا تصنيفها.
- ❖ الاحياء: خصوصا هذا المجال يتطلب دائما الى طرق التصنيف كالحيوانات وغيرها.

3-1-I تقنيات التحليل وفقا لنوع المتغيرات وكذا عددها:

يلعب المتغير دورا كبيرا في تحديد اسلوب التحليل الاحصائي المناسب لمجموعة من المتغيرات المراد دراستها او الدراسة المراد انجازها. فبالنظر لعدد المتغيرات يمكن التمييز بين ثلاث عائلات من طرق التحليل (من حيث الابعاد) : ففي حالة متغيرة واحدة نجد طرق التحليل احادية البعد (Univarie) والتي تشمل الاحصاء الوصفي (مقاييس التموضع ومقاييس التشتت), و في حالة متغيرتين نجد طرق التحليل ثنائية الابعاد(Bévarie) والتي تشمل (معامل الارتباط الخطي البسيط لبيرسون، معامل الارتباط لسبيرمان، اختبار كاي تربيع ، جدول تحليل التباين وجدول تحليل التباين لعامل واحد).

اما اذا تعلق الامر بأكثر من متغيرتين فإننا نجد انفسنا امام طرق التحليل المتعددة الابعاد (Multivarie) والتي تمثل غرض الدراسة .غير انه وفي نفس هذه العائلة من الطرق يمكن ان نميز بين نوعين آخرين من طرق التحليل المتعددة الابعاد فنجد الطرق الوصفية (Méthodes descriptives) (الاستكشاف) و الطرق التفسيرية (Méthodes explicatives) (الانحدار).

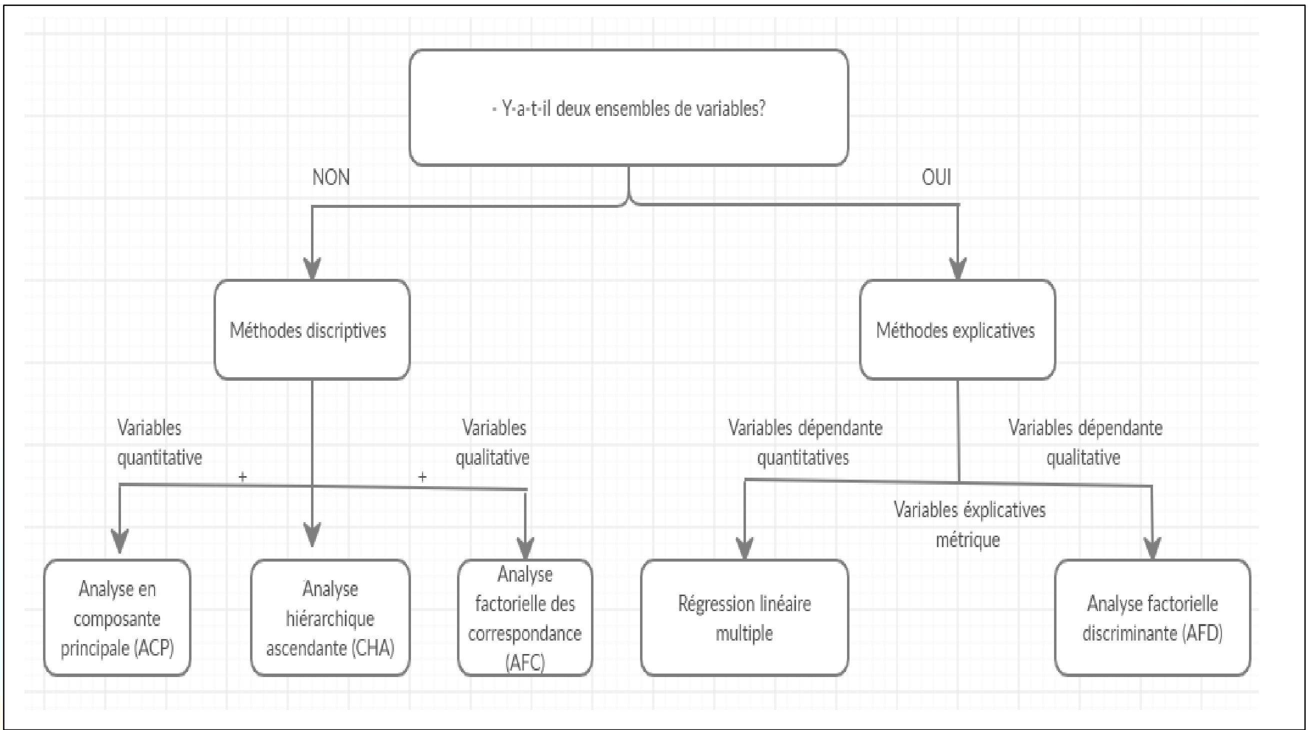
حيث يمكن التمييز بينهما من خلال نوع العلاقة التي تربط بين مختلف متغيرات الدراسة. فبالنسبة للطرق التفسيرية فتختص بالمتغيرات التي تربط بينهما علاقة تبعية (une relation de dépendance) أي هناك متغيرات تابعة والاخرى مستقلة، اما بالنسبة للطرق الوصفية فتتعلق بحالة كون ان العلاقة بين المتغيرات تتميز بالتشابك اوالارتباط المتبادل (Une relation d'interdépendance).

وهنا وبالنظر الى نوع المتغير يمكن ان نميز في نفس الوقت بالنسبة لطرق الاستكشاف ثلاث انواع من امهات الطرق: - طريقة التحليل العاملي للمركبات الاساسية (ACP) والتي تعتمد على الطبيعة الكمية لمتغيرات الدراسة – طريقة التحليل العاملي للتوفيقات (AFC) والتي تعتمد الطبيعة الكيفية لمتغيرات الدراسة واخيرا طريقة التصنيف التسلسلي التصاعدي (CHA) والتي تطبق في الحالتين معا اي كون المتغيرات كمية او كيفية.

أما بالنسبة للنوع الثاني من طرق التحليل التفسيرية فيمكن ان نميز بين نوعين اخرين من الطرق وهذا باعتبار المتغير التابع. فاذا كان هذا الاخير من طبيعة كيفية (المتغيرات المستقلة كلها من طبيعة كمية كشرط) فإننا نجد

التحليل العاملي التمييزي (AFD) . أما اذا كان المتغير التابع من طبيعة كمية فإننا نميز بين الانحدار الخطي المتعدد للمتغيرات الكمية (régression linéaire multiple pour les variables quantitatives) والانحدار الخطي المتعدد للمتغيرات الكيفية (régression linéaire multiple pour les variables qualitatives.) كما تجدر الاشارة الى ان مجموع الطريقتين مبنية على نماذج خطية كما ان كلاهما تنبؤي. ويمكن تلخيصها في المخطط التالي :

ألمخطط I-2: طرق تحليل المعطيات وفقا لنوع وعلاقة المتغيرات



I- 2 تذكير ببعض المفاهيم الخاصة بالجبر الخطي

I -2-1 **العمليات على المصفوفات :** لتكن المصفوفتين B و A من نفس النمط (i x j) اي A_{ij} و B_{ij} حيث أن i هو عدد الأسطر و j هو عدد الأعمدة وعليه فان :

- **المجموع في المصفوفات:(Somme des matrices)** يمكن الجمع بين المصفوفتين A وB إذا كانتا من نفس النمط وهذا بجمع العناصر المكونة لهما عنصرا بعنصر''éléments par éléments'' وبالتناظر على النحو التالي:

$$A + B = a_{ij} + b_{ij}$$

حيث أن : $A_{ij} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B_{ij} \begin{pmatrix} e & f \\ j & h \end{pmatrix} =$

مثال : لتكن المصفوفتان A و B حيث ان : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- ماهي نتيجة جمع A و B ؟

الحل:

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+1) & (3+2) & (-5+5) \\ (6+2) & (-4+1) & (0+0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 8 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

ملاحظة: عملية الطرح تجري بنفس الكيفية أي بالمماثلة مع عملية الجمع

مثال : ماهي نتيجة طرح (A-B) ؟

الحل:

$$A-B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-1) & (3-2) & (-5-5) \\ (6-2) & (-4-1) & (0-0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -10 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

جمع او طرح مصفوفتين من نفس النمط هو مصفوفة من نفس النمط بمعنى :

$$A_{ij} + B_{ij} = C_{ij} \quad , \quad A_{ij} - B_{ij} = D_{ij}$$

- **الجداء في المصفوفات**

لتكن المصفوفتين Aو B من النمط (j*k) و(i*j) على الترتيب, وليكن العدد الحقيقي α حيث α € R فان:

❖ ضرب المصفوفة A او B بواسطة العدد الثابت α يعطي النتيجة التالية : $\alpha^* A = (a_{ij})\alpha$

اي توزيع الضرب على كل عناصر A بحيث يتم ضرب هذا العدد في جميع عناصر المصفوفة A

مثال: ليكن لدينا

$$\alpha = 6 \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

ماهي نتيجة ضرب A و α ؟

الحل:

$$\alpha^* A = 6 * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6*2) & (6*1) \\ (6*3) & (6*5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 18 & 30 \end{pmatrix}$$

– جداء المصفوفتين B و A هو المصفوفة C والتي تكون من النمط (i*k)

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2*3) (2*2)

- ماهي نتيجة ضرب A و B ؟

الحل:

$$\mathrm{A}_{2*2}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{C}_{2*3} = \mathrm{B}_{2*3} \ .$$

$$= \begin{pmatrix} ((1*4)+(2*-3)) & ((1*2)+(2*1)) & ((1*0)+(2*0)) \\ ((0*4)+(-3*3)) & ((0*2)+(3*1)) & ((0*0)+(3*0)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

أي أنه يتم توزيع عناصر الصف الأول ل A على عناصر أعمدة المصفوفة B (العمود الأول ثم الثاني ... الخ) وهذا من أجل الحصول على عناصر الصف الأول للمصفوفة C بعد ذلك ننتقل الى حساب قيم الصف الثاني بتوزيع عناصر الصف الثاني على عناصر أعمدة المصفوفة B وهكذا

❖ **بعض خصائص ضرب المصفوفات**

- مهما كانت رتب المصفوفتين فان $B*A \neq A*B$
- $A^n = A*A*\ldots\ldots\ldots*B$ (n مرة)
- $(A.B).\ C = A.\ (B.C)$ تعرف بالخاصية التجميعية لضرب المصفوفات
- $(A.B).C = (K.A).\ B = A.\ (K.B)$ وتعرف بالخاصية التجميعية لضرب المصفوفات في عدد
- $C\ (A+B) = CA + CB$ خاصية التوزيع من اليسار
- $(A+B)\ C = A\ C + B\ C$ خاصية التوزيع من اليمين.

- **بعض المصفوفات الخاصة**

❖ **المصفوفة المربعة:** هي المصفوفة التي يكون فيها عدد الصفوف (الأسطر) مساوي الى عدد الأعمدة

مثال: A_{4*4} , A_{3*3} , A_{2*2}

$$\mathrm{A}_{2*2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{A}_{4*4}\ ,\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{A}_{3*3}\ ,\ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

❖ **المصفوفة الصفرية:** هي مصفوفة تكون جميع عناصرها معدومة وتلعب دور العنصر الحيادي في عملية الجمع

مثال: $A_{2*3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

❖ **مصفوفة الوحدة:** وهي مصفوفة قطرية عناصر قطرها يساوي الواحد, أما باقي العناصر فهي أصفار ويرمز لها بالرمز I وتلعب دور الحيادي في عملية الضرب.

مثال: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

وهي دائما مصفوفة مربعة.

❖ **المصفوفة المتماثلة :** وهي مصفوفة مربعة حيث تكون عناصرها متناظرة حول القطر أي أن الجزء العلوي مساوي للجزء السفلي.

مثال: $A_{2*2} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

❖ **المصفوفة السطرية:** وهي المصفوفة التي يكون عدد أسطرها مساوي الى الواحد دائما أي أنها تأخذ الشكل الأفقي

مثال: $A_{1*2} = A^2 = (\ a\ \ b\ )$, $A^3 = (\ a\ b\ c\ )$

❖ **المصفوفة العمودية:** وهي المصفوفة التي يكون عدد أعمدتها مساوي الى الواحد أي أنها تأخذ الشكل العمودي

مثال : $A_{3*1} = A_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A_{2*1}$, $A_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$

I -2-2 التحويلات على المصفوفات

- **منقول المصفوفة** (**Transposé d’une matrice**)

هي عملية يتم بموجبها استبدال الأسطر بالأعمدة ويكون من المصفوفة Aفي حد ذاتها ويرمز لها بالرمز t_A أو Ȧ اي :

$$A = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow t_A = \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \end{array}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

مثال: لتكن المصفوفة A من الشكل $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ وعليه فان منقول هذه المصفوفة يكون على النحو التالي:

$$t_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- **محدد المصفوفة** (**Déterminant d’une matrice**)

وهنا يجب أن تكون المصفوفة مربعة من أجل حساب محددها. فحساب محدد مصفوفة من النوع (m*m) يقودنا الى حساب m محدد للمصفوفة ((m-1),(m-1)) مما يجعل هذه السيرورة طويلة جدا . لذلك لا تخضع هذه العملية الى قاعدة بسيطة. فمن أجل حساب محدد المصفوفة (4*4) يجب معرفة حساب محدد المصفوفة (2*2) والمصفوفة (3*3).

لتكن المصفوفة A من النوع (4X4) كما يلي:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c & d\\ e & f & g & h\\ i & j & k & l\\ m & n & o & p\end{pmatrix}$$

فانه من اجل حساب محدد هذه المصفوفة والغي يرمز بالرمز det (A)=|A| فإنه يكفي اتباع الخطوات التالية:

- وضع الاشارات لكل عنصر وهذا بالتناوب بداية بالإشارة الموجبة بدءا بأول عنصر (a) .
- اختيار احدى الاسطر او احدى الاعمدة التي من اجلها يتم تحديد العوامل المساعدة (Cofacteurs) .
- القيام بعملية النشر والتوزيع لهذه العوامل على المصفوفة .

وعليه:

يتم وضع الاشارات كأول خطوة على النحو التالي:

$$A=\begin{pmatrix} a^+ & b^- & c^- & d^+\\ e^- & f^+ & g^- & h^+\\ i^- & j^+ & k^- & l^+\\ m^- & n^+ & o^- & p^+\end{pmatrix}$$

سوف نقوم بتحديد السطر الاول مما يسمح بعملية التوزيع بداية من العنصر a على النحو التالي وهذا بداية بالعمود الاول:

$$A=\begin{pmatrix} a^+ & b^- & c^- & d^+\\ e^- & f^+ & g^- & h^+\\ i^- & j^+ & k^- & l^+\\ m^- & n^+ & o^- & p^+\end{pmatrix} \Rightarrow +a\times\begin{vmatrix} f & g & h\\ j & k & l\\ n & o & p\end{vmatrix}$$

ثم الانتقال للعمود الثاني و الثالث والرابع فنتحصل على:

$$+a\times\begin{vmatrix} f & g & h\\ j & k & l\\ n & o & p\end{vmatrix}-b\times\begin{vmatrix} e & g & h\\ i & k & l\\ m & o & p\end{vmatrix}+c\times\begin{vmatrix} e & f & h\\ i & j & l\\ m & n & p\end{vmatrix}-d\times\begin{vmatrix} e & f & g\\ i & j & k\\ m & n & p\end{vmatrix}$$

كما في اول خطوة ثم بعدها نقوم بحساب بعد تحديد العوامل المساعدة نقوم بإعطاء كل عنصر اشارة بالتناوب المحددات للمصفوفات 3X3 ن وبنفس الطريقة السابقة نقوم بتحديد احدى الاسطر او احدى الاعمدة فنتحصل على

$$+a\times\begin{vmatrix} f^+ & g^- & h^+\\ j^- & k^+ & l^-\\ n^+ & o^- & p^+\end{vmatrix}\Rightarrow +a\times\left(+f\begin{vmatrix} k & l\\ o & p\end{vmatrix}-g\begin{vmatrix} f & h\\ n & p\end{vmatrix}+h\begin{vmatrix} j & k\\ n & o\end{vmatrix}\right)-b\times\ldots-d\times$$

ثم نقوم بالتوزيع والتبسيط على النحو التالي:

$$+a \times \big(+f\,(k \times p - l \times o) - g(f \times p - h \times n) + h\,(j \times o - k \times n)\big) - b \times \ldots$$

حيث ان محدد المصفوفة (2×2) يعطي بالعبارة التالية:

$$\text{Det (A)} = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (a \times d) - (c \times b)$$

مثال:

لتكن المصفوفات التالية والمطلوب هو حساب محدد كل مصفوفة:

- $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - 2 \times 3 = -1$
- $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2^+ & 1^- & 3^+ \\ 1^- & 0^+ & 2^- \\ 2^+ & 0^- & 2^+ \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$

$$= -1(-2-4) + 0 - 0 = 6$$

هنا قمنا باختيار العمود الذي يحوي عدد كبير من الاصفار وهذا لتسهيل الحسابات فقط.

- $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} -1^+ & -1^- & -1^+ & 1^- \\ 1^+ & 1^- & -1^+ & -1^- \\ -1^+ & 1^- & -1^+ & 1^+ \\ 1^- & -1^+ & -1^- & -1^+ \end{vmatrix}$$

$$= -1\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=$$

$$-1\left(1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\right) + 1\left(1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) - 1\left(1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) - 1\left(1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -1(1\times 2+1\times 0-1\times -2)+1(1\times 2+1\times 0-1\times 2)-1(1\times 0-1\times 0-1\times 0)-1(1\times -2-1\times 2-1\times 0) = -1(5)=1(1)-1(-1)-1(1)=-4$$

- **بعض خصائص المحددات**

- محدد منقول المصفوفة مساوي لمحدد المصفوفة ذاتها اي $|A|=|t_A|$.
- $|A|=0$ اذا كان :

- جميع عناصر احدى الاسطر او الاعمدة معدومة.
- تساوت عناصر صفين او عمودين على مستوى المصفوفة .
- استبدال صف بصف اخر او عمود مكان عمود اخر من نفس المصفوفة فان اشارة المحدد تتغير .
- اذا تناسب صفان او عمودان بمعنى ان قيم احدى الصفوف او الاعمدة هي مضاعفات قيم صف اخر او عمود اخر.

- $\det(A+B) \neq \det(A)+\det(B)$
- $\det(A\times B)=\det(A)\times\det(B)$
- $\det(A^n) = (\det(A))^n$

- **معكوس المصفوفة (la matrice inversible)**

لتكن A مصفوفة من النوع (j،i) ; نقول ان A يمكن قلبها اذا وفقط اذا كان $\det(A) \neq 0$. هذا يدل ايضا على كون ان هذه المصفوفة يجب ان تكون مربعة . حيث يعطي معكوس المصفوفة بالعلاقة التالية:

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{\det(A)}\right)\times T_{\text{cofacteurs (A)}}$$

مثال: لتكن المصفوفة التالية $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 6\end{pmatrix}$

المطلوب :

- تحقق من ان A قابلة للعكس ؟
- قم بحساب معكوس المصفوفة A؟

الحل:

$$|A| = \begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 6\end{vmatrix} = 2\times 6-1\times 5=7\neq 0$$ ……………… محققة

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}t_{\text{cof(A)}} \quad / \quad \text{cof}_{(A)} = \begin{pmatrix}6 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow t_{\text{cof(A)}} = \begin{pmatrix}6 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{-5}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

- **بعض خصائص معكوس المصفوفة**
- $A \times A^{-1} = I_n$ جداء المصفوفة والمصفوفة المعاكسة يعطي لنا مصفوفة الوحدة
- $A = (A^{-1})^{-1}$
- $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

- **القيم الذاتية والاشعة الذاتية (Les valeurs propres et les vecteurs propres)**

قبل التطرق الى القيم الذاتية وكذا للأشعة الذاتية فانه وجب التطرق الى مفهوم كثير الحدود « polynôme caractéristique ».

❖ **كثير الحدود :** يمكن حسابه الا في حالة كون المصفوفة A هي مصفوفة قطرية (يمكن تقطيرها= diagonalisable)، حيث يعطى بالعلاقة التالية :

$$P(A) = P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

حيث ان : λ القيم الذاتية .

I_n مصفوفة الوحدة وتكون من نفس نوع المصفوفة A .

مثال: لتكن A من الشكل (2×2) حيث: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

-اوجد كثير الحدود لهذه المصفوفة؟

الحل:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 3 \times 5 = \lambda^2 - 3\lambda - 13$$

حل المعادلة من الدرجة الثانية : $\Delta = 61 \Rightarrow x_1 = \frac{3-\sqrt{61}}{2}$ و $x_2 = \frac{3+\sqrt{61}}{2}$

$$P_A(\lambda) = a(x - x_1)(x - x_2) = (x - x_1)(x - x_2)$$

❖ **القيم الذاتية (Valeurs propres)**

لايجاد القيم الذاتية لمصفوفة A من النمط (n×n) فانه يكفي حل المعادلة من الشكل : $\det(A - \lambda I_n) = 0$

بحيث يكون لهذه المعادلة حل غير معدوم. وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة المميزة للمصفوفة A او كثير الحدود المميز ل A .

مثال : اوجد القيم الذاتية المصفوفة : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

الحل:

$$\lambda I_n - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I_n - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

وعليه تكون حلول هذه المعادلة: $\lambda = 1$ ، $2\lambda=$ وهي القيم الذاتية للمصفوفة A .

❖ الاشعة الذاتية (Vecteurs propres)

الاشعة الذاتية للمصفوفة A والتي توافق (تقابل) القيمة الذاتية λ هي الاشعة التي تحقق المعادلة $A\ X = \lambda\ X$ بطريقة مكافئة. لإيجاد الاشعة الذاتية يكفي حل المعادلة $(\lambda I_n - A)\ X = 0$ وهو عبارة عن الفضاء الذاتي للمصفوفة A والموافقة لكل قيمة ذاتية λ .

مثال : اوجد فضاء الحلول للفضاء الذاتي للمصفوفة A : $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

الحل:

حلول هذه المعادلة: $\lambda = 1$ ، $2\lambda=$ وعليه الاشعة الذاتية لهذه المصفوفة تكون من الشكل : $X= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

وعليه يحصل على الاشعة الذاتية للمصفوفة A والمقابلة للقيمة الذاتية λ اذا كان X حلا للمعادلة :

$(\lambda I_n - A)\ X = 0$ بحيث:

من اجل $\lambda = 1$

$$\begin{cases} -2\,x_1 - 2\,x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$X= \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

من اجل $\lambda = 2$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}x_2 \Rightarrow x_2 = -2x_1$$

ومنه:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

وعليه تكون مصفوفة الاشعة الذاتية للمصفوفة A والمقابلة للقيم الذاتية هي : $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

- **التحويل الى شكل قطري (Diagonalisation)**

تكون المصفوفة A ذات النمط $(n \times n)$ مصفوفة قطرية اذا وفقط اذا كانت A اشعة ذاتية مستقلة خطيا عددها n ، وفي هذه الحالة فان العناصر القطرية D هي القيم الذاتية المقابلة للأشعة الذاتية A . وعليه فان المصفوفة المقطرة تعطي بالعلاقة التالية : $A = P\,D\,P^{-1}$

حيث ان : P هي المصفوفة التي اعمدتها الاشعة الذاتية المستقلة للمصفوفة A .
D هي المصفوفة القطرية التي عناصر قطرها القيم الذاتية.
P-1 هو معكوس المصفوفة P .

ايضا ، فان عملية تقطير المصفوفة يتم بمجموع الاجراءات التالية ، بدءا بحساب كثير الحدود للمصفوفة A ثم استخراج كل من القيم الذاتية وكذا الاشعة الذاتية.

مثال: اوجد المصفوفة المقطرة للمصفوفة A $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

الحل: توصلنا سابقا الى ان القيم الذاتية للمصفوفة A هي : $\lambda = 1$ ، λ2=

وكذا الاشعة الذاتية المقابلة ل λ هي على الترتيب : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

وعليه:

$$A = P\,D\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

حيث:

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\ t_{cof(P)} = 1 \times t_{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

قائمة المراجع :

-**ESCOFIER B., & PAGES. J,** 2008, « Analyses factorielles simples et multiples; objectifs, méthodes et interprétation », 4e édition, Dunod, Paris, 318 p.

- **AMBAPOUR S.,** 2003, « Introduction à l'analyse des données » , BAMSI REPRINT, B.P. 13734 Brazzaville, 80 P .

- **SERRE D,** 2001, « Les matrices ; théorie et pratique » , DUNOD , France, 167 p.