Introduction à la Géométrie Différentielle

Mohamed Amine BAHAYOU
$4^{\text{ième}}$ *année D.E.S Mathématiques*

Table des matières

Chapitre 1

Éléments de calcul différentiel

Enseigner c'est apprendre deux fois !

Introduction

Ce premier chapitre est un bref rappel de calcul différentiel sur les espaces de Banach, l'accent sera mis sur les principaux théorèmes : accroissements finis, inversion locale, fonctions implicites...

Différentiabilité

Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert de E et $f : U \to \mathsf{F}$ une application. On dit que f est *différentiable* en $x_0 \in U$ s'il existe $g \in \mathsf{L}(\mathsf{E},\mathsf{F})$, i.e linéaire et continue, telle que :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - g(x - x_0)\|_{\mathsf{F}}}{\|x - x_0\|_{\mathsf{E}}} = 0$$

ou bien, en utilisant les notations de Landau, on écrit

$$f(x) - f(x_0) - g(x - x_0) = \mathrm{o}(\|x - x_0\|) = \|x - x_0\|\varepsilon(x - x_0) \text{ avec } \lim_{\|h\| \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

- g est dite la différentielle de f au point x_0 et est notée $D_{x_0}f$.
- On dit que f est différentiable sur U si elle l'est en tout point x de U, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ si l'application différentielle $\begin{array}{rccc} Df : & U & \to & \mathsf{L}(\mathsf{E},\mathsf{F}) \\ & x & \longmapsto & D_x f \end{array}$ est en plus continue.

Remarques.

- *La différentielle en un point, lorsqu'elle existe, est unique.*

- *La différentiabilité et la différentielle ne dépendent que des topologies choisies sur E et F et non des normes représentant celles-ci.*

Montrons l'unicité, si f est différentiable en x_0 et g_1, $g_2 \in L(E,F)$ deux différentielles de f alors $f(x_0+h)-f(x_0) = g_1(h)+\mathrm{o}(\|h\|) = g_2(h)+\mathrm{o}(\|h\|)$ donc si $g = g_1 - g_2$ alors $g(h) = \|h\|\varepsilon(h)$ où $\lim\limits_{\|h\|\to 0} \varepsilon(h) = 0$ par linéarité $\forall\lambda > 0$ $g(\lambda h) = \|\lambda h\|\varepsilon(\lambda h)$ i.e $g(h) = \|h\|\varepsilon(\lambda h)$ en faisant tendre λ vers 0 alors $g \equiv 0$ d'où l'unicité de la différentielle.

Exemples.

1. *Si $f \in L(E,F)$ alors f est différentiable et $\forall x \in E$, $D_x f = f$*
2. *Si $f : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ est n-linéaire continue alors f est différentiable et*
   $\forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ $D_{(x_1,\ldots,x_n)} f(h_1,\ldots,h_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_1,\ldots,x_{i-1},h_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$
3. *$GL(E,F) = \{u \in L(E,F)\ /\ u$ est un homéomorphisme$\}$ dit **groupe linéaire**, est un ouvert de $L(E,F)$ en effet, observons que si $u \in L(E)$, $\|u\| < 1$ alors $\mathrm{Id}_E - u \in GL(E)$ et $(\mathrm{Id}_E - u)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$, supposons maintenant que $GL(E,F) \neq \varnothing$ et $u \in GL(E,F)$ montrons que pour v "proche" de u, $v \in GL(E,F)$. Si $\|v-u\| < \frac{1}{\|u^{-1}\|}$ alors $\|\mathrm{Id}_E - u^{-1}v\| \leq \|u^{-1}\| \cdot \|v-u\| < 1$ donc $u^{-1}v \in GL(E)$ et $v \in GL(E,F)$. Si $\phi : GL(E,F) \to GL(F,E)$ $u \mapsto u^{-1}$ alors $D_u\phi(h) = -u^{-1}hu^{-1}$ en effet, si $\|h\| < \frac{1}{\|u^{-1}\|}$*

   $$\begin{aligned} \textit{alors} \qquad (u+h)^{-1} - u^{-1} &= u^{-1}\left(\mathrm{Id} + hu^{-1}\right)^{-1} - u^{-1} \\ &= u^{-1}\left(\mathrm{Id} - hu^{-1} + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(-hu^{-1}\right)^n\right) - u^{-1} \\ &= -u^{-1}hu^{-1} + u^{-1}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(-hu^{-1}\right)^n \\ &= D_u\phi(h) + \mathrm{o}(\|h\|) \end{aligned}$$

   La différentiabilité est stable par composition, c'est l'objet du théorème suivant

Théorème 1.0.1.
Soient E,F et G trois espaces normés, U ouvert de E, V ouvert de F, $g : U \to F$ tel que $g(U) \subset V$ et $f : V \to G$. Si g est différentiable en $x_0 \in U$ et f différentiable en $g(x_0)$ alors $f \circ g$ est différentiable en x_0 et

$$\boldsymbol{D_{x_0}(f \circ g) = D_{g(x_0)}f \circ D_{x_0}g}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0) &= f(g(x_0) + \underbrace{g(x_0 + h) - g(x_0)}_{\text{tend vers 0, lorsque } \|h\| \to 0}) - f(g(x_0)) \\
&= D_{g(x_0)}f(g(x_0 + h) - g(x_0)) + \mathrm{o}(\|g(x_0 + h) - g(x_0)\|) \\
&= D_{g(x_0)}f(D_{x_0}g(h) + o(\|h\|)) + \mathrm{o}(\mathrm{O}(\|h\|)) \\
&= D_{g(x_0)}f(D_{x_0}g(h)) + D_{g(x_0)}f(\|h\|\varepsilon(h)) + \mathrm{o}(\|h\|) \\
&= (D_{g(x_0)}f \circ D_{x_0}g)(h) + \underbrace{\|h\|D_{g(x_0)}f(\varepsilon(h)) + \mathrm{o}(\|h\|)}_{=\mathrm{o}(\|h\|)}
\end{aligned}$$

i.e $f \circ g$ est différentiable en x_0, par unicité de la différentielle $D_{x_0}(f \circ g) = D_{g(x_0)}f \circ D_{x_0}g$ □

Exercice 1.1. *Traduire cette égalité en dimension finie à l'aide des matrices jacobiennes.*

1.1 les Théorèmes Fondamentaux

1.1.1 Théorème des accroissements finis

Définition 1.1.
La dérivée de $f : [a,b] \to F$ à droite de $x \in [a,b[$, lorsqu'elle existe est

$$f'_d(x) = \lim_{h \overset{h \geq 0}{\to} 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La dérivée de f à gauche de $x \in]a,b]$ se définit de façon similaire.

Théorème 1.1.1 (Accroissements finis).
Soient $f : [a,b] \to F$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues. Supposons que $\forall x \in [a,b] - D$ (D ensemble au plus dénombrable) $f'_d(x)$ et $g'_d(x)$ existent et que $\|f'_d(x)\| \leq g'_d(x)$ alors

$$\boldsymbol{\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)}$$

Démonstration. Voir J. Dieudonnée [5]. vol I, page 160 : Fondement de l'Analyse moderne. □

Corollaire 1.

1. *Si* $\phi : U \to F$ *est une application différentiable et si* $[a,b] \subset U$ *alors :* $\|\phi(b) - \phi(a)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|D_{(1-t)a+tb}\phi\| \cdot \|b - a\|$. *Il suffit d'appliquer le théorème à* $f(t) = \phi(tb + (1-t)a)$ *et* $g(t) = \sup_{x \in [a,b]} \|D_x\phi\| \cdot \|b - a\|t$.
2. *Toute application de classe* $\mathscr{C}^1$ *est localement Lipschitzienne.*

1.1.2 Inversion locale et fonctions implicites

Définition 1.2.
Une application $f : U \to V$ *où* U *(resp.* V*) est un ouvert d'un espace normé* E *(resp.* F*), est un* $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme *si* f *est bijective et de classe* $\mathscr{C}^1$ *et sa réciproque* f^{-1} *est de classe* $\mathscr{C}^1$.

Exercice 1.2. *Que pensez vous de* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \longmapsto x^3$ *?*

Théorème 1.1.2 (Inversion locale).
Soit $f : U \to F$ *une application* $\mathscr{C}^1$*, avec* U *ouvert de* E*,* E *et* F *de Banach. Si* $D_{x_0}f \in GL(E,F)$ *pour un certain* $x_0 \in U$ *(*f *est dite* étale *en* x_0*), alors il existe* U_{x_0} *voisinage de* x_0 *et un voisinage* $V_{f(x_0)}$ *de* $f(x_0)$ *tels que* $f : U_{x_0} \to V_{f(x_0)}$ *soit un* $\mathscr{C}^1$ *difféomorphisme et :*

$$\boldsymbol{D_{f(x)}(f^{-1}) = (D_x f)^{-1} \quad \forall x \in U_{x_0}}$$

Démonstration. On se ramène au cas, plus simple, où $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$, $E = F$ et $D_{x_0}f = \mathrm{Id}_E$. Il suffit de prendre $g(x) = (D_{x_0}f)^{-1} \circ [f(x + x_0) - f(x_0)]$. On veut montrer que $g_y(x) = y + x - g(x)$ admet un unique point fixe qui sera solution unique de l'équation $y = g(x)$ et g sera inversible. Soit $h(x) = x - g(x)$ alors $D_0 h = 0$. Soit $r > 0$ tel que : $\|x\| \leq r \Longrightarrow \|D_x h\| \leq \frac{1}{2}$ (par continuité de l'application différentielle $x \longmapsto D_x h$) et $\|x\| \leq r \Longrightarrow \|h(x)\| \leq \frac{r}{2}$ (par le théorème des accroissements finis). Posons $g_y(x) = y + h(x)$ si $y \in \bar{B}\left(0,\frac{r}{2}\right)$ et $x \in \bar{B}(0,r)$ alors

$$\|g_y(x)\| \leq \|y\| + \|h(x)\| \leq r \tag{i}$$

d'autre part

$$\|g_y(x_1) - g_y(x_2)\| = \|h(x_1) - h(x_2)\| \leq \frac{\|x_1 - x_2\|}{2} \tag{ii}$$

ce qui implique que $g_y : \bar{B}(0,r) \to \bar{B}(0,r)$ est une contraction, elle admet donc un unique point fixe : $\forall y \in \bar{B}(0,\frac{r}{2})$, $\exists! x \in \bar{B}(0,r) \quad g_y(x) = x$, solution de $g(x) = y$ i.e g est inversible, $g^{-1} : \bar{B}\left(0,\frac{r}{2}\right) \to U_0 \subset \bar{B}\,(0,r)$. (ii) donne

$$\|(x_1 - g(x_1)) - (x_2 - g(x_2))\| \leq \frac{\|x_1 - x_2\|}{2}$$
$$\text{donc } \|x_1 - x_2\| - \|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \frac{\|x_1 - x_2\|}{2}$$
$$\text{par suite } \|x_1 - x_2\| \leq 2\|g(x_1) - g(x_2)\|$$

$$\text{i.e} \qquad \|g^{-1}(y_1) - g^{-1}(y_2)\| \leq 2\|y_1 - y_2\| \tag{iii}$$

et g^{-1} est continue. $GL(E)$ est ouvert dans $L(E)$, donc si r est suffisamment petit $(D_x g)^{-1}$ existe $\forall x \in \bar{B}(0,r)$. Par continuité $\exists M > 0$, $\forall x \in \bar{B}\,(0,r)\,,\ \left\|(D_x g)^{-1}\right\| \leq M$. Si $y_1,y_2 \in \bar{B}(0,\frac{r}{2})$, $x_1 = g^{-1}(y_1)$ et $x_2 = g^{-1}(y_2)$ alors :

$$\begin{aligned}\|g^{-1}(y_1) - g^{-1}(y_2) - (D_{x_2}g)^{-1}(y_1 - y_2)\| &= \|x_1 - x_2 - (D_{x_2}g)^{-1}(g(x_1) - g(x_2))\| \\ &= \|(D_{x_2}g)^{-1}\left[D_{x_2}g(x_1 - x_2) - g(x_1) + g(x_2)\right]\| \\ &\leq M\|g(x_1) - g(x_2) - D_{x_2}g(x_1 - x_2)\|\end{aligned}$$

Comme $g(x_1) - g(x_2) - D_{x_2}g(x_1 - x_2) = \mathrm{o}(\|x_1 - x_2\|) = \mathrm{o}(\|y_1 - y_2\|)$ (d'après (iii)) alors $g^{-1}(y_1) - g^{-1}(y_2) - (D_{x_2}g)^{-1}(y_1 - y_2) = \mathrm{o}(\|y_1 - y_2\|)$ d'où la différentiabilité de g^{-1} et

$$D_{g(x)}(g^{-1}) = (D_x g)^{-1} \quad \forall x \in U_0 \tag{1}$$

Comme $g = (D_{x_0}f)^{-1} \circ T_{-f(x_0)} \circ f \circ T_{x_0}$ où T_{x_0} et $T_{-f(x_0)}$ sont les deux translations sur E (resp.F) $x \mapsto x + x_0$ (resp.$y \mapsto y - f(x_0)$) alors f est inversible sur $U_{x_0} = T_{x_0}(U_0)$. De plus comme $D_x g = (D_{x_0}f)^{-1} \circ \mathrm{Id}_F \circ D_{x+x_0}f \circ \mathrm{Id}_E = (D_{x_0}f)^{-1} \circ D_{x+x_0}f$ alors

$$(D_x g)^{-1} = (D_{x+x_0}f)^{-1} \circ D_{x_0}f \tag{2}$$

D'autre part $g^{-1} = T_{-x_0} \circ f^{-1} \circ T_{f(x_0)} \circ D_{x_0}f$ donc

$$D_{g(x)}(g)^{-1} = \mathrm{Id}_E \circ D_{T_{f(x_0)} \circ D_{x_0}f \circ g(x)}(f)^{-1} \circ \mathrm{Id}_F \circ D_{x_0}f = D_{f(x+x_0)}(f)^{-1} \circ D_{x_0}f \tag{3}$$

On déduit de (1), (2) et (3) que :

$$\forall x \in U_0 \quad D_{f(x+x_0)}(f)^{-1} = (D_{x+x_0}f)^{-1} \qquad \text{i.e} \qquad \forall y \in U_{x_0} \quad D_{f(y)}(f)^{-1} = (D_y f)^{-1}$$

$\square$

Corollaire 2. *Si $f : U \to F$ est une application $\mathscr{C}^1$, injective et étale sur U, alors f est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de U sur $f(U)$ qui est alors un ouvert de F.*

Théorème 1.1.3 (Fonctions implicites).
Soit $f \in \mathscr{C}^k(U \times V, G)$ $(k \geq 1)$ où U (resp. V) est un ouvert de E (resp. F), supposons que la dérivée partielle par rapport à la deuxième coordonnée est inversible en un point $(x_0,y_0) \in U \times V$ $D^2_{(x_0,y_0)}f \in GL(F,G)$ alors il existe U_0 voisinage de x_0 et W_0 voisinage de $f(x_0,y_0)$ et une unique application $g \in \mathscr{C}^k(U_0 \times W_0, V)$ tel que

$$\boldsymbol{f(x,g(x,w)) = w \quad \forall (x,w) \in U_0 \times W_0}$$

De plus $$\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{D^1_{(x,w)}g} & = & \boldsymbol{-(D^2_{(x,g(x,w))}f)^{-1} \circ D^1_{(x,g(x,w))}f} \\ \boldsymbol{D^2_{(x,w)}g} & = & \boldsymbol{(D^2_{(x,g(x,w))}f)^{-1}} \end{array} \right.$$

Démonstration.

Si $\begin{array}{rccc} \phi : & U \times V & \to & E \times G \\ & (x,y) & \mapsto & (x,f(x,y)) \end{array}$ alors $D_{(x_0,y_0)}\phi = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_E & 0 \\ D^1_{(x_0,y_0)}f & D^2_{(x_0,y_0)}f \end{pmatrix}$ est inversible

$(D_{(x_0,y_0)}\phi)^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_E & 0 \\ -(D^2_{(x_0,y_0)}f)^{-1}D^1_{(x_0,y_0)}f & (D^2_{(x_0,y_0)}f)^{-1} \end{pmatrix}$ $D_{(x_0,y_0)}\phi \in GL(E\times F, E\times G)$
d'après le théorème d'inversion local, ϕ est un $\mathscr{C}^k$ difféomorphisme et

$\begin{array}{rccc} \phi^{-1} : & U_0 \times V_0 & \to & U \times V \\ & (x,w) & \mapsto & (x,g(x,w)) \end{array}$ où $g = \pi_F \circ \phi^{-1}$ est l'application cherchée.

car $(x,w) = \phi((x,g(x,w))) = (x,f(x,g(x,w)))$ donc $f(x,g(x,w)) = w$. On obtient la différentielle de g grâce au théorème d'inversion locale : $D_{(x,w)}\phi^{-1} = (D_{(x,g(x,w))}\phi)^{-1}$, ou directement en différenciant les deux membres de $f(x,g(x,w)) = w$, la différentielle de la composée $\begin{array}{ccccc} E \times G & \xrightarrow{\varphi} & E \times F & \xrightarrow{f} & G \\ (x,w) & \mapsto & (x,g(x,w)) & \mapsto & f(x,g(x,w)) = w \end{array}$
est d'une part

$$D_{(x,w)}(f \circ \varphi)(h,k) = D_{(x,w)}\pi_G(h,k) = \pi_G(h,k) = k \quad (1)$$

d'autre part

$$\begin{array}{rcl} D_{(x,w)}(f \circ \varphi)(h,k) & = & D_{(x,g(x,w))}f \circ D_{(x,w)}\varphi(h,k) \\ & = & D_{(x,g(x,w))}f(h, D^1_{(x,w)}g(h) + D^2_{(x,w)}g(k)) \\ & = & D^1_{(x,g(x,w))}f(h) + D^2_{(x,g(x,w))}f(D^1_{(x,w)}g(h) + D^2_{(x,w)}g(k)) \\ & = & (\underbrace{D^1_{(x,g(x,w))}f + D^2_{(x,g(x,w))}f \circ D^1_{(x,w)}g}_{=0})(h) + (\underbrace{D^2_{(x,g(x,w))}f \circ D^2_{(x,w)}g}_{=\mathrm{Id}_G})(k) \ (2) \end{array}$$

en identifiant (1) et (2) on obtient la différentielle de g. $\square$

Exercice 1.3. *Montrer que le théorème des fonctions implicites est équivalent au théorème d'inversion locale (appliquer le théorème précédent à $\phi(x,y) = y - f(x)$ où f vérifie les hypothèses du théorème d'inversion locale.)*

1.1.3 Théorème du rang constant

Définition 1.3. *Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ (U ouvert de $\mathbb{R}^n$) est différentiable en $a \in U$, on appel* rang *de f en a l'entier* $\operatorname{rang}_a f = \operatorname{rang} D_a f = \dim \operatorname{Im}(D_a f)$.

Remarques.

1. $\operatorname{rang}_a f = r$ *si la matrice* $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ *possède un mineur d'ordre r de déterminant non nul et aucun mineur d'ordre supérieur à r de déterminant non nul.*
2. *On a toujours* $\forall a \in U,\ \operatorname{rang}_a f \leq \min(n,m)$.
3. *Par continuité du déterminant si* $\operatorname{rang}_a f = r$ *alors* $\operatorname{rang}_x f \geq r$ *pour x voisin de a (l'inégalité peut être strict pour $x \neq a$ comme le montre l'exemple $(x,y) \mapsto (x^2 - y^2,xy)$ au point $(0,0)$).*
4. *f est dite de rang constant si* $\operatorname{rang}_x f$ *est indépendant de $x \in U$. C'est le cas, par exemple, si* $\operatorname{rang}_a f = n$ *ou* $\operatorname{rang}_a f = m$ *en un point $a \in U$.*

Théorème 1.1.4 (théorème du rang constant).
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R}^m)$.

1. *Si* $\operatorname{rang}_a f = m$, *$f$ est dite* submersion *en a, il existe alors $\exists U_a \in \mathcal{V}_{(a)}$ ouvert, V ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : V \to U_a$ un $\mathscr{C}^1$difféomorphisme tel que*
$$\forall x \in V, \qquad f \circ \varphi(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_m)$$
2. *Si* $\operatorname{rang}_a f = n$, *$f$ est dite* immersion *en a, il existe alors $\exists U_a \in \mathcal{V}_{(a)}$ ouvert, $V_{f(a)} \in \mathcal{V}_{(f(a))}$ ouvert, V ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $\psi : V_{f(a)} \to V$ un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme tel que*
$$\forall x \in U_a, \qquad \psi \circ f(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_n,0,\ldots,0)$$
3. *Si f est de* rang constant *r, alors $\exists U_a \in \mathcal{V}_{(a)}$ ouvert, V ouvert de $\mathbb{R}^n$, $V_{f(a)} \in \mathcal{V}_{(f(a))}$ ouvert, W ouvert de $\mathbb{R}^m$, $\varphi : U_a \to V$ et $\psi : V_{f(a)} \to W$ deux $\mathscr{C}^1$difféomorphismes tel que*
$$\forall x \in V, \qquad \psi \circ f \circ \varphi(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_r,0,\ldots,0)$$

Remarques.

1. *à un difféomorphisme près de la source, une submersion est localement une projection donc localement ouverte.*
2. *à un difféomorphisme près du but, une immersion est localement une injection canonique donc localement injective.*

Démonstration. 1. Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que la matrice $\frac{D(f_1,\ldots,f_m)}{D(x_1,\ldots,x_m)}(a)$ est inversible. Soit la fonction ϕ définie sur U par $\phi(x,x') = (f(x,x'),x')$ où $x = (x_1,\ldots,x_m)$ et $x' = (x_{m+1},\ldots,x_n)$. La jacobienne de ϕ en a est
$$\begin{pmatrix} \dfrac{Df}{D(x_1,\ldots,x_m)}(a) & \dfrac{Df}{D(x_{m+1},\ldots,x_n)}(a) \\ 0 & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{n-m}} \end{pmatrix}$$
et est inversible, d'après le théorème d'inversion locale il existe un voisinage ouvert U_a de a tel que ϕ soit un difféomorphisme de U_a sur $V = \phi(U_a)$. Comme $f = \pi_{\mathbb{R}^m} \circ \phi$ il suffit de prendre $\varphi = \phi^{-1}$.

2. Si $f = (\mathsf{F},\mathsf{G}) = ((f_1,\ldots,f_n),(f_{n+1},\ldots,f_m))$ quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer $D_a\mathsf{F}$ inversible, d'après le théorème d'inversion locale il existe un voisinage ouvert U de a où F est un difféomorphisme, $\mathsf{W} = \mathsf{F}(U) \times \mathbb{R}^{m-n}$ est un voisinage ouvert de $f(a)$ contenant $f(U)$. Soit

ψ définie sur W par $\psi(y,y') = (F^{-1}(y),y' - G \circ F^{-1}(y))$ où $y = (y_1,\ldots,y_n)$ et $y' = (y_{n+1},\ldots,y_m)$. Sa jacobienne est

$$\begin{pmatrix} \dfrac{DF^{-1}}{D\,(y_1,\ldots,y_n)} & 0 \\ -\dfrac{D(G \circ F^{-1})}{D\,(y_1,\ldots,y_n)} & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{m-n}} \end{pmatrix}$$

elle est donc inversible sur W . En outre ψ est injective sur W. En effet si $\psi\,(y,y') = \psi\,(z,z')$ alors $y = z$ car $F : U \to F\,(U)$ est un difféomorphisme ; il en résulte que $y' = z'$ et ψ est alors injective et étale sur W c'est donc un difféomorphisme de W sur son image W'. Pour conclure il suffit de remarquer que pour tout x de U on a $\psi \circ f(x) = (x,0)$ par construction même de ψ.

3. $\forall x \in U$, rang $D_x f = r$ si on pose $u(x_1,\ldots,x_n) = (f_1(x),\ldots,f_r(x),x_{r+1},\ldots,x_n)$, quitte à permuter les coordonnées et restreindre U, on peut supposer $\frac{D(f_1,\ldots,f_r)}{D(x_1,\ldots,x_r)}(a)$ inversible $\forall a \in U$. La différentielle de u en a est donnée par :

$$D_a u = \begin{pmatrix} \dfrac{D(f_1,\ldots,f_r)}{D(x_1,\ldots,x_r)}(a) & \dfrac{D(f_1,\ldots,f_r)}{D(x_{r+1},\ldots,x_n)}(a) \\ 0 & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{n-r}} \end{pmatrix}$$

donc $\forall a \in U$, $D_a u$ est inversible, il s'en suit d'après le théorème d'inversion locale que $u : U_1 \to U_2$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme d'un voisinage U_1 de a ($U_1 \subset U$) sur un voisinage U_2 de $u(a)$ dans $\mathbb{R}^n$. Si $g = f \circ u^{-1}$ alors $g(z_1,\ldots,z_n) = (z_1,\ldots,z_r,g_{r+1}(z),\ldots,g_m(z))$

$$D_z g = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^r} & 0 \\ \dfrac{D(g_{r+1},\ldots,g_m)}{D(z_1,\ldots,z_r)}(z) & \dfrac{D(g_{r+1},\ldots,g_m)}{D(z_{r+1},\ldots,z_n)}(z) \end{pmatrix}$$

et $\forall z \in U_2$, rang $D_z g = \operatorname{rang} D_z(f \circ u^{-1}) = \operatorname{rang}(D_{u^{-1}(z)} f \circ D_z u^{-1}) =$ rang $D_{u^{-1}(z)} f = r$ il résulte que $\frac{D(g_{r+1},\ldots,g_m)}{D(z_{r+1},\ldots,z_n)}(z) = 0$ $\forall z \in U_2$ (sinon $D_z g$ serais de rang strictement supérieur à k. S'en convaincre est un excellent exercice d'algèbre linéaire). On peut donc écrire $\forall i \in \{r+1,\ldots,n\}$, $\quad g_i(z_1,\ldots,z_n) = g_i(z_1,\ldots,z_r) = g_i(\overline{z})$

Soit $\psi : U_3 \to \mathbb{R}^m$ définie par : $\psi(y_1,\ldots,y_m) = (y_1,\ldots,y_r,y_{r+1} - g_{r+1}(\overline{y}),\ldots,y_m - g_m(\overline{y}))$ où $U_3 = \pi_{\mathbb{R}^m}(U_2)$ si $m \leq n$ et $U_3 = \pi_{\mathbb{R}^n}^{-1}(U_2)$ si $m \geq n$ et $\overline{y} = (y_1,\ldots,y_r)$. $\forall y \in U_3$ on a

$$D_y \psi = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^r} & 0 \\ -\dfrac{D(g_{r+1},\ldots,g_m)}{D(y_1,\ldots,y_r)}(y) & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{m-r}} \end{pmatrix}$$

donc $\forall y \in U_3$, $D_y\psi$ est inversible, $\psi : V \to W \subset \mathbb{R}^m$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme et $\psi \circ f \circ u^{-1} : (x_1,\dots,x_n) \overset{g}{\mapsto} (x_1,\dots,x_r,g_{r+1}(x),\dots,g_m(x) \overset{\psi}{\mapsto} (x_1,\dots,x_r,0,\dots,0)$

$\square$

1.2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.4. $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ *est une* sous-variété *de dimension p et de classe $\mathscr{C}^k$ au voisinage de a s'il existe un voisinage ouvert U_a de a dans $\mathbb{R}^n$ et f un $\mathscr{C}^k$ difféomorphisme de U_a dans $f(U_a)$ (ouvert de $\mathbb{R}^n$) tel que : $f(U_a \cap \Sigma) = f(U_a) \cap (\mathbb{R}^p \times 0) = \{(y_1,\dots,y_n) \in f(U_a);\ y_{p+1} = \dots = y_n = 0\}$. Si Σ est une sous-variété au voisinage de chacun de ses points, on dira que Σ est une sous-variété.*

Exemples.

1. *Si Σ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ alors Σ est une sous-variété de classe $\mathscr{C}^\infty$, de dimension n (maximale). Il suffit de prendre $f = \mathrm{Id}\,|_\Sigma$*
   Réciproquement toute sous-variété de $\mathbb{R}^n$, de dimension maximale est ouverte.
2. *Les parties discrètes de $\mathbb{R}^n$ sont les seules sous-variétés de dimension* 0.
3. *L'image d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ par un difféomorphisme est encore une sous-variété de même dimension.*
4. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est de classe $\mathscr{C}^k$ $(k \geq 1)$ alors son graphe $\Gamma = \{(x,f(x))\,;\ x \in \mathbb{R}^n\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+m}$ de classe $\mathscr{C}^k$ de dimension n. Considérer $\phi\,(x,y) = (x,y - f(x))\,.$*

Le théorème du rang constant permet de donner plusieurs définitions équivalentes d'une sous-variété

Théorème 1.2.1.
Il y a équivalence entre :

1. *Σ est une sous-variété au voisinage de a, de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p.*
2. *$\exists U_a$ voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$, $\exists f \in \mathscr{C}^k(U_a,\mathbb{R}^{n-p})$ submersion en a telle que $U_a \cap \Sigma = f^{-1}(0)$.*
3. *$\exists U_a$ voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$, $\exists V_0$ voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^p$, $\exists g \in \mathscr{C}^k(V_0,\mathbb{R}^n)$ telle que*

$$\begin{cases} \text{i)} & g(0) = a. \\ \text{ii)} & g \textit{ est une immersion en } 0. \\ \text{iii)} & g : V_0 \xrightarrow{\sim} U_a \cap \Sigma \textit{ est un homéomorphisme.} \end{cases}$$

Démonstration. $\underline{1) \Longrightarrow 2)}$: Soient dans $\mathbb{R}^n$, U_a voisinage ouvert de a, V_0 voisinage ouvert de 0 et $\phi : U_a \xrightarrow{\sim} V_0$ un $\mathscr{C}^k$ difféomorphisme tels que $\phi(U_a \cap \Sigma) = V_0 \cap (\mathbb{R}^p \times 0_{\mathbb{R}^{n-p}})$. Si on pose $f = \pi_{\mathbb{R}^{n-p}} \circ \phi$ définie par $f(x) = (\phi_{p+1}(x),\dots,\phi_n(x))$ alors $D_a f = D_a(\pi_{\mathbb{R}^{n-p}} \circ \phi) = \pi_{\mathbb{R}^{n-p}} \circ D_a\phi$ la composée est donc surjective et f est une submersion en a. Par construction même de f, $f^{-1}(0) = U_a \cap \Sigma$.
$\underline{2) \Longrightarrow 1)}$: Soit U_a voisinage ouvert de a et $f \in \mathscr{C}^k(U_a,\mathbb{R}^{n-p})$ une submersion en a telle que $U_a \cap \Sigma = f^{-1}(0)$. Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que $\frac{Df}{D(x_{p+1},\dots,x_n)}(a)$ est inversible. Soit $\phi(x,y) = (x - a', f(x,y))$ où $x = (x_1,\dots,x_p)$, $y = (x_{p+1},\dots,x_n)$ et $a = (a', a_{p+1},\dots,a_n)$ alors $\phi(a) = 0$ et $D_a\phi = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p} & 0 \\ \frac{Df}{Dx}(a) & \frac{Df}{Dy}(a) \end{pmatrix}$ est inversible. Par inversion locale, quitte à diminuer U_a, $\phi : U_a \xrightarrow{\sim} V_0$ est un $\mathscr{C}^k$ difféomorphisme sur un voisinage V_0 de 0. Montrons que $\phi(U_a \cap \Sigma) = V_0 \cap (\mathbb{R}^p \times 0)$. Si $x \in U_a \cap \Sigma$ alors $\phi(x) \in V_0 \cap (\mathbb{R}^p \times 0)$ car $f(x) = 0_{\mathbb{R}^{n-p}}$, d'autre part si $y \in V_0 \cap (\mathbb{R}^p \times 0)$ alors $\exists! x \in U_a$, $\phi(x) = y$ i.e $f(x) = 0$ donc $x \in U_a \cap \Sigma$ d'où l'égalité.
$\underline{3) \Longrightarrow 1)}$: Soit U_a un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$, V_0 voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et $g \in \mathscr{C}^k(V_0,\mathbb{R}^n)$ telle que $g(0) = a$, g immersion en 0 et $g : V_0 \xrightarrow{\sim} U_a \cap \Sigma$ est un homéomorphisme. Par le théorème du rang constant, $\exists V$ voisinage ouvert de a, W voisinage ouvert de 0 contenant $g(V)$ et un difféomorphisme ψ de W sur $\psi(W)$ tels que $\forall x \in V$ $\psi \circ g(x_1,\dots,x_p) = (x_1,\dots,x_p,0,..,0)$ il suffit de prendre $\phi = \psi^{-1}$.
$\underline{1) \Longrightarrow 3)}$: Soit dans $\mathbb{R}^n$ U_a voisinage ouvert de a, V_0 voisinage ouvert de 0 et $\phi : U_a \xrightarrow{\sim} V_0$ un $\mathscr{C}^k$ difféomorphisme tels que $\phi(U_a \cap \Sigma) = V_0 \cap (\mathbb{R}^p \times 0)$. Si on pose $g = \phi^{-1} \circ i$ où $i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ $(x_1,\dots,x_p) \mapsto (x_1,\dots,x_p,0,..,0)$ est l'injection canonique, alors $g(0) = \phi^{-1}(0) = a$ et $D_0 g = D_0(\phi^{-1} \circ i) =$

$D_0\phi^{-1} \circ i = (D_a\phi)^{-1} \circ i$ donc g est une immersion en 0, $g \in \mathscr{C}^k(V_0,\mathbb{R}^n)$ et $g : V_0 \xrightarrow{\sim} g(V_0) = U_a \cap \Sigma$ est un homéomorphisme. $\square$

1.2.1 Espace tangent à une sous-variété de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.5. *Soit Σ une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Un vecteur v de $\mathbb{R}^n$ sera dit* tangent *à Σ en un point $a \in \Sigma$ s'il existe une application différentiable $\gamma : I_0 =]-\alpha,\alpha[\to \mathbb{R}^n$ telle que $\gamma(I_0) \subset \Sigma$, $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. L'ensemble de ces vecteurs est l'espace tangent à Σ en a et est noté $T_a\Sigma$.*

Théorème 1.2.2.
Si Σ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p, alors pour tout $a \in \Sigma$, $T_a\Sigma$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension p.

Démonstration. Soit $a \in \Sigma$, U_a un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$et $\phi : U_a \to \phi(U_a)$ un difféomorphisme tel que $\phi(U_a \cap \Sigma) = \phi(U_a) \cap (\mathbb{R}^p \times 0)$. Montrons que $T_a\Sigma = (D_a\phi)^{-1}(\mathbb{R}^p \times 0)$ ce qui suffit pour avoir le théorème. Soit $v \in T_a\Sigma$ et soit $\gamma : I_0 \to U_a$ différentiable telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$ Quitte à restreindre I_0 on peut supposer que $\gamma(I_0) \subset U_a \cap \Sigma$. On a donc $\phi(\gamma(t)) \in \mathbb{R}^p \times 0\ \forall t \in I_0$ d'où en différenciant $D_{\gamma(t)}\phi \cdot \gamma'(t) \in \mathbb{R}^p \times 0\ \forall t \in I_0$. En particulier pour $t = 0$ $D_a\phi{\cdot}v \in \mathbb{R}^p{\times}0$ et $v \in (D_a\phi)^{-1}(\mathbb{R}^p{\times}0)$ Ainsi $T_a\Sigma \subset (D_a\phi)^{-1}(\mathbb{R}^p \times 0)$ Montrons l'inclusion inverse. Soit $v \in (D_a\phi)^{-1}(\mathbb{R}^p \times 0)$ et posons $\psi(t) = \phi(a){+}tD_a\phi{\cdot}v$ ψ est alors différentiable et $\psi(t) \in \mathbb{R}^p{\times}0\ \forall t \in \mathbb{R}$. Comme $\psi(0) = \phi(a)$ alors pout t voisin de 0, soit $t \in I_0$ $\psi(t) \in \phi(U_a)$ et donc $\psi(t) \in \phi(U_a) \cap (\mathbb{R}^p \times 0)$. Posons $\gamma(t) = \phi^{-1} \circ \psi(t)$, $t \in I_0$ γ est différentiable, $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = (D_{\phi(a)}\phi^{-1}) \circ D_a\phi \cdot v = v$ i.e $v \in T_a\Sigma$ d'où l'inclusion inverse et l'égalité cherchée. $\square$

Le théorème suivant permet une caractérisation de l'espace tangent à une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ lorsque celle-ci est définie par les critères usuels de submersion ou de plongement.

Théorème 1.2.3.
Soit Σ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et soit $a \in \Sigma$,

1. *Si U_a est un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathscr{C}^k(U_a,\mathbb{R}^{n-p})$ une submersion en a telle que $U_a \cap \Sigma = f^{-1}(0)$ alors $\boldsymbol{T_a\Sigma = \ker D_a f}$.*
2. *Si U_a est un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$, V_0 est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^p$et $g \in \mathscr{C}^k(V_0,\mathbb{R}^n)$ une immersion en 0 telle que $g(0) = a$ et $g : V_0 \to U_a \cap \Sigma$ est un homéomorphisme alors $\boldsymbol{T_a\Sigma = \mathrm{Im}\, D_0 g}$.*

Démonstration. 1. Comme $\operatorname{rang} D_af = n - p$ alors $\dim\ker D_af = p$ et il suffit de montrer l'inclusion $T_a\Sigma \subset \ker D_af$. Soit $v \in T_a\Sigma$ et soit $\gamma : I_0 \to \Sigma$ différentiable telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. Quitte à restreindre I_0 on peut supposer $\gamma(I_0) \subset U_a \cap \Sigma$ d'où $f(\gamma(t)) = 0$ $\forall t \in I_0$ par conséquent $D_{\gamma(t)}f \cdot \gamma'(t) = 0$ $\forall t \in I_0$, en particulier pour $t = 0$ $D_a f \cdot v = 0$ i.e $v \in \ker D_a f$.

2. Comme $D_0 g \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ et $D_0 g$ est injective alors $\dim \operatorname{Im} D_0 g = p$ et il suffit de montrer que $\operatorname{Im} D_0 g \subset T_a\Sigma$. Soit $v \in \operatorname{Im} D_0 g$, alors $v = D_0 g \cdot w$, $w \in \mathbb{R}^p$. Soit $\psi : I_0 \to V_0$ une application différentiable telle que $\psi(0) = 0$ et $\psi'(0) = w$. Posons $\gamma = g \circ \psi$. γ est différentiable, $\gamma(I_0) \subset U_a \cap \Sigma$, $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = D_0 g \cdot \psi'(0) = D_0 g \cdot w = v$ d'où $v \in T_a\Sigma$.

$\square$

Problèmes

Exercice 1.4. *(voir solution, page 86)*

1. *Montrer que l'application déterminant* $F : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \det A \end{cases}$ *est différentiable. On rappel que l'application "trace" est linéaire*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} & \mapsto & \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \det(c_1(A),e_2,\ldots,e_n) + \ldots + \det(e_1,\ldots,e_{n-1},c_n(A)) \end{array}$$

2. *Montrer que* $D_A F(AH) = \det A \times \operatorname{tr} H$
(*Indication : calculer la différentielle de la composée* $H \mapsto AH \mapsto \det AH$).
Déduire, pour A inversible, que $D_A F(H) = \det A \times \operatorname{tr}(A^{-1}H)$ *et* $D_{Id}F(H) = \operatorname{tr} H$
3. *Montrer directement que* $\boldsymbol{D_A F(H) = \operatorname{tr}(\widetilde{A}H)}$ *où* $\widetilde{A}$ *est la transposée de la comatrice de A (On rappel que* ${}^t\tilde{A} = \operatorname{Com} A =$ *matrice des cofacteurs* $= ((-1)^{i+j}\det A_{ij})_{1\le i,j\le n}$ A_{ij} *étant la matrice d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice A).*

Exercice 1.5 (lemme de Morse).
On se propose de montrer que si $a \in U$ est un point critique non dégénéré de $f \in \mathscr{C}^3(U,\mathbb{R})$, i.e $D_a f = 0$ et $\det(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a))_{1\le i,j\le n} \neq 0$ *alors $\exists(U,\varphi)$ une carte centrée en a telle que $\forall x \in \varphi(U)$,*

$$\boldsymbol{f \circ \varphi^{-1}(x_1,\ldots,x_n) = f(a) - \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2}$$

où k est la signature de $Q = \big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\big)_{1\le i,j\le n}$

$k = \operatorname{sign} Q = \#\{$*valeurs propres* $>0\} - \#\{$*valeurs propres* $<0\}$

I− *Pour $M \in \mathrm{S} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tM = M\}$ (ensemble des matrices symétriques) avec M inversible, on définit une application* $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{S} \\ A & \mapsto & {}^tAMA \end{cases}$
Montrer qu'il existe un voisinage U de f dans S, un voisinage V de l'identité $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une application g de classe $\mathscr{C}^\infty$ de U dans V telle que $A = {}^t g(A) M g(A)$

II– *Montrer que sur toute boule ouverte de centre a dans U, f peut se mettre sous la forme $f(x) = f(a) + \sum_{j=1}^{n} x_j h_j(x)$ où les h_j sont de classe $\mathscr{C}^2$ et $h_j(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$*

III– *Appliquer deux fois le résultat précédent puis conclure.*

Exercice 1.6.

1. *Montrer que $A_k = \{\mathsf{M} \in \mathcal{M}(m \times n,\mathbb{R}),\ \operatorname{rang} \mathsf{M} \geq k\}$ est ouvert dans $\mathcal{M}(m \times n,\mathbb{R})$*

$$\left[A_k = \bigcup_{\substack{(I,J)\subset\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\} \\ |I|=|J|=k}} \{\mathsf{M} \in \mathcal{M}(m \times n,\mathbb{R}),\ \det \mathsf{M}_{I,J} \neq 0\} \right]$$

2. *Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,V)$ entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. Montrer que l'ensemble suivant $B_k = \{x \in U,\ \operatorname{rang} D_x f \geq k\}$ est un ouvert de U, $\forall k \geq 0$.*

3. *Soit $r = \sup_{x\in U}(\operatorname{rang} D_x f)$ $\quad (r \leq \min(m,n))$ montrer que $B = \bigcup_{k=0}^{r} \overbrace{\{x \in U,\ \operatorname{rang} D_x f = k\}}^{\text{intérieur}}$ est un ouvert dense de U.*

Exercice 1.7 (Identité d'Euler).

1. *Soit f une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n \setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $\lambda > 0$ on ait $f(\lambda x) = \lambda^m f(x)$, $(m \in \mathbb{R})$ on dit alors que f est* ***homogène de degré*** *m. Montrer que $< \nabla_x f,x >= m f(x)$ (identité d'Euler)*
2. *Montrer que pour $m, \alpha \neq 0$ $\Gamma_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = \alpha\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.*
3. *Montrer que l'identité d'Euler équivaut à l'homogénéité de f.*
4. *Montrer que si f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ et homogène de degré m alors f est un polynôme.*

Exercice 1.8 (critère de non-homéomorphisme).

1. *Montrer que si $f : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ est un* ***homéomorphisme*** *alors le* ***nombre*** *de* ***composantes connexes*** *de X et de Y est* ***le même*** *(Si C_x est la composante connexe de x montrer que $f(C_x) = C_{f(x)}$).*

2. *Montrer que* $\mathbb{R}^2$ *n'est pas homéomorphe à* $\mathbb{R}$.
3. *Montrer que* S^1 *n'est pas homéomorphe à un intervalle de* $\mathbb{R}$.
4. *Que représente* $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z^2 = x^2 + y^2\}$. *Montrer que* Σ *n'est pas une sous-variété au voisinage de* $(0,0,0)$.

Exercice 1.9.
Soit $M_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 = x \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ $(a > 0)$

1. *Déterminer* a *pour que* M_a *soit une sous-variété.*
2. *Donner une interprétation géométrique.*
3. *Déterminer l'espace tangent* $T_{(0,0,3)} M_3$.

Exercice 1.10 (paramétrisation du Tore T^2).
Donner la paramétrisation de la surface de révolution engendrée par le cercle de centre $\omega \in \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = 0\}$ *et de rayon* $r < \| \overrightarrow{O\omega} \| = R$ *tournant autour de l'axe* Oz.

Exercice 1.11 (groupes de Lie classiques).

1. (a) *Montrer que* $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tMM = \mathrm{Id}\}$ *est une sous-variété de* $\mathbb{R}^{n^2}$ *de classe* $\mathscr{C}^\infty$, *de dimension* $\frac{n(n-1)}{2}$, *compacte et non-connexe.*
   (b) *Montrer que* $T_{\mathrm{Id}}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tM = -M\}$.
2. (a) *Montrer que* $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det M = 1\}$ *est une sous-variété* $\mathscr{C}^\infty$ *de dimension* $n^2 - 1$ *non compacte.*
   (b) *Montrer que* $\forall A \in SL_n(\mathbb{R})$
   $T_A(SL_n(\mathbb{R})) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ < A,M >= 0\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(A^{-1}M) = 0\}$

Exercice 1.12 (mesure de Radon sur une sous-variété).
Soit Σ *une sous-variété de* $\mathbb{R}^n$ *de dimension* p *et classe* $\mathscr{C}^k$ $(k \geq 1)$. *Si* (U,φ) *est une paramétrisation de* Σ, *on définit une* ***mesure de Radon*** μ *sur* Σ *par*

$$\int_\Sigma f\, d\mu =< \mu,f >= \int_U (f \circ \varphi)(x) \left(\sum_{i_1 < \ldots < i_p} \left| \frac{D(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_p})}{D(x_1,\ldots,x_p)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx$$

où $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$, $x = (x_1,\ldots,x_p)$ *et* $f \in \mathscr{C}_0(\Sigma)$, *i.e continue à support compact.*

$d\mu = \left(\sum_{i_1<\ldots<i_p} \left|\frac{D(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_p})}{D(x_1,\ldots,x_p)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} dx$ *est une mesure sur* $\boldsymbol{\Sigma}$ *et* $\int\limits_{\boldsymbol{\Sigma}} d\mu =$ *mesure de* $\boldsymbol{\Sigma}$.

Détailler les cas suivants :

1. $p = 1$, *retrouver la notion de longueur d'arc.*
2. $p = 2$ *et* $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{S}^2$ (*sphère unité de* $\mathbb{R}^3$).
3. $p = n-1$, $\boldsymbol{\Sigma} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x_n = \phi(x_1,\ldots,x_{n-1})\}$ (*hypersurface de* $\mathbb{R}^n$).

Exercice 1.13 (coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^n$).

1. *Montrer que tout point* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *peut être paramétrisé par*

$$\begin{cases} x_1 &= r\cos\theta_1 \\ x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= r\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_n &= r\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{cases}$$

2. *Si* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *exprimer* $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$ *en coordonnées polaires.*

   (*Commencer par montrer, par récurrence, que :*
   $$dx = r^{n-1}drd\omega = r^{n-1}(\sin\theta_1)^{n-2}\times(\sin\theta_2)^{n-3}\times\cdots\times(\sin\theta_{n-2})\ drd\theta_1\ldots d\theta_{n-1}).$$
3. *Montrer que si* f *est* ***radiale*** (*i.e ne dépend que de* $\|x\| = r$) *alors*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{f(x)\,dx = c_n \int\limits_0^{+\infty} r^{n-1} f(r)\,dr}$$

   $\left(\text{où } c_n = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \text{ et } \Gamma(t) = \int\limits_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}\,dx\ (t>0) \text{ est la fonction Gamma}\right)$.
4. *Déterminer* V *le volume de* $\mathrm{B}(0,1)$ *dans* $\mathbb{R}^n$.
5. *Montrer que :* $\boldsymbol{\|x\|^\alpha \in L^1(\mathrm{B}(0,1)) \Leftrightarrow \alpha > -n}$, $\boldsymbol{\|x\|^\alpha \in L^1(\{\|x\| > 1\}) \Leftrightarrow \alpha < -n}$.

Chapitre 2

Variétés différentielles

2.1 Topologie des variétés

On sait faire du calcul différentiel sur un espace de Banach et le calcul différentiel est local. On peut donc faire du calcul différentiel sur tout espace qui est "localement isomorphe" à un Banach. C'est en essayant de donner un sens à cette logique qu'on est conduit à la notion de variété.

Définition 2.1 (Cartes locales).
Soit M un ensemble non vide, on appelle carte locale *en x tout couple (U,φ) tel que :*

- $x \in U \subset \mathsf{M}$, *$U$ est dit domaine de carte.*
- $\varphi : U \to \varphi(U)$ *une bijection et $\varphi(U)$ un ouvert d'un Banach B. On appelle φ la fonction coordonnées ou coordonnés locales.*

Un atlas est une collection de cartes deux à deux compatibles dans le sens :

Définition 2.2 (Atlas).
Un ensemble de cartes "compatibles" $\mathcal{A} = \{(U_i,\varphi_i) \,/\, i \in I\}$ sur M est dit $\mathscr{C}^k$ atlas *si :*

- $\bigcup\limits_{i\in I} U_i = \mathsf{M}$ *(les domaines de cartes de $\mathcal{A}$ forment un recouvrement de M).*
- $\begin{cases} \text{i)} & \forall (i,j) \in I^2,\ \varphi_i(U_i \cap U_j) \text{ est un ouverts de } B_i \text{ et} \\ \text{ii)} & \phi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j) \text{ est de classe } \mathscr{C}^k \\ & \text{entre un ouvert de } B_j \text{ et un ouvert de } B_i \end{cases}$

  ($(\phi_{ij})_{(i,j)\in I^2}$ dites fonctions de transition ou de changement de cartes).

Remarques.

1. *Il résulte de cette définition que $\forall i \in I$, $\varphi_i(U_i)$ est un ouvert de B_i et l'intersection de deux domaines de cartes est aussi un domaine de cartes.*

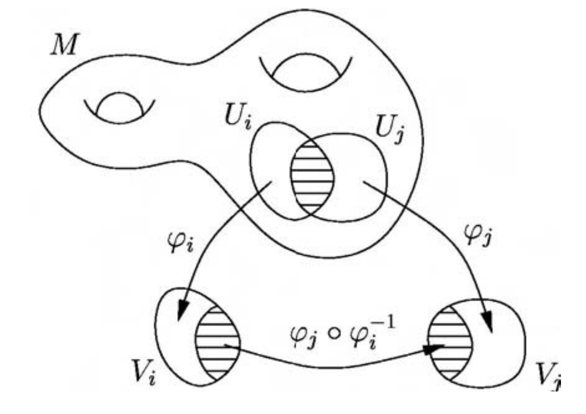

FIG. 2.1 – *changement de cartes* ϕ_{ji}

2. *Les $(\phi_{ij})_{(i,j)\in I^2}$ sont des $\mathscr{C}^k$ difféomorphismes (des homéomorphismes si $k=0$) car elles sont bijectives et $(\phi_{ij})^{-1} = \phi_{ji}$.*
3. *si les $\{B_i\}_{i\in I}$ sont de dimension finie ou si les $(\phi_{ij})_{(i,j)\in I^2}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ alors : les deux cartes (U_i,φ_i) et (U_j,φ_j) sont compatibles implique B_i et B_j sont isomorphes.*

Tout $\mathscr{C}^0$ atlas $\mathcal{A} = \{(U_i,\varphi_i) \;/\; i \in I\}$ impose une topologie "canonique" sur M :

Théorème 2.1.1. *Si M est un ensemble non vide muni d'un $\mathscr{C}^0$ atlas $\mathcal{A} = \{(U_i,\varphi_i) \;/\; i \in I\}$ alors*

$$\tau_{\mathcal{A}} = \{U \subset M \;/\; \forall i \in I,\ \varphi_i(U \cap U_i) \text{ est un ouvert de } B_i\}$$

est une topologie sur M et c'est l'unique topologie pour laquelle $(U_i)_{i\in I}$ sont des ouverts et $(\varphi_i)_{i\in I}$ sont des homéomorphismes.

Démonstration. τ est bien une topologie sur M, en effet

- $\forall i \in I$, $\varphi_i(M \cap U_i) = \varphi_i(U_i)$, $\varphi_i(\varnothing \cap U_i) = \varnothing$ sont des ouverts de B_i i.e $\{M,\varnothing\} \subset \tau$
- Soit $(\theta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subset \tau$, $\forall i \in I$, $\varphi_i\left(\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \theta_\lambda\right) \cap U_i\right) = \varphi_i\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (\theta_\lambda \cap U_i)\right) = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \varphi_i(\theta_\lambda \cap U_i)$ est réunion d'ouverts de B_i donc $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \theta_\lambda \in \tau$
- Soit $\{W,\theta\} \subset \tau$, $\forall i \in I$, $\varphi_i((W \cap \theta) \cap U_i) = \varphi_i((W \cap U_i) \cap (\theta \cap U_i)) = \varphi_i(W \cap U_i) \cap \varphi_i(\theta \cap U_i)$ (car φ_i est injective) intersection de deux ouverts de B_i donc $W \cap \theta \in \tau$

Montrons que pour cette topologie $\forall i \in I$, $U_i \in \tau$ et $\varphi_i : U_i \longrightarrow \varphi_i(U_i)$ est un homéomorphisme. Comme $\forall (i,j) \in I^2$, $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ est un ouverts de B_j alors $(U_i)_{i\in I} \subset \tau$. φ_i étant bijective, il reste alors à montrer qu'elle est continue et ouverte. Si θ est un ouvert de $\varphi_i(U_i)$ (donc aussi un ouvert

de B_i) alors $\forall j \in I$, $\varphi_j\left(\varphi_i^{-1}(\theta) \cap U_j\right) = \varphi_j\left(\left(\varphi_i^{-1}(\theta) \cap U_i\right) \cap U_j\right) = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\left(\theta \cap \varphi_i\left(U_i \cap U_j\right)\right)$ comme $\theta \cap \varphi_i\left(U_i \cap U_j\right)$ est un ouvert de $\varphi_i\left(U_i \cap U_j\right)$ et $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est un homéomorphisme alors $\varphi_j\left(\varphi_i^{-1}(\theta) \cap U_j\right)$ est un ouvert de $\varphi_j(U_j)$ donc aussi de B_j par suite $\varphi_i^{-1}(\theta) \in \tau$ et φ_i est continue. Si $U \subset U_i$ et $U \in \tau$ alors $\varphi_i(U \cap U_i) = \varphi_i(U)$ est un ouvert de B_i contenu dans $\varphi_i(U_i)$ et φ_i est ouverte.
Montrons que si τ_1 est une seconde topologie sur M telle que $(U_i)_{i \in I} \subset \tau_1$ et $\forall i \in I$, $\varphi_i : (U_i,\tau_1|_{U_i}) \to (\varphi_i(U_i),\tau_i)$ est un homéomorphisme alors $\tau_1 = \tau$. Si $U \in \tau_1$ alors $\forall i \in I$, $U \cap U_i$ est un ouvert de U_i par suite $\varphi_i(U \cap U_i)$ est un ouvert de $\varphi_i(U_i)$ (donc aussi de B_i) et $U \in \tau$ i.e $\tau_1 \subset \tau$. Réciproquement si $U \in \tau$ alors $\forall i \in I$, $\varphi_i(U \cap U_i)$ est un ouvert de $\varphi_i(U_i)$ donc $\forall i \in I$, $U \cap U_i \in \tau_1$ par suite $U = U \cap M = U \cap (\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I}(U \cap U_i)$ est réunion d'ouverts donc $U \in \tau_1$, $\tau_1 \subset \tau$. $\square$

Exercice 2.1. *Soit $\mathcal{A} = \{(U_i,\varphi_i),\ i \in I\}$ un $\mathscr{C}^0$ atlas sur un ensemble non vide M. Montrer que $\tau = \left\{U \subset M,\ \forall x \in U,\ \exists (U_i,\varphi_i) \text{ carte en } x, \text{ telle que } x \in U_i \subset U\right\}$ est une topologie sur M, puis comparer les topologies τ, $\tau_{\mathcal{A}}$.*

Définition 2.3 (Variétés topologiques).
On appelle variété topologique *tout couple $(M,\mathcal{A})$ formé d'un ensemble non vide M et d'un atlas $\mathcal{A}$ de classe $\mathscr{C}^0$ sur l'ensemble M.*

Exercice 2.2. *Si M est un espace topologique montrer que M est une variété topologique si et seulement si tout point de M possède un voisinage homéomorphe à un ouvert d'un espace de Banach.*

Exemples.

1. *Soit M un ensemble, $\{(x,x \mapsto 0)\ ;\ x \in M\}$ est un atlas de M ; la topologie sous-jacente est la topologie discrète.*
2. *Si B est un espace de Banach, $\{(B,\mathrm{Id},B)\}$ est un atlas de B ; La topologie sous-jacente à la structure de variété qu'il définit est la topologie de l'espace de Banach B.*
3. *On verra que les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ sont elles aussi des variétés topologiques.*

Exercice 2.3. *Montrer que si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux $\mathscr{C}^0$ atlas sur un ensemble non vide M alors $\left(\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \text{ est un } \mathscr{C}^0 \text{ atlas sur } M\right) \Leftrightarrow \left(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B} \text{ engendrent la même topologie sur } M\right)$.*

À la lumière de l'exercice précédent on dit que deux $\mathscr{C}^k$ atlas sont *compatibles* (ou *équivalents*) si leur réunion est encore un $\mathscr{C}^k$ atlas. ceci permet d'identifier tout les atlas compatibles avec un atlas donné.

Théorème 2.1.2.
Si $\mathcal{A}$ est un $\mathscr{C}^k$ atlas sur un ensemble non vide M alors la réunion de tout les $\mathscr{C}^k$ atlas compatibles avec $\mathcal{A}$ est aussi un $\mathscr{C}^k$ atlas dit atlas maximal (ou atlas saturé).

Démonstration. Si $\widetilde{\mathcal{A}} = \bigcup_{\mathcal{B} \text{ atlas compatible avec } \mathcal{A}} \mathcal{B}$ et si on note par : $\{(U_i^{\mathcal{B}}, \varphi_i^{\mathcal{B}})\}_{i \in I_{\mathcal{B}}}$ un atlas $\mathcal{B}$ compatible avec $\mathcal{A}$, alors $M = \bigcup_{i \in I_{\mathcal{B}}} U_i^{\mathcal{B}} = \bigcup_{\mathcal{B} \text{ compatible avec } \mathcal{A}} \left(\bigcup_{i \in I_{\mathcal{B}}} U_i^{\mathcal{B}} \right)$.
Soient (V,ϕ) et (W,ψ) deux cartes de $\widetilde{\mathcal{A}}$ et montrons qu'elles sont compatibles. Soit $x \in V \cap W$, il existe alors $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$ une carte en x tels que $\varphi(V \cap W \cap U) = \varphi(V \cap U) \cap \varphi(W \cap U)$ est un ouvert de $\varphi(U)$ et

$$\begin{cases} \phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(V \cap U) \to \phi(V \cap U) & \text{est de classe } \mathscr{C}^k \\ \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(W \cap U) \to \psi(W \cap U) & \text{est de classe } \mathscr{C}^k \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \phi(V \cap W \cap U) = \phi \circ \varphi^{-1}(\varphi(V \cap W \cap U) & \text{est un ouvert de } \phi(V), \text{ et} \\ \psi(V \cap W \cap U) = \psi \circ \varphi^{-1}(\varphi(V \cap W \cap U) & \text{est un ouvert de } \psi(W) \end{cases}$$

il en résulte que $\phi \circ \psi^{-1} = (\phi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ de $\psi(V \cap W \cap U)$ dans $\phi(V \cap W \cap U)$ comme ceci est vrai localement pour tout $\psi(x)$ dans $\psi(V \cap W)$ on déduit alors que : $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(V \cap W) \to \phi(V \cap W)$ est de classe $\mathscr{C}^k$. □

Définition 2.4 (Variétés différentielles).
On appelle variété différentielle *tout couple* $(M,\widetilde{\mathcal{A}})$ *formé d'un ensemble non vide* M *et d'une classe de* $\mathscr{C}^k$ *atlas* $(k \geq 1)$ *sur* M *compatibles avec* $\mathcal{A}$ *(ou de l'atlas maximal* $\widetilde{\mathcal{A}}$ *contenant* $\mathcal{A}$*).*

Remarques.

1. *Une variété de classe* $\mathscr{C}^k$ *est aussi de classe* $\mathscr{C}^r$ *si* $k \geq r$*, en particulier toute variété différentielle est une variété topologique.*
2. *Une variété topologique est dite de dimension finie si* $\forall i \in I, \ \dim B_i < +\infty$ *et de dimension infinie sinon.*
3. *Plusieurs catégories de variétés peuvent être étudiées :*
   (i) *Lorsqu'on prend des espaces models autres que les Banach, essentiellement ceux qui permettent de faire du calcul différentiel (les espaces de Fréchet par exemple).*
   (ii) *Lorsqu'on exige d'autres conditions de régularités des* (ϕ_{ij})*.*
4. *Pour nous le mot "variété" lorsque employé seul désigne une variété topologique et "variété différentielle" désigne variété de classe* $\mathscr{C}^k$*,* $k \geq 1$ *(plusieurs auteurs parlent de variété régulière ou lisse lorsqu'elle est de classe* $\mathscr{C}^\infty$*). Nous allons voir, dans la section (compléments), qu'il y a en gros deux classes : les variétés* $\mathscr{C}^0$ *(topologiques) et les variétés* $\mathscr{C}^\omega$ *(analytiques réels).*

Exemples.

1. *Un espace de Banach B muni de l'atlas $\{(B,\mathrm{Id})\}$ est une variété de classe $\mathscr{C}^\omega$.*
2. ***Sphère unité*** S^n
   La sphère *unité* $\mathrm{S}^n = \{(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1},\ x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2 = 1\}$ *est une variété* $\mathscr{C}^\infty$ *de dimension* n*, en effet si* $N = (0,\ldots,1)$ *et* $S = (0,\ldots,-1)$ *dénotent, respectivement, le pôle nord et le pôle sud alors à l'aide des deux projections stéréographiques :*

$$\begin{array}{cccc} \varphi_N : & \mathrm{S}^n\backslash\{N\} & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1,\ldots,x_{n+1}) & \mapsto & (\frac{x_1}{1-x_{n+1}},\cdots,\frac{x_n}{1-x_{n+1}}) \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \varphi_S : & \mathrm{S}^n\backslash\{S\} & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1,\ldots,x_{n+1}) & \mapsto & (\frac{x_1}{1+x_{n+1}},\cdots,\frac{x_n}{1+x_{n+1}} \end{array}$$

on définit sur S^n *l'atlas suivant* $\mathcal{A} = \{(\mathrm{S}^n\backslash\{N\},\varphi_N),\ (\mathrm{S}^n\backslash\{S\},\varphi_S)\}$ *et*

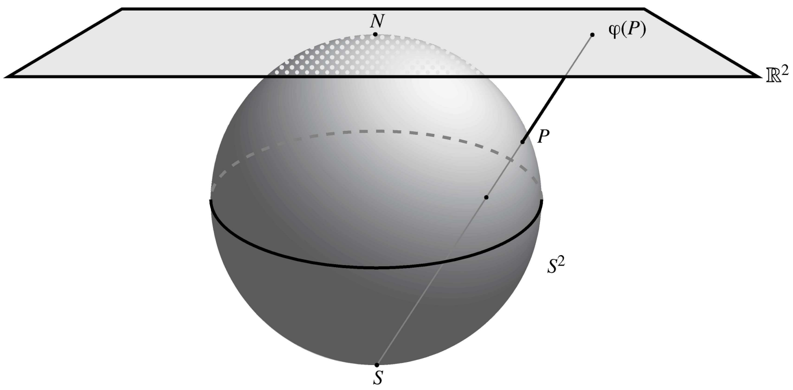

FIG. 2.2 – *projection stéréographique de pôle sud sur* S^2

on vérifie que

$$\begin{array}{cccc} \varphi_S\circ\varphi_N^{-1} : & (\mathbb{R}^n)^* & \to & (\mathbb{R}^n)^* \\ & (x_1,\ldots,x_n) & \mapsto & (\frac{x_1}{\|x\|^2},\cdots,\frac{x_n}{\|x\|^2}) = \frac{x}{\|x\|^2} \end{array}$$

et se changement de cartes est bien $\mathscr{C}^\infty$

- S^n *est compacte car elle est fermée et bornée dans* $\mathbb{R}^{n+1}$.
- S^n *est connexe, c'est l'image du connexe* $[0,2\pi]^n$ *par l'application continue* ϕ

$$\phi((\theta_1,\ldots\theta_n)) = \left\{\begin{array}{ccc} \phi_1(\theta_1,\ldots\theta_n) & = & \cos\theta_1 \\ \phi_2(\theta_1,\ldots\theta_n) & = & \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \phi_{n-1}(\theta_1,\ldots\theta_n) & = & \sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ \phi_n(\theta_1,\ldots\theta_n) & = & \sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{array}\right.$$

3. ***Tore*** T^2
   Le Tore T^2 *est la surface engendrée par la rotation d'un cercle de centre* $\omega \in \{z = 0\}$ *et de rayon* $r < \|\overrightarrow{o\omega}\| = R$ *tournant autour de l'axe oz.* T^2 *est paramétrée par l'application :*
   $f : (\theta,\varphi) \mapsto \big(\cos\theta(R + r\cos\varphi), \sin\theta(R + r\cos\varphi), r\sin\varphi\big)$, *comme*
   $$D_{(\theta,\varphi)}f = \begin{pmatrix} -\sin\theta(R + r\cos\varphi) & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta(R + r\cos\varphi) & -r\sin\theta\sin\varphi \\ 0 & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$
   on vérifie que f *est une immersion* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *et que* f *est injective sur* $]\alpha,\alpha + 2\pi[\times]\beta,\beta + 2\pi[$ $\forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. *On déduit que* f *est un plongement et* T^2 *est une sous-variété de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *et de dimension* 2 *de* $\mathbb{R}^3$. *On déduit aussi que le tore* T^2 *est compact et connexe.*
4. ***Espace projectif*** $P^n(\mathbb{R})$
   On considère l'espace quotient $P^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/\mathcal{R}$ *par la relation d'équivalence :* $u \ \mathcal{R}\ v \Leftrightarrow \exists\lambda \neq 0,\ u = \lambda v$. *L'ensemble des droites de* $\mathbb{R}^{n+1}$, $P^n(\mathbb{R})$, *est appelé l'*espace projectif réel. *Les* $U_i = \{[x] = [(x_1,\ldots,x_{n+1})] \in P^n(\mathbb{R}),\ x_i \neq 0\}$ $(1 \leq i \leq n+1)$ *forment un recouvrement ouvert de* $P^n(\mathbb{R})$ *et les*
   $$\begin{array}{rccc} \varphi_i : & U_i & \to & \mathbb{R}^n \\ & [x] = [(x_1,\ldots,x_{n+1})] & \longmapsto & (\frac{x_1}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots,\frac{x_{n+1}}{x_i}) \end{array}$$
   sont des homéomorphismes. Il est facile de voir que
   $$\begin{array}{rccc} \varphi_i^{-1} : & \mathbb{R}^n & \to & U_i \\ & (x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & [(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)] \end{array}$$
   et que les fonctions de transition
   $$\begin{array}{rccc} \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : & \varphi_j(U_i \cap U_j) & \to & \varphi_i(U_i \cap U_j) \\ & (x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}((x_1,\ldots,x_n)) \end{array}$$
   sont de classe $\mathscr{C}^\infty$. *Comme l'application* $\mathrm{S}^n \to P^n(\mathbb{R})$, $x \mapsto [x]$ *est continue et surjective on déduit, de plus, que* $P^n(\mathbb{R})$ *est compact et connexe.*
5. ***Grassmanniennes*** $\mathrm{G}_{r,n}$

Théorème 2.1.3.
Si M est une variété munie d'un atlas $\mathcal{A}$ de classe $\mathscr{C}^k$, $(k \geq 0)$ et si B est un Banach, alors l'ensemble $\mathscr{E}(B) = \{x \in M, \exists(U_i,\varphi_i) \in \mathcal{A}$ carte en $x;\ B_i$ est homéomorphe à $B\}$

est un ouvert de M.
Cet ensemble est fermé si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite

1. *Les $\{B_i\}_{i\in I}$ sont des espaces Euclidiens (des espaces normés de dimension finie). Admettons le théorème d'invariance de la dimension qui dit que si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et U est homéomorphe à V alors nécessairement $n = m$.*
2. *Les fonctions de transitions (ou de changement de domaines) $(\phi_{ij})_{(i,j)\in I^2}$ sont des $\mathscr{C}^1$ difféomorphismes.*

Démonstration. ◦ Si $x \in \mathscr{E}(B)$ et $x \in U_{i_0}$ alors $\forall y \in U_{i_0}$, $y \in \mathscr{E}(B)$ i.e $\mathscr{E}(B)$ est voisinage de chacun de ses points il est donc ouvert dans M.

◦ Il n'est pas difficile de voir que dans chacune des deux conditions du théorème si $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ alors B_i est homéomorphe à B_j, dans le cas Euclidien si $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ est homéomorphe à $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ alors $\dim B_i = \dim B_j$ i.e B_i isomorphe à B_j et dans le deuxième cas si $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ est difféomorphe à $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ alors B_i isomorphe à B_j (c'est une conséquence directe du théorème d'inversion local). Montrons que ceci implique que $\mathscr{E}(B)$ est fermé, en effet si $x \notin \mathscr{E}(B)$, $\exists(U_{i_0},\varphi_{i_0}) \in \mathcal{A}$ une carte en x telle que B_{i_0} n'est pas homéomorphe à B et $\forall y \in U_{i_0}$, $y \in U_{i_0} \cap U_j$ implique B_j non homéomorphe à B par suite $\forall x \in M \backslash \mathscr{E}(B)$, $\exists U_{i_0}$ voisinage de x tel que $U_{i_0} \subset M \backslash \mathscr{E}(B)$ donc $\mathscr{E}(B)$ est un fermé de M.

□

Définition 2.5. *Une variété M est dite* pure *s'il existe un Banach B tel que M soit égale à $\mathscr{E}(B) = \{x \in M, \exists(U_i,\varphi_i) \in \mathcal{A}$ carte en x telle que B_i est homéomorphe à $B\}$. On dit aussi que M est une variété de Banach (ou modelée sur un Banach).*

Il en résulte que les composantes connexes d'une variété différentielle (ou d'une variété topologique de dimension finie) sont pures. Pour les variétés qui possèdent de "bonnes propriétés topologiques" (dénombrables à l'infini, possédants une base dénombrable...voir section "compléments") les composantes connexes sont en nombre fini ou dénombrable ce qui permet, quitte à se restreindre aux composantes connexes, de considérer que les variétés pures.

Dans toute la suite on ne considère que les variétés pures

Les variétés topologiques héritent localement toutes les propriétés topologiques d'un Banach, à savoir notamment

Théorème 2.1.4.

1. *Dans une variété topologique les points sont fermés.*

2. *Toute variété topologique est de Baire.*
3. *Toute variété topologique est localement connexe par arcs.*
4. *Une variété topologique est localement compact si et seulement si elle est de dimension finie.*

Démonstration.

1. Soit $x \in M$, $y \in \overline{\{x\}}$ et U un domaine de carte contenant y. Comme U est séparé (homéomorphe à un ouvert d'un espace de Banach) et $U \cap \{x\} \neq \varnothing$ alors $y = x$ i.e $\overline{\{x\}} = \{x\}$.
2. Les ouverts d'un Banach sont de Baire donc aussi les domaines de cartes, il en résulte que toute variété topologique M est localement de Baire mais ceci équivaut à M de Baire (voir Annexe).
3. Si (U,φ) est une carte en x et si $V \in \mathcal{V}_{(x)}$ est un voisinage ouvert de x alors
$$\exists r > 0,\ x \in \varphi^{-1}\big(B(\varphi(x),r)\big) \subset V \cap U \subset V$$
et $\varphi^{-1}\big(B(\varphi(x),r)\big)$ est un voisinage connexe par arcs de x.
4. Si une variété topologique M modelée sur un Banach B est localement compacte alors grâce aux cartes locales (fonctions coordonnées) B sera lui aussi localement compact et le théorème de Riesz affirme que B est de dimension finie. Réciproquement si B est de dimension finie alors toutes ses boules fermées sont compactes donc si (U,φ) est une carte en x alors $\exists r > 0$ tel que $\varphi^{-1}\big(\overline{B}(\varphi(x),r)\big) \subset U$ est un voisinage compact de x, i.e M est localement compacte.

□

Corollaire 3.

1. *Toute variété connexe est connexe par arcs.*
2. *Les composantes connexes d'une variété sont ouvertes.*

Démonstration. Ceci est vrai dans n'importe quel espace topologique localement connexe par arcs. (voir annexe) □

Remarques. *Il faut prendre garde que cette topologie n'est pas séparée. Voici un contre-exemple d'un espace localement euclidien (variété topologique de dimension finie) qui n'est pas de Haussdorf.*

$\boxed{\text{On ne considère désormais que les variétés séparées}}$

2.2 Morphismes de variétés

Une application différentiable entre deux variétés est simplement une application différentiable lorsqu'on la lit dans des cartes.

Définition 2.6 (Différentiabilité).
Soient M et N deux variétés différentielles, une application $f : M \to N$ est différentiable en *a s'il existe une carte (U,φ) en a et une carte (V,ϕ) en $f(a)$ telle que $f(U) \subset V$ et*

$$\phi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \phi(V) \text{ est différentiable en } \varphi(a)$$

Lorsque f est différentiable en tout point a de M, on dit que f est différentiable sur M.
Si pour tout x dans M l'application $\phi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \phi(V)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\varphi(U)$ on dit que f est un morphisme *de classe $\mathscr{C}^k$ sur M.*

Exercice 2.4. *Montrer que si f est différentiable en a alors $\forall (U,\varphi)$ carte en a, $\forall (V,\phi)$ carte en $f(a)$ telle que $f(U) \subset V$ alors $\phi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \phi(V)$ est différentiable en $\varphi(a)$.*

Définition 2.7 (Difféomorphisme). *Une application $f : M \to N$ entre deux variétés différentielles est un $\mathscr{C}^k$* difféomorphisme *si f est bijective et f, f^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^k$.*

Exercice 2.5. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux atlas sur un ensemble M, montrer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont $\mathscr{C}^k$ compatibles si et seulement si l'identité $\mathrm{Id} : (M,\mathcal{A}) \to (M,\mathcal{B})$ est de classe $\mathscr{C}^k$.*

Exercice 2.6 (transport de structures). *Soient $(M,\mathcal{A})$ est une variété de classe $\mathscr{C}^k$ et $f : M \to N$ un homéomorphisme, montrer qu'il existe sur N une unique structure de variété de classe $\mathscr{C}^k$ pour laquelle f est un $\mathscr{C}^k$ difféomorphisme. C'est la structure donnée par l'atlas $\mathcal{B} = \{(f(U),\varphi \circ f^{-1})/\ (U,\varphi) \in \mathcal{A}\}$. Examiner le cas où $M = \mathrm{S}^1$ et $N = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.*

Exercice 2.7. *Montrer que les deux atlas $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, \mathrm{Id})\}$ et $\mathcal{B} = \{(\mathbb{R},\varphi),\ \varphi : x \mapsto x^3\}$ ne sont pas $\mathscr{C}^1$ équivalents mais les deux variétés $(\mathbb{R},\mathcal{A})$ et $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ sont $\mathscr{C}^\infty$ difféomorphes.*

Exercice 2.8. *Soit B un Banach, montrer que $\phi : x \mapsto \frac{rx}{r^2 - \|x\|^2}$ est un $\mathscr{C}^\infty$ difféomorphisme de $B(0,r)$ dans B. Déduire que toute variété modelée sur B admet un atlas $\{(U_i,\varphi_i),\ i \in I\}$ pour lequel $\varphi_i(U_i) = B$, $\forall i \in I$.*

2.2.1 Espace tangent

Définition des "géomètres"
Soit M une variété différentielle modelée sur un Banach B. Une *courbe* $\mathscr{C}^1$

passant par $a \in M$ est la donnée d'une application $\gamma :]-\varepsilon_\gamma,\varepsilon_\gamma[\to M$ de classe $\mathscr{C}^1$ d'un voisinage de 0 de $\mathbb{R}$ dans M telle que $\gamma(0) = a$. On définit sur l'ensemble de ces courbes $\mathscr{C}(M,a) = \{\gamma \in \mathscr{C}^1(]-\varepsilon_\gamma,\varepsilon_\gamma[,M), \gamma(0) = a\}$ la relation suivante :

$$(I_1,\gamma_1) \sim (I_2,\gamma_2) \Leftrightarrow \exists (U,\varphi) \text{ carte en } a \text{ telle que } (\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$$

On montre que c'est une relation d'équivalence et l'espace quotient $\mathscr{C}(M,a)/\sim$ définira l'*espace tangent* à M en a et sera noté $(T_a M)_g$ (l'indice g pour l'approche des géomètres).
On n'a pas insister sur le fait de prendre les restrictions des courbes γ_1 et γ_2 à des sous-intervalles de I_{γ_1} et I_{γ_2} respectivement, pour pouvoir composer avec φ (ceci est toujours possible grâce à la continuité de γ_1 et γ_2), donc en réalité il faut identifier une courbe avec sa restriction et ceci grâce à la notion de germes (voir l'approche algébrique).
Montrons que $(T_a M)_g$ est un espace vectoriel

Théorème 2.2.1.
$(T_a M)_g$ est en bijection avec B. Par transport de structures, $(T_a M)_g$ est un espace de Banach isomorphe à B. En particulier si M est de dimension finie alors $(T_a M)_g$ est un espace vectoriel de même dimension que M.

Démonstration.

$$\text{L'application } \begin{array}{rccc} \theta_\varphi : & (T_a M)_g & \to & B \\ & \overline{\gamma} & \mapsto & (\varphi \circ \gamma)'(0) \end{array} \text{ est bien définie et bijective}$$

le seule point qui n'est pas immédiat est la surjectivité. Soit $v \in B$ et considérons $\Gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(a) + tv)$ il est clair maintenant que $\Gamma \in \mathscr{C}(M,a)$ et $(\varphi \circ \Gamma)'(0) = v$.
Par transport de structures $(T_a M)_g$ est un espace vectoriel normé

$$\begin{cases} \overline{\gamma}_1 + \overline{\gamma}_2 = \theta_\varphi^{-1}(\theta_\varphi(\overline{\gamma}_1) + \theta_\varphi(\overline{\gamma}_2)) \\ \lambda\overline{\gamma} = \theta_\varphi^{-1}(\lambda\theta_\varphi(\overline{\gamma})) \\ \|\overline{\gamma}\| = \|\theta_\varphi(\overline{\gamma})\| \end{cases}$$

θ_φ est un isomorphisme isométrique, car $\|\theta_\varphi\| = \sup_{\|\overline{\gamma}\| \le 1} \|\theta_\varphi(\overline{\gamma})\| = \sup_{\|\overline{\gamma}\| \le 1} \|\overline{\gamma}\| = 1 = \|\theta_\varphi^{-1}\|$. Donc $(T_a M)_g$ est un Banach. Reste à montrer que la structure de $(T_a M)_g$ ne dépend pas de la carte (U,φ) choisie (chose qui n'est pas immédiate vu que l'isomorphisme θ_φ dépend de φ). Si (V,ϕ) est une autre carte en

a alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} (T_a M)_g \arrow[r, "\theta_\varphi"] \arrow[d, "\theta_\phi^{-1}\circ\theta_\varphi"'] & B \\ (T_a M)_g \arrow[ur, "\theta_\phi"'] & \end{tikzcd}$$

et la structure vectoriel de $(T_a M)_g$ est unique, à un isomorphisme près. □

Définition des "physiciens"
Soit M une variété différentielle modelée sur un Banach B et considérons l'ensemble des triplets $E = \{(U,\varphi,u),\ (U,\varphi) \text{ carte en } a \text{ et } u \in B\}$ On définit sur E la relation suivante :

$$(U,\varphi,u) \sim (V,\phi,v)) \Leftrightarrow v = D_{\varphi(a)}(\phi \circ \varphi^{-1})(u)$$

On montre aisément que c'est une relation d'équivalence sur E et l'espace quotient sera noté $(T_a M)_p$ (p pour faire référence à l'approche des physiciens). Montrons que $(T_a M)_p$ est isomorphe à $(T_a M)_g$. Il suffit de montrer que $(T_a M)_p$ est isomorphe à B. Soit (U,φ) une carte en a et considérons l'application $\tau_\varphi : \overline{(U,\varphi,u)} \mapsto u$ de $(T_a M)_p$ dans B, sa surjectivité est évidente, montrons son injectivité et le reste sera identique, à des notations près, au théorème précédent. $\overline{(U,\varphi,u)} = \overline{(U,\varphi,v)} \Leftrightarrow v = D_{\varphi(a)}(\varphi \circ \varphi^{-1})(u) = D_{\varphi(a)} \operatorname{Id}_{\varphi(U)}(u) = u$ ce qui suffit pour avoir un isomorphisme entre $(T_a M)_p$ et B (à condition de procéder comme dans le théorème précédent) donc aussi un isomorphisme entre $(T_a M)_p$ et $(T_a M)_g$.

Définition des "algébristes"
Pour les variétés $\mathscr{C}^\infty$ de dimension finie on a une description purement algébrique de l'espace tangent en un point. Avant de décrire cette approche donnons quelques définitions
Germes Soient M et N deux variétés de classe $\mathscr{C}^k$ et $a \in M$. On considère toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ $f : U_f \to N$ où U_f est un voisinage ouvert de a dans M et on pose $f \sim g$ s'il existe $V \subset U_f \cap U_g$ voisinage ouvert de a dans M tel que $f_{|V} = g_{|V}$. C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble de ces fonctions. La classe d'équivalence d'une fonction f est dite *germe* de f en a et est notée $[f]$ ou $\operatorname{Germ}_a f$.

L'ensemble des germes est noté $\mathscr{C}_a^k(M,N)$. Si $N = \mathbb{R}$ on peut additionner et multiplier les germes et on obtient ainsi l'algèbre réelle commutative

$\mathscr{C}_a^k(M,\mathbb{R})$, notée $\mathscr{C}_a^k(M)$.

$$\begin{cases} \operatorname{Germ}_a f + \operatorname{Germ}_a g = \operatorname{Germ}_a(f+g) \\ \lambda \cdot \operatorname{Germ}_a f = \operatorname{Germ}_a(\lambda \cdot f) \\ \operatorname{Germ}_a f \times \operatorname{Germ}_a g = \operatorname{Germ}_a(f \times g) \end{cases}$$

Dérivations On appelle dérivation sur $\mathscr{C}_a^k(M)$ toute forme linéaire $X : \mathscr{C}_a^k(M) \to \mathbb{R}$ qui vérifie l'*égalité de Leibniz* : $X([f] \times [g]) = g(a)X([f]) + f(a)X([g])$
On notera l'ensemble des dérivations par $\mathcal{D}_a^k(M)$ et par $\mathcal{D}_a(M)$ lorsque $k = \infty$. Montrons que si M est de dimension finie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ alors $(T_aM)_g \simeq \mathcal{D}_a(M)$.

Théorème 2.2.2.
L'application suivante

$$\begin{array}{rccl} \phi : & (T_aM)_g & \longrightarrow & \mathcal{D}_a(M) \\ & \overline{\gamma} & \longmapsto & \phi(\overline{\gamma}) \quad : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ {[f]} & \longmapsto & \phi(\overline{\gamma})([f]) = (f \circ \gamma)'(0) \end{array} \end{array}$$

établit un isomorphisme entre $(T_aM)_g$ et $\mathcal{D}_a(M)$

Démonstration. Montrons d'abord deux lemmes :
Lemme 2.1. *Si X est une dérivation alors $\forall f \equiv c^{te}$, $X([f]) = 0$*

Démonstration. $X([1]) = X([1] \cdot [1]) = X([1]) + X([1])$ donc $X([1]) = 0$ par suite
$\forall c \in \mathbb{R}$, $X([c]) = X(c[1]) = cX([1]) = 0$. □

Lemme 2.2. *Si $g \in \mathscr{C}^k(U)$, $(k \geq 1)$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si $[a,x] \subset U$ alors $g(x) = g(a) + \sum_{j=1}^n x_j g_j(x)$ où les $\{g_j\}_{1 \leq j \leq n}$ sont de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ sur un voisinage de $[a,x]$*

Démonstration.

$$g(x) = g(a) + \int_0^1 \frac{dg(tx + (1-t)a)}{dt} dt = g(a) + \int_0^1 \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial g}{\partial x_j}(tx + (1-t)a) dt$$

donc $g(x) = g(a) + \sum_{j=1}^n x_j g_j(x)$ avec $g_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_j}(tx + (1-t)a) dt$, on peut différencier sous le signe intégrale et les $\{g_j\}_{1 \leq j \leq n}$ sont de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ sur un voisinage de $[a,x]$. □

Montrons maintenant le théorème. L'application ϕ est bien définie, en effet
$\overline{\gamma_1} = \overline{\gamma_2} \Leftrightarrow \exists (U,\varphi)$ carte en a, tel que $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$ on a donc

$$\begin{aligned}
(f \circ \gamma_1)'(0) &= D_0(f \circ \gamma_1)(1) \\
&= D_0(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_1)(1) \\
&= D_{\varphi(a)} f \circ \varphi^{-1}((\varphi \circ \gamma_1)'(0)) \\
&= D_{\varphi(a)} f \circ \varphi^{-1}((\varphi \circ \gamma_2)'(0)) \\
&= D_0(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_2)(1) \\
&= D_0(f \circ \gamma_2)(1) \\
&= (f \circ \gamma_2)'(0)
\end{aligned}$$

d'autre part $\phi(\overline{\gamma})$ est une dérivation car elle est linéaire et vérifie l'égalité de Leibniz $((f \times g) \circ \gamma)'(0) = ((f \circ \gamma) \times (g \circ \gamma))'(0) = (f \circ \gamma)(0) \times (g \circ \gamma)'(0) + (g \circ \gamma)(0) \times (f \circ \gamma)'(0)$. ϕ et injective car si $(f \circ \gamma_1)^{'}(0) = (f \circ \gamma_2)^{'}(0), \quad \forall [f] \in \mathscr{C}^\infty(\mathsf{M})$ et si $(U,\varphi = (\varphi^1,...,\varphi^n))$ est une carte en a alors $(\varphi^i \circ \gamma_1)^{'}(0) = (\varphi^i \circ \gamma_2)^{'}(0,) \quad \forall i = 1,...,n$

$$\text{i.e} \quad (\varphi \circ \gamma_1)^{'}(0) = (\varphi \circ \gamma_2)^{'}(0) \quad \text{et} \quad \overline{\gamma_1} = \overline{\gamma_2}$$

Montrons que ϕ est surjective. Si X est une dérivation alors

$$\begin{aligned}
X([f]) &= X([f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi]) \\
&= X([g \circ \varphi]) \\
&= X\left(\left[g \circ \varphi(a) + \sum_{i=1}^{n} (\varphi^i - \varphi^i(a)) \frac{\partial g}{\partial x_i} \circ \varphi\right]\right) \\
&= X([f(a)]) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(a)) \times X([\varphi^i]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(a)) \times X([\varphi^i])
\end{aligned}$$

d'autre part si : $\gamma(t) = \varphi^{-1}\big[\varphi(a) + t(X([\varphi^1]),...,X([\varphi^n]))\big]$ alors $\gamma \in \mathsf{T}_a\mathsf{M}$ et

$$\begin{aligned}
\phi(\overline{\gamma})([f]) = (f \circ \gamma)'(0) &= D_0(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)(1) \\
&= D_{\varphi(a)}(f \circ \varphi^{-1})((\varphi \circ \gamma)'(0)) \\
&= D_{\varphi(a)}(f \circ \varphi^{-1})((X([\varphi^1]),...,X([\varphi^n]))) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(a)) \times X([\varphi^i]) \\
&= X([f])
\end{aligned}$$

d'où la surjectivité de ϕ et le théorème en découle. $\square$

2.2.2 Application linéaire tangente

Définition 2.8 (Fibré tangent). *Soit* $(M,\mathcal{A})$ *une variété de classe* $\mathscr{C}^k$, $k \geq 1$ *modelée sur un Banach* B. *On définit l'ensemble* $TM = \dot{\bigcup\limits_{a \in M}} T_aM$ *(réunion disjointe de tout les espaces tangents à* M*). Soient* $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$ *et l'application "pied"*

$$\begin{array}{rccc} \pi : & TM & \to & M \\ & T_xM & \mapsto & x \end{array}$$

Comme $\pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup\limits_{a \in U}} T_aM = TU$ *(car* $T_aU \simeq T_aM$, $\forall a \in U$*) alors*

$$\begin{array}{rccc} T\varphi : & \pi^{-1}(U) = TU & \to & \varphi(U) \times B \\ & [\gamma] \in T_xU & \mapsto & ((\varphi \circ \gamma)(0),(\varphi \circ \gamma)'(0)) \end{array}$$

est bien définie et on vérifie que $T\mathcal{A} = \{(TU,T\varphi),\ (U,\varphi) \in \mathcal{A}\}$ *est un atlas qui fait de* TM *une variété de classe* $\mathscr{C}^{k-1}$. *En effet* $TM = \bigcup\limits_{U \text{ domaine de carte de } M} TU$ *et les fonctions de transition sont déduites du diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd} TU_i \cap TU_j \arrow[r, "T\varphi_i"] \arrow[d, "T\varphi_j"'] & \varphi_i(U_i \cap U_j) \times B \arrow[dl, "T\varphi_j \circ T\varphi_i^{-1}"] \\ \varphi_j(U_i \cap U_j) \times B & \end{tikzcd}$$

i.e $(\varphi_j(x),(\varphi_j \circ \gamma)'(0)) = T\varphi_j \circ T\varphi_i^{-1}\big(\varphi_j(x),(\varphi_i \circ \gamma)'(0)\big)$ *implique que*

$$T\varphi_j \circ T\varphi_i^{-1} = (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) \times (D_{\varphi_i(\cdot)}\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})$$

et les fonctions de transition sont de classe $\mathscr{C}^{k-1}$.

Définition 2.9. *Si* $f : M \to N$ *est une application différentiable en* $a \in M$, *son* application linéaire tangente $Tf : TM \to TN$ *est définie par*

$$\begin{array}{rccc} T_af & : & (T_aM)_g & \to & (T_{f(a)}N)_g \\ & & [\gamma] & \mapsto & [f \circ \gamma] \end{array}$$

cette application est linéaire, de plus si (U,φ) *est une carte en* a *et* (V,ϕ) *une carte en* $f(a)$ *telles que* $f(U) \subset V$ *alors l'expression de* T_af *sur les cartes est donné par*

$$\boldsymbol{T_af = \theta_\phi^{-1} \circ (D_{\varphi(a)}\phi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \theta_\varphi}$$

Comme le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
(T_aM)_g \arrow[r, "T_af"] \arrow[d, "\theta_\varphi"'] & (T_{f(a)}N)_g \arrow[d, "\theta_\phi"] \\
B \arrow[r, "\theta_\phi \circ T_af \circ \theta_\varphi^{-1}"'] & F
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & N \arrow[d, "\phi"] \\
\mathbb{R}^k \arrow[r] & \mathbb{R}^r
\end{tikzcd}$$

$\phi \circ f \circ \varphi^{-1}$

$\theta_\phi(\gamma) = (\phi \circ \gamma)'(0)$

et $T_af([\gamma]) = [f \circ \gamma]$ donc si on pose $\psi = \theta_\phi \circ T_af \circ \theta_\varphi^{-1}$ alors

$$\begin{aligned}
\psi((\varphi \circ \gamma)'(0)) &= (\phi \circ f \circ \gamma)'(0) \\
&= (\phi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)'(0) \\
&= D_0((\phi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma))(1) \\
&= D_{(\varphi\circ\gamma)(0)}(\phi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (D_0(\varphi \circ \gamma)(1)) \\
&= D_{\varphi(a)}(\phi \circ f \circ \varphi^{-1})((\varphi \circ \gamma)'(0))
\end{aligned}$$

donc $\psi = D_{\varphi(a)}(\phi \circ f \circ \varphi^{-1})$ par suite $T_af = \theta_\phi^{-1} \circ (D_{\varphi(a)}\phi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \theta_\varphi$ (il est claire maintenant que T_af est linéaire). On aurais pus utiliser la deuxième définition de l'espace tangent pour aboutir rapidement au même résultat.

Définition 2.10 (submersion). *Un morphisme $f : M \to N$ entre deux variétés différentielles est une submersion en un point $a \in M$ si :*

$$\begin{cases} \text{i)} & T_af \text{ est surjective,} \\ \text{ii)} & \ker T_af \text{ admet un supplémentaire topologique dans } T_aM. \end{cases}$$

$A = \{x \in M,\ f$ est une submersion en $x\}$ est un ouvert de M, lorsque $A = M$ on dit que f est submersion sur M.

Exercice 2.9. *Montrer qu'un morphisme $f \in \mathscr{C}^k(M,N)$ entre deux variétés différentielles est une submersion en $a \in M$ si et seulement s'il existe un voisinage ouvert V de $f(a)$, un morphisme $s \in \mathscr{C}^k(N,M)$ tels que $s(f(a)) = a$ et $f \circ s = \mathrm{Id}_V$ (s est dite* section *locale de f au voisinage de a.)*

Exemples.

1. *Si M et N sont deux variétés différentielles alors les deux projections $M \times N \to M$ et $M \times N \to N$ sont des submersions.*
2.

Théorème 2.2.3.
La composée de submersions et le passage au quotient donnent les propriétés importantes suivantes :

1. *Si $f : M \to N$ est une submersion en $a \in M$ et $g : N \to X$ une submersion en $f(a) \in N$ alors $g \circ f$ est une submersion en a.*

2. *Si $g \circ f$ est une submersion sur M et f surjective alors g est une submersion sur N.*
3. *Si $f : M \to N$ est une submersion en a et $g : M_1 \to N_1$ une submersion en b alors $f \times g$ est une submersion en (a,b).*
4. *Si f est une submersion sur M alors f est une application ouverte.*
5. *Si f est une submersion sur M, alors la relation d'équivalence induite $\mathcal{R}$: $x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ est ouverte. f définit par passage au quotient un homéomorphisme $\overline{f}$ de $M/\mathcal{R}$ sur $f(M)$*

Définition 2.11 (immersion). *Un morphisme $f : M \to N$ entre deux variétés différentielles est une immersion en un point $a \in M$ si :*

$$\begin{cases} \text{i)} & T_a f \text{ est injective,} \\ \text{ii)} & \operatorname{Im} T_a f \text{ est fermée et admet un supplémentaire topologique dans } T_{f(a)}N. \end{cases}$$

$A = \{x \in M,\ f$ est une immersion en $x\}$ est un ouvert de M, lorsque $A = M$ on dit que f est immersion sur M.

Exemples.

1. *L'injection canonique $i : U \to M$ d'un ouvert U d'une variété différentielle M est une immersion.*
2.

Exercice 2.10. *Montrer qu'un morphisme $f \in \mathscr{C}^k(M,N)$ entre deux variétés différentielles est une immersion en $a \in M$ si et seulement s'il existe un voisinage ouvert U de a, un voisinage ouvert V de $f(a)$, un morphisme $r \in \mathscr{C}^k(V,U)$ tels que $f(U) \subset V$ et $r \circ f = \mathrm{Id}_U$ (r est dite* rétraction *locale de f au voisinage de a.) et $f : U \to f(U)$ est un homéomorphisme pour $f(U)$ muni de la topologie induite de N.*

Théorème 2.2.4.
Les propriétés d'immersions, les plus importantes, sont données par :

1. *Si $f : M \to N$ est une immersion en $a \in M$ et $g : N \to X$ une immersion en $f(a) \in N$ alors $g \circ f$ est une immersion en a.*
2. *Si $g \circ f$ est une immersion en $a \in M$ alors f est une immersion a.*
3. *Si $f : M \to N$ est une immersion en a et $g : M_1 \to N_1$ une immersion en b alors $f \times g$ est une immersion en (a,b).*
4. *Si f est une immersion sur M alors f est une application localement injective.*

Définition 2.12 (plongement). *Un morphisme $f : M \to N$ entre deux variétés différentielles est un plongement si :*

$$\begin{cases} \text{i)} & f \text{ est une immersion sur } M, \\ \text{ii)} & f : M \to f(M) \text{ un homéomorphisme, } f(M) \text{ muni de la topologie induite de } N. \end{cases}$$

Définition 2.13 (subimmersion).

2.2.3 Sous-variétés

Définition 2.14. *Soit M une variété de classe $\mathscr{C}^k$, $(k \geq 0)$ modelée sur un Banach B. et soit E un sous espace de B admettant un supplémentaire topologique i.e $\exists F$ sous espace de B tel que $B = E \oplus F$. Un sous ensemble Σ de M est dit* sous-variété *de M modelée sur E si : $\forall x \in \Sigma$, $\exists (U,\varphi)$ carte en x tels que $\varphi(U) = V \oplus W$ et $\varphi(U \cap \Sigma) = V \oplus \{0\}$.*
V et W étant des ouverts de E et F respectivement.

Il résulte de cette définition que tout ouvert U de M est une sous variété (il suffit de prendre $F = \{0\}$). Réciproquement si Σ est une sous-variété de M modelée sur B, le même espace de Banach model de M, alors Σ est nécessairement un ouvert de M.

Théorème 2.2.5.
Les sous-variétés sont localement fermées.

Démonstration. Rappelons qu'une partie A d'un espace topologique X est dite *localement fermée* si A est ouvert dans son adhérence ou d'une manière équivalente si tout point de A possède un voisinage V de sorte que A soit fermé dans V. En effet si A est ouvert dans $\overline{A}$ i.e $\exists \theta$ ouvert de X tel que $A = \theta \cap \overline{A}$ alors $\forall x \in A$, $\theta \in \mathcal{V}_{(x)}$ et $\overline{A} \cap \theta$ est fermé dans θ. Réciproquement si $\forall a \in A$, $\exists U_a \in \mathcal{V}_{(a)}$ tel que $U_a \cap A$ soit fermé dans U_a alors $U_a \cap A = \overline{U_a \cap A}^{U_a} = U_a \cup \overline{A}$ par suite $A \subset \bigcup_{a \in A}(U_a \cap A) \subset A$ donc $A = \theta \cap \overline{A}$ où $\theta = \bigcup_{a \in \Sigma} U_a$ et A est ouverte dans $\overline{A}$. Σ est une sous variété de classe $\mathscr{C}^r$ d'une variété M de classe $\mathscr{C}^k$, $(r \leq k)$ si et seulement si $\forall x \in \Sigma$, $\exists (U,\varphi)$ carte en x tels que $\varphi(U) = V \oplus W$ et $\varphi(U \cap \Sigma) = V \oplus \{0\}$ or $V \oplus \{0\}$ est fermé dans $V \oplus W$ donc $U \cap \Sigma$ est fermé dans U (φ étant un homéomorphisme), et Σ est localement fermée. $\square$

Théorème 2.2.6.
Une sous-variété Σ d'une variété différentielle M est, elle aussi, une variété différentielle.

Démonstration.
Si $\mathcal{A} = \{(U_i,\varphi_i), i \in I\}$ est un $\mathscr{C}^k$ atlas sur M alors $\mathcal{B} = \{(U_i \cap \Sigma, \varphi_i|_{U_i \cap \Sigma}), i \in I\}$ est un $\mathscr{C}^k$ atlas sur Σ. En effet, $\forall i \in I$, $\varphi_i(U_i) = V_i \oplus W_i$, V_i et W_i étant des ouverts de E et F respectivement, et $\varphi_i(U_i \cap \Sigma) = V_i \oplus \{0\}$ alors φ_i induit un homéomorphisme $\alpha_i : U_i \cap \Sigma \to V_i$ donc si $U_i \cap U_j \cap \Sigma \neq \varnothing$ alors $\alpha_i \circ \alpha_j^{-1} : V_j \to V_i$ se factorise comme

$$V_j \xrightarrow{i} V_j \oplus W_j \xrightarrow{\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}} V_i \oplus W_i \xrightarrow{\pi} V_i$$

où l'injection i est une immersion $\mathscr{C}^\infty$, $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme et π est une submersion $\mathscr{C}^\infty$. Il en résulte que $\alpha_i \circ \alpha_j^{-1}$ et $(\varphi_i|_{U_i \cap \Sigma}) \circ (\varphi_j|_{U_i \cap \Sigma})^{-1}$ sont de classe $\mathscr{C}^k$. □

Théorème 2.2.7.
Soient M et N deux variétés différentielles, f un morphisme de M dans N :

1. *Si f est une submersion sur M et si Σ est une sous-variété de N alors $f^{-1}(\Sigma)$ est une sous-variété de $_M$.*
2. *Si f est un plongement et si Σ est une sous-variété de M alors $f(\Sigma)$ est une sous-variété de N et $f|_\Sigma$ est un isomorphisme de Σ sur $f(\Sigma)$.*

2.3 Partition de l'unité

La partition de l'unité est un outil essentiel pour étudier des propriétés et des objets de nature "globale" d'une variété partant des informations locales sur les cartes. Cet outil permet notamment : la construction d'une métrique riemannienne, d'une connexion (isomorphisme entre espaces tangents), de l'intégrale d'une forme différentielle (théorème de Stokes), la démonstration des théorèmes d'immersions de Whitney...
On verra dans la prochaine section (Compléments) des conditions nécessaires et suffisantes de l'existence d'une partition de l'unité de classe $\mathscr{C}^k$ sur une variété $\mathscr{C}^k$ de dimension finie. Notons que le principe du prolongement analytique empêche l'existence de partitions de l'unité pour le cas des variétés analytiques réel (ou les variétés complexes). Pour les définitions on se reportera à l'annexe.

Définition 2.15 (paracompacité).
Un espace topologique X est dit paracompact *si tout recouvrement ouvert de X admet un raffinement ouvert localement fini.*

Définition 2.16 (partition de l'unité).
Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de X. Une famille $\{g_i\}_{i\in I}$ de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$ est une partition de l'unité *subordonnée à $\mathcal{U}$ si elle vérifie les propriétés suivantes*

1. $g_i(x) \geq 0$ *pour tout* $i \in I$ *et tout* $x \in X$
2. $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$ *Pour tout* $i \in I$
3. $\sum_{i\in I} g_i(x) = 1$ *pour tout* $x \in X$.

Les résultats suivants sont très utiles, voir les démonstrations dans L. Schwartz [9].

Théorème 2.3.1.
Pour qu'un espace topologique séparé X soit paracompact, il faut et il suffit

que tout recouvrement ouvert de X admet une partition de l'unité qui lui est subordonnée.

Théorème 2.3.2.

1. *Un espace paracompact est* normal *i.e deux fermés disjoints ont deux voisinages disjoints.*
2. *(Tietze-Urysohn) Si A et B sont deux fermés disjoints d'un espace normal X , il existe une fonction continue f sur X, à valeur dans $[0,1]$, égale à 0 sur A et à 1 sur B.*

Une variété de classe $\mathscr{C}^k$ modelée sur un Banach n'admet pas toujours une partition $\mathscr{C}^k$ de l'unité, cependant on a le théorème suivant :

Théorème 2.3.3.
Si M est une variété paracompacte modelée sur un Banach B vérifiant la propriété de Tietze-Urysohn de classe $\mathscr{C}^k$, i.e

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \text{Pour tout } X \text{ et } Y \text{ fermés disjoints de } B, \text{ il existe } f \in \mathscr{C}^k(B), \\ f(x) = 0 \text{ pour } x \in X,\ f(x) = 1 \text{ pour } x \in Y \text{ et } 0 \leq f(x) \leq 1\ \forall x \in B \end{cases}$$

Alors M admet des partitions de l'unité de classe $\mathscr{C}^k$.

Corollaire 4. *Tout espace de Hilbert séparable H possède la propriété $(\mathcal{P})$, En particulier tout espace de dimension finie possède cette propriété.*

2.4 Compléments

Remarques.

1. *Toute variété de classe $\mathscr{C}^1$ est $\mathscr{C}^1$ difféomorphe à une variété $\mathscr{C}^\infty$, bien plus, si M est de classe $\mathscr{C}^1$ alors $\exists \widetilde{M}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $\varphi : M \to \widetilde{M}$ un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme tels que si $\widetilde{M}_1$ est $\mathscr{C}^1$ difféomorphe à M alors $\widetilde{M}$ est $\mathscr{C}^\infty$ difféomorphe à $\widetilde{M}_1$. En d'autres termes, tout $\mathscr{C}^1$ atlas maximal contient un $\mathscr{C}^\infty$ atlas.*
2. *Il existe des variétés topologiques qui n'admettent aucune structure différentielle (par exemple des variétés de dimension 4). Voir Kervaire, Smale, Milnor, Novikov, Quinn, Freedman.*
3. *Il existe des variétés topologiques qui admettent plusieurs structures différentielles non difféomorphes.*

Théorème 2.4.1.
Soit M une variété séparée, de classe $\mathscr{C}^\infty$ et de dimension finie. Il y a équivalence entres :

1. *M est paracompact.*
2. *M est métrisable.*

3. *M admet une métrique Riemannienne.*
4. *Chaque composante de M est séparable.*

Démonstration. □

Théorème 2.4.2.
Soit M une variété séparée, connexe, de classe $\mathscr{C}^\infty$ et de dimension finie. Il y a équivalence entres :

1. *M est paracompact.*
2. *Il existe une partition $\mathscr{C}^\infty$ de l'unité subordonnée à tout recouvrement ouvert de M.*
3. *M est métrisable.*
4. *M admet une métrique Riemannienne.*
5. *M est $\sigma-$compact.*
6. *M est dénombrable à l'infini.*
7. *M admet un atlas dénombrable.*
8. *M admet une base dénombrable d'ouverts ($2^{\text{ième}}$ axiome de dénombrabilité).*
9. *M est séparable.*

Démonstration. □

Problèmes

Exercice 2.11.

1. *Montrer que* $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 0\}$ *n'est pas une variété topologique.*
2. *En est-il de même pour* $S = \{(x,0),\ x \geq 0\} \cup \{(0,y),\ y \geq 0\}$ *?*

Exercice 2.12.
On définit sur l'intervalle $[0,1]$ *la relation suivante :* $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = x$ *ou* $|y-x| = 1$

1. *Montrer que* $\mathcal{R}$ *est une* **relation d'équivalence** *sur* $[0,1]$.
2. *Trouver un* **homéomorphisme** *entre l'espace quotient* $[0,1]/\mathcal{R}$ *et la sphère* S^1.
3. *Déduire que* $[0,1]/\mathcal{R}$ *est une* **variété** $\mathscr{C}^\infty$, *de dimension* 1, *compacte et connexe.*

Exercice 2.13. *Soit* M *une variété différentielle de* dimension finie, *séparée et connexe.*
Soit $f \in \mathscr{C}^1(M,M)$ *telle que* $f \circ f = f$. *On note* $\Sigma = f(M)$.

1. *Montrer que* $\Sigma = \{x \in M,\ f(x) = x\}$.
2. *Montrer que* $T_af \circ T_af = T_af\ \forall a \in \Sigma$. *Déduire que*
$$\operatorname{Im} T_af = \{u \in T_aM,\ T_af(u) = u\} = \ker(\mathrm{Id}_{T_aM} - T_af).$$
3. *Montrer que* $\dim M = \operatorname{rang} T_af + \operatorname{rang}(\mathrm{Id}_{T_aM} - T_af)$ *déduire que* $\operatorname{rang} T_af$ est constant $\forall a \in \Sigma$ *(utiliser le fait que* $a \mapsto \operatorname{rang} T_af$ *est semi-continue inférieurement et que* M *est connexe). On note* $p = \operatorname{rang} T_af$.
4. *Montrer qu'il existe un voisinage* U *de* Σ *dans lequel le rang de* f *est constant, i.e* $\operatorname{rang} T_xf = p\ \forall x \in U$ $(T_xf = T_{f(x)}f \circ T_xf\ \forall x \in M)$. *Déduire à l'aide du* théorème du rang constant *que* Σ *est une* sous-variété *connexe et fermée dans* M, *de classe* $\mathscr{C}^1$ *et de dimension* p.

Exercice 2.14 (Variétés de Stieffel).
Soit le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tMM = \mathrm{Id}\}$ *et soit l'application :*

$$f:\ \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{O}_{n-k}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & f(M) \end{array} \quad \text{obtenue de } M \text{ en supprimant les } k \text{ premières lignes et colonnes}$$

1. *Montrer que* f *est une submersion.*

2. *Déduire que* $\mathcal{OS}t(k,n) = \{(u_1,...,u_k) \in \mathbb{R}^{kn},\ < u_i,u_j >= \delta^i_j\}$ *sont des sous-variétés compactes de* $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ *dites Variétés de Stieffel.*

Exercice 2.15 (Tore à m trous).
Soit $f(x) = x(x-1)^2...(x-m)^2$ *et soit* $r > 0$ *suffisamment petit, montrer que*

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (y^2 + f(x))^2 + z^2 = r^2\}$$

décrit une surface à m *trous.*

Exercice 2.16 (Ruban de Möbius). *On considère l'application :*

$$\begin{array}{rccc} f: &]-1,1[\times]0,2\pi[& \to & \mathbb{R}^3 \\ & (r,\theta) & \mapsto & \Big(\cos\theta(R + r\cos(\theta/2)), \sin\theta(R + r\cos(\theta/2)), r\sin(\theta/2)\Big) \end{array}$$

1. f *est-elle un plongement ?*
2. *Décrire l'ensemble* $f(]-1,1[\times[0,2\pi[)$

Exercice 2.17. *Soient* $f: M \to N$ *un morphisme de classe* $\mathscr{C}^k$, $k \geq 1$ *entre deux variétés différentielles et* Σ *une sous-variété de* M

1. *Montrer que* $f|_\Sigma$, *la restriction de* f *à* Σ, *est de classe* $\mathscr{C}^k$.
2. *Si* $g : \Sigma \to N$ *est un morphisme de classe* $\mathscr{C}^k$, *montrer qu'il existe* $\widetilde{g} \in \mathscr{C}^k(M,N)$ *qui soit un prolongement de* g *i.e* $\widetilde{g}|_\Sigma = g$.

Exercice 2.18 (sous-variété immergée qui n'est pas plongée).

1. *Montrer que* $g : t \mapsto (\cos t, \sin t, \cos\sqrt{2}t, \sin\sqrt{2}t)$ *est une immersion de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^4$.
2. *Montrer que* $g(\mathbb{R})$ *n'est pas une sous-variété et* $\overline{g(\mathbb{R})} = \mathrm{T}^2$ *(le Tore à 2 dimension).*

Exercice 2.19 (Variété quotient).
Soit $\mathrm{Diff}(M)$ *le groupe des difféomorphismes d'une variété* M *de dimension* n *et de classe* $\mathscr{C}^\infty$. *Soit* Γ *un sous-groupe de* $\mathrm{Diff}(M)$ *et la relation suivante sur* M *:*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists g \in \Gamma,\ y = g(x)$$

1. *Montrer que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence sur* M.
2. *On muni* M/Γ, *l'espace quotient, de la topologie quotient. Montrer que la projection canonique* π *est continue et ouverte.*
   Dans toute la suite, on fait l'hypothèse :

$$\forall x \in M,\ \exists (U_x,\varphi_x) \text{ carte en } x, \quad \text{tel que} \quad g \neq \mathrm{Id}_M \Rightarrow g(U) \cap U = \varnothing \tag{2.1}$$

3. *Montrer que si* M *est séparée et si* Γ *est un groupe fini tel que* $g \neq \mathrm{Id}_M \Rightarrow g(x) \neq x$ *alors l'hypothèse* (2.1) *est satisfaite.*
4. *Montrer que les applications* $\pi_x : U_x \to \pi(U_x)$ *sont des homéomorphismes.*
5. *Montrer que pour tout point* $\xi \in \pi(U_x) \cap \pi(U_y)$ *il existe un voisinage* W *de* $\pi_x^{-1}(\xi)$ *contenu dans* U_x *et un élément* $g \in \Gamma$ *tel que :* $\pi_y^{-1} \circ \pi_x = g$ *sur* W.
6. *Déduire une structure de variété de dimension* n *et classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* M/Γ *pour laquelle* π *est une submersion.*

Chapitre 3

Généralités sur les fibrés

3.1 Fibré localement trivial

Définition 3.1. *Une* fibration *de classe* $\mathscr{C}^k$ *est la donnée d'un triplet* (M,π,B) *que l'on note souvent par* $\pi : M \to B$ *où*

- M *et* B *sont des variétés différentielles de classe* $\mathscr{C}^k$ *appelées, respectivement, l'*espace total *et la* base*.*
- $\pi : M \to B$ *est de classe* $\mathscr{C}^k$*, appelée* projection *canonique, tel que la condition suivante (dite de* ***trivialité locale****) soit satisfaite :*

(T.L) *: Pour tout* $x \in B$*, il existe un voisinage* U *de* x*, une variété* F *de classe* $\mathscr{C}^k$ *et un* $\mathscr{C}^k$*-difféomorphisme* $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ *tel que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

i.e $\pi \circ \phi^{-1}(x,y) = x, \quad \forall (x,y) \in U \times F$*, où* π_1 *désigne la projection de* $U \times F$ *sur* U*.*

Il résulte de cette définition que :

1. $M_x = \pi^{-1}(x)$, appelée la *fibre au-dessus du point* x de B est une sous-variété de M. En effet la projection canonique π est une submersion car $\pi = \pi_1 \circ \phi$ (composé d'une submersion et d'un difféomorphisme).
2. $\phi(x) = \phi|_{M_x}$ induit un difféomorphisme de M_x sur F
3. $\forall x,x' \in U$, M_x est difféomorphe à $M_{x'}$.

Exemples.

1. *Si* $M = B \times F$ *(variété produit) et* $\pi : M = B \times F \to B$ *est la première*

projection, $(\mathsf{M},\pi,\mathsf{B})$ *est appelé* ***fibré trivial****. Le cylindre* $\mathrm{S}^1 \times [0,1]$ *en est un exemple.*

2. *Si* $\eta = (\mathsf{M},\pi,\mathsf{B})$ *et* $\eta_1 = (\mathsf{M}_1,\pi_1,\mathsf{B}_1)$ *sont deux fibrations alors la* fibration produit *de* η *et* η_1 *est* $\eta \times \eta_1 = (\mathsf{M} \times \mathsf{M}_1,\pi \times \pi_1,\mathsf{B} \times \mathsf{B}_1)$.
3. *Si* M *est l'espace quotient de* $\mathbb{R} \times [0,1]$ *par la relation d'équivalence qui identifie les points* (x,y) *et* $(x+1,1-y)$ *et si* $p : \overline{(x,y)} \mapsto e^{2i\pi x}$ *de* M *dans* S^1 *alors* $(\mathsf{M},p,\mathrm{S}^1)$ *est une fibration qui n'est pas triviale, en effet le* ruban de Möbius M *est une variété compacte à bord de dimension* 2 *et son bord est homéomorphe à* S^1*, qui est connexe, alors que le bord du cylindre possède deux composantes connexes.*

le triplet (U,ϕ) est appelé trivialisation locale du fibré, deux tels trivialisations (U_i,ϕ_i) et (U_j,ϕ_j) engendrent les applications $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ appelées fonctions de transition et sont de la forme :

$$\begin{array}{rccc} \phi_{ij}: & (U_i \cap U_j) \times \mathsf{F}_j & \to & (U_i \cap U_j) \times \mathsf{F}_i \\ & (x,y) & \mapsto & (x,\phi_{ij}(x)(y)) \end{array}$$

où les $\phi_{ij}(x)$ sont des difféomorphismes de classe $\mathscr{C}^k$ de F_j dans F_i.
Les fonctions de transition satisfont les propriétés suivantes :

- $\phi_{ii}(x) = \mathrm{Id}_{\mathsf{F}_i}\,, \quad \forall x \in U_i$
- $\phi_{ij}(x) \circ \phi_{ji}(x) = \mathrm{Id}_{\mathsf{F}_i}\,, \quad \forall x \in U_i \cap U_j$
- $\phi_{ij}(x) \circ \phi_{jk}(x) \circ \phi_{ki}(x) = \mathrm{Id}_{\mathsf{F}_i}\,, \quad \forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k$.

La famille $\{\phi_{ij}\}$ est appelée un *cocycle* associé à la trivialisation $\{U_i,\phi_i\}_{i\in I}$, et la dernière relation mentionnée est dite la relation de cocycle.
Si toutes les fibres sont difféomorphes à une même variété F, on dit que M est un *espace fibré de fibre type* F. C'est toujours le cas lorsque M est connexe, en effet l'ensemble

$$\mathscr{E}(\mathsf{F}) = \big\{x \in B,\, \exists (U,\varphi) \text{ carte en x : } \mathsf{M}_x \text{ est difféomorphe à } \mathsf{F}\big\}$$

est à la fois ouvert et fermé. Quitte à se restreindre aux composantes connexes de M, on peut supposer que toutes les fibres sont difféomorphes. Remarquer l'analogie avec la notion de variété pure.

On ne considère désormais que les espaces fibrés à fibres difféomorphes

Définition 3.2 (morphisme de fibrés). *Soient* $\lambda = (\mathsf{M},\pi,\mathsf{B})$ *et* $\lambda_1 = (\mathsf{M}_1,\pi_1,\mathsf{B}_1)$ *deux fibrations, on appel morphisme de* λ *dans* λ_1 *tout couple* (f,g) *où* $f : \mathsf{B} \to \mathsf{B}_1$ *et* $g : \mathsf{M} \to \mathsf{M}_1$ *sont deux morphismes tel que :* $\pi_1 \circ g = f \circ \pi$.

- *Si* $\mathsf{B} = \mathsf{B}_1$ *et* $f = \mathrm{Id}_{\mathsf{B}}$*,* g *est dite* B*-morphisme de* λ *dans* λ_1.

- *Un fibré* $\lambda = (M,\pi,B)$ *est* trivialisable *s'il est isomorphe à un fibré trivial.*

Exercice 3.1.
Montrer qu'à partir d'un revêtement d'une variété B *et d'une famille de fonctions de transition satisfaisant les relations ci-dessus on peut construire un fibré sur* B.

Définition 3.3 (Section de fibrés). *Une* section *de classe* $\mathscr{C}^k$ *d'un fibré* $\pi : M \to B$ *est une application* $s : B \to M$ *de classe* $\mathscr{C}^k$ *telle que* $\pi \circ s = \mathrm{Id}_B$.

3.2 Fibré vectoriel

Soit $\pi : M \to B$ une fibration de classe $\mathscr{C}^k$. On dit que (E,π,M) est un *fibré vectoriel* de classe $\mathscr{C}^k$, de fibre-type F (un espace vectoriel de dimension finie) et de groupe structural G si les fonctions de transition

$$\begin{array}{rccc} g_{ij}: & U_i \cap U_i & \to & G \text{ sous-groupe de } GL(F) \\ & x & \mapsto & g_{ij}(x) \end{array}$$

vérifient la convolution des 1-cocycles :

1. $g_{ij} \circ g_{jk} = g_{ik}, \quad \forall i,j,k \in I$
2. $g_{ii} = \mathrm{Id}\,, \quad \forall i \in I$

Cohomologie un 1-cocycle est un 1-cobord s'il existe une famille $g_i : U_i \to G$ telle que

$$g_{ij} = g_i \circ g_j^{-1} \quad \forall i,j \in I$$

On note par $\mathcal{Z}^1(B,G)$ l'ensemble des 1-cocycles et par $\mathcal{B}^1(B,G)$ l'ensemble des 1-cobords et on définie le *premier espace de Cohomologie*

$$\mathcal{H}^1(B,G) = \frac{\mathcal{Z}^1(B,G)}{\mathcal{B}^1(B,G)}$$

$\mathscr{E} = \{$fibrés de base B, de rang n, de groupe structural $G \leq GL(n,\mathbb{R})\}$ considéré à un isomorphisme (de fibrés) près, est en bijection avec $\mathcal{H}^1(B,G)$ (un classifiant de structures).

Théorème 3.2.1.
Soit sur une variété différentielle M *de dimension* n, n *champs de vecteurs* $X^{(1)},\ldots,X^{(n)}$, *tel que* $X^{(1)}(x),\ldots,X^{(n)}(x)$ *forment une base de* T_xM *en tout point* x *de* M. *Alors* TM *est difféomorphe à* $M \times \mathbb{R}^n$.

La restriction de ce difféomorphisme établit un isomorphisme entre l'espace tangent $T_x M$ et l'espace vectoriel $\{x\} \times \mathbb{R}^n$.

Démonstration. Si $\pi : u \in TM \to x \in M$ si $u \in T_x M$ est la projection du fibré tangent sur la variété et comme $u = \sum_{k=1}^{k=n} u_k X^{(k)}$ On définit alors

$$\Phi : u \in TM \mapsto (\pi(u), u_1, ..., u_n) \in M \times \mathbb{R}^n$$

il est claire que Φ est une bijection, reste à montrer qu'il est de classe $\mathscr{C}^1$ ainsi que son inverse. □

3.3 Exemples fondamentaux

Fibré tangent TM : Soit $(M, \mathcal{A})$ une variété de classe $\mathscr{C}^k$, $k \geq 1$ modelée sur un Banach B. On définit l'ensemble $TM = \dot{\bigcup}_{a \in M} T_a M$ (réunion disjointe de tout les espaces tangents à M). Soient $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ et l'application "pied"

$$\begin{array}{rccc} \pi : & TM & \to & M \\ & T_x M & \mapsto & x \end{array}$$

Comme $\pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{a \in U} T_a M = TU$ (car $T_a U \simeq T_a M$, $\forall a \in U$) alors

$$\begin{array}{rccc} T\varphi : & \pi^{-1}(U) = TU & \to & \varphi(U) \times B \\ & [\gamma] \in T_x U & \mapsto & ((\varphi \circ \gamma)(0), (\varphi \circ \gamma)'(0)) \end{array}$$

est bien définie et on vérifie que $T\mathcal{A} = \{(TU, T\varphi), (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$ est un atlas qui fait de TM une variété de classe $\mathscr{C}^{k-1}$. En effet $TM = \bigcup_{U \text{ domaine de carte de } M} TU$ et les fonctions de transition sont déduites du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} TU_i \cap TU_j \arrow[r, "T\varphi_i"] \arrow[d, "T\varphi_j"'] & \varphi_i(U_i \cap U_j) \times B \arrow[dl, "T\varphi_j \circ T\varphi_i^{-1}"] \\ \varphi_j(U_i \cap U_j) \times B & \end{tikzcd}$$

i.e $(\varphi_j(x), (\varphi_j \circ \gamma)'(0)) = T\varphi_j \circ T\varphi_i^{-1}\big(\varphi_j(x), (\varphi_i \circ \gamma)'(0)\big)$ implique que

$$T\varphi_j \circ T\varphi_i^{-1} = (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) \times (D_{\varphi_i(\cdot)} \varphi_j \circ \varphi_i^{-1})$$

et les fonctions de transition sont de classe $\mathscr{C}^{k-1}$. TM est bien un fibré localement trivial car le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "T\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \varphi(U)\times B \arrow[d, "\pi_1"] \\ U & \varphi(U) \arrow[l, "\varphi^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Les sections du fibré tangent sont appelées *champs de vecteurs*, et ferons l'objet du chapitre suivant.

Fibré cotangent $T^\star M$: De façons similaire à la construction du fibré tangent, si $(M,\mathcal{A})$ est une variété de classe $\mathscr{C}^k$, $k \geq 1$ modelée sur un Banach B. On définit l'ensemble $T^\star M = \dot{\bigcup\limits_{a\in M}} T_a^\star M$ où $T_a^\star M$, appelé espace cotangent, est le dual topologique de l'espace tangent T_aM.

Le fibré $\Lambda^p(T^\star M)$: On le définit par $\Lambda^p(T^\star M) = \dot{\bigcup\limits_{x\in M}} \Lambda^p(T_x^\star M)$, où $\Lambda^p(T_x^\star M)$ est l'ensemble des p-formes linéaires alternées sur T_xM, et

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \Lambda^p(T^\star M) & \rightarrow & M \\ & \Lambda^p(T_x^\star M) & \mapsto & x \end{array}$$

Si $\mathcal{A} = \{(U_i,\varphi_i),\ i \in I\}$ est un atlas sur M, on pose:

$$\begin{array}{rccc} \phi_i : & \pi^{-1}(U_i) & \rightarrow & U_i \times \mathbb{R}^{C_n^p} \\ & \omega & \mapsto & (\pi(\omega),(\varphi_i^{-1})_\star\omega) \end{array}$$

où $(\varphi_i^{-1})_\star\omega(v_1,...,v_p) = \omega\big(D_{\varphi_i\circ\pi(\omega)}\varphi_i^{-1}(v_1),...,D_{\varphi_i\circ\pi(\omega)}\varphi_i^{-1}(v_p)\big)$. $\Lambda^p(T^\star M)$ est alors muni de l'atlas $\widetilde{\mathcal{A}} = \{(\pi^{-1}(U_i),\widetilde{\phi_i}),\ i \in I\}$ où $\widetilde{\phi_i} = (\varphi_i \times \mathrm{Id}) \circ \phi_i$ et est donc une variété de classe $\mathscr{C}^{k-1}$. Les sections de ce fibré vectoriel sont les p-formes différentielles sur M.

Le fibré $\mathrm{Sym}^2(T^\star M)$: Il est définit tout comme $\Lambda^2(T^\star M)$ mais en prenant comme fibre l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur T_xM au lieu de $\Lambda^2(T_x^\star M)$, ensemble des formes bilinéaires alternées. Les sections de ce fibré sont les champs de formes quadratiques ; si une section $s : M \rightarrow \mathrm{Sym}^2(T^\star M)$ vérifie: pour tout $x \in M$, $s(x)$ est définie positive sur T_xM, alors s est appelée *métrique Riemannienne* sur M.

Chapitre 4

Champs de vecteurs et flots

4.1 Champs de vecteurs et dérivation

Définition 4.1. *Soit M une variété de classe $\mathscr{C}^k$, un* champ de vecteurs *de classe $\mathscr{C}^r$,$(r \leq k)$ sur M est la donnée d'une application $X : M \to TM$ de classe $\mathscr{C}^r$ telle que $X(x) \in T_xM$, $\forall x \in M$ (c'est une section du fibré tangent TM). L'ensemble des champs de vecteurs $\mathscr{C}^k$ sera noté par $\mathcal{X}_k(M)$. On notera simplement $\mathcal{X}(M)$ si $k = +\infty$.*

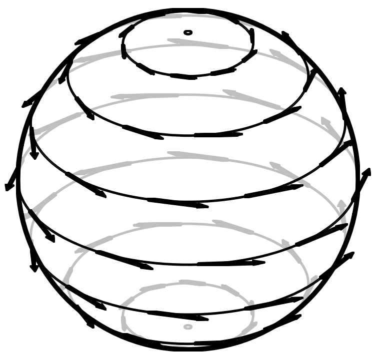

Fig. 4.1 – *champ de vecteurs sur* $\mathbb{S}^2$

Exemples.

1. *Un champ de vecteurs sur un ouvert U d'un Banach B s'identifie à une application différentiable de U sur B.*
2. $X \in \mathcal{X}(\mathbb{S}^n)$ *ssi* $X : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ *telle que, pour tout* $x \in \mathbb{S}^n$ $< x, X(x) >= 0$. *Ainsi toute matrice antisymétrique d'ordre $n+1$ définie un champ de vecteurs sur $\mathbb{S}^n$.*
3.

$\mathcal{X}_k(M)$ peut être muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel grâce à la structure de vectoriel l'espace tangent en tout point. la somme et la multiplication par un scalaire se définit point par point

$$\begin{cases} (X+Y)(x) &= X(x)+Y(x) \\ (\lambda X)(x) &= \lambda \cdot X(x) \end{cases}$$

On définit la multiplication "ponctuelle" par une fonction par :

$$\forall f \in \mathscr{C}^k(M,\mathbb{R}), \quad x \mapsto$$

$f(x)X(x)$ est un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^k$ noté fX

Définition 4.2 (Image réciproque).
Si $Y \in \mathcal{X}_k(N)$ est un champ de vecteurs sur N et si $f : M \to N$ est un $\mathscr{C}^{k+1}$ difféomorphisme local alors $f^\star Y(x) = (T_x f)^{-1}(Y(f(x)))$ définit un champ de vecteurs sur M (dit champ de vecteurs image réciproque de Y par f*). En effet, par composition d'applications $\mathscr{C}^k$*

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{Y} & TN & \xrightarrow{(Tf)^{-1}} & TM \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & Y(f(x)) \in T_{f(x)}N & \longmapsto & (T_x f)^{-1}(Y(f(x))) = f^\star Y(x) \in T_x M \end{array}$$

Lorsque f est un difféomorphisme global, alors on peut définir le champ de vecteurs image directe d'un $X \in \mathcal{X}_k(M)$ par f par :

$$f_\star X = (f^{-1})^\star X \quad i.e \quad f_\star X(y) = T_{f^{-1}(y)} f(X(f^{-1}(y)))$$

Si $M = N$ et $T_x f(X(x)) = X(x)$ alors X est dit champ de vecteurs invariant *par f.*

Définition 4.3 (restriction).
Si U est un ouvert de M alors l'injection canonique $i : U \mapsto M$ est un plongement qui permet d'identifier $TU = \dot{\bigcup\limits_{a\in U}} T_a U$ avec $\dot{\bigcup\limits_{a\in U}} T_a M$. Si $X \in \mathcal{X}_k(M)$ alors la restriction de $X : M \to TM$ à U définit un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^k$ sur U noté $X|_U$

Exercice 4.1. *Soit $X \in \mathcal{X}_k(M)$ et (U,φ) une carte locale, montrer que $\varphi_\star(X|_U)$ est un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\varphi(U)$.*

Définition 4.4. *On note $\mathscr{C}^\infty(M)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : M \to \mathbb{R}$ qui sont de classe $\mathscr{C}^\infty$. On appelle dérivation toute application linéaire $\delta : \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)$ qui vérifie l'identité de Leibniz : $\delta(f{\cdot}g) = f\delta(g)+g\delta(f)$. On note $\mathcal{D}(M)$ l'ensemble des dérivations.*

Définition 4.5 (Dérivée de Lie).
Si $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ et $X \in \mathcal{X}(M)$, la dérivée de Lie de f selon X est la fonction :

$$x \mapsto L_X f(x) = T_x f(X(x))$$

Cette fonction, notée aussi Xf, est dans $\mathscr{C}^\infty(M)$.

Théorème 4.1.1.
Si $X \in \mathcal{X}(M)$ alors l'opérateur "dérivée de Lie" vérifie les propriétés suivantes :

1. $\begin{cases} \bullet \quad L_X : \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathscr{C}^\infty(M) \quad \text{est linéaire} \\ \bullet \quad L_X(f\cdot g) = g\cdot L_X(f) + f\cdot L_X(g) \quad \text{égalité de Leibniz} \end{cases}$
   i.e L_X est une dérivation.
2. $L_X = 0 \Leftrightarrow X = 0$

Démonstration.

1. L'application tangente est linéaire et à valeur dans $\mathbb{R}$

$$\begin{tikzcd} T_xM \arrow[r, "T_xf"] \arrow[d, "\theta_\varphi"'] & T_x\mathbb{R} \simeq \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^n \arrow[ur, "D_{\varphi(x)}(f\circ\varphi^{-1})"'] & \end{tikzcd}$$

   on déduit alors que
   $$T_x(\alpha f+\beta g)(X(x)) = \alpha T_xf(X(x))+\beta T_xg(X(x)) = \alpha L_Xf(x)+\beta L_Xg(x)$$
   et
   $$T_x(f\cdot g)(X(x)) = f(x)T_xg(X(x)) + g(x)T_xf(X(x)) = f\cdot(L_Xg)(x) + g\cdot(L_Xf)(x)$$
   et la dérivée de Lie L_X est une dérivation.
2. C'est immédiat dans un sens $X = 0 \Rightarrow L_X = 0$, supposons $\exists x_0 \in M$, $X(x_0) \neq 0$

□

Théorème 4.1.2.
L'ensemble des champs de vecteurs $\mathcal{X}(M)$ est isomorphe à l'ensemble des dérivations $\mathcal{D}(M)$.

Démonstration. Montrons que l'application $X \mapsto L_X$ est une bijection de $\mathcal{X}(M)$ dans $\mathcal{D}(M)$ □

Définition 4.6 (crochet de Lie).
Soient $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ deux champs de vecteurs sur une variété différentielle M, On définit le crochet de Lie de X et Y, par son action sur $\mathscr{C}^\infty(M)$, par :

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) = (XL_Y - YL_X)f$$

Théorème 4.1.3.
Si $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ deux champs de vecteurs sur une variété différentielle M alors :

1. *$[X,Y]$ est un champ de vecteurs sur M.*

2. $\begin{cases} \bullet \ (X,Y) \mapsto [X,Y] \quad \textit{est bilinéaire} \\ \bullet \ [X,Y] = -[Y,X] \quad \textit{(antisymétrique)} \\ \bullet \ [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0 \quad \textit{(identité de Jacobi)} \end{cases}$

3. *Si* $f \in \mathrm{Diff}(M)$ *est un difféomorphisme sur* M *alors* $f_\star[X,Y] = [f_\star X, f_\star Y]$

Démonstration.

1. Le crochet de Lie est une dérivation qui s'identifie donc à un champ de vecteurs.
2. •
$$\begin{aligned}[\alpha X + \beta Y, Z]f &= (\alpha X + \beta Y)(Zf) - Z(\alpha X + \beta Y)(f) \\ &= \alpha X(Zf) - \alpha Z(Xf) + \beta Y(Zf) - \beta Z(Yf) \\ &= \alpha[X,Z]f + \beta[Y,Z]f\end{aligned}$$
   • $[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) = -\big(Y(Xf) - X(Yf)\big) = -[Y,X]f$
   •
$$\begin{aligned}[X,[Y,Z]] &= X([Y,Z]) - [Y,Z](X) \\ &= X(Y(Z) - Z(Y)) - (Y(Z(X))) - Z(Y(X)) \\ &= X(Y(Z)) - X(Z(Y)) - Y(Z(X)) + Z(Y(X))\end{aligned}$$
   on déduit que :
   $[Y,[Z,X]] = Y(Z(X)) - Y(X(Z)) - Z(X(Y)) + X(Z(Y))$
   et $[Z,[X,Y]] = Z(X(Y)) - Z(Y(X)) - X(Y(Z)) + Y(X(Z))$
   en sommant les trois dernières égalités on obtient l'identité de Jacobi.
3. Il faut remarquer d'abord que si $X \in \mathcal{X}(TM)$ et $f \in \mathrm{Diff}(M)$ alors
$$(f_\star X)(g) = (X(g \circ f)) \circ f^{-1} \quad \forall g \in \mathscr{C}^\infty(M)$$
   en effet
$$\begin{aligned}(f_\star X)(g)(x) &= T_x g(f_\star X(x)) = T_x g(T_{f^{-1}(x)} f(X(f^{-1}(x)))) \\ &= T_{f^{-1}(x)}(g \circ f)(X(f^{-1}(x)))\end{aligned}$$
   On a donc
$$\begin{aligned}(f_\star[X,Y])(g) &= ([X,Y](g \circ f)) \circ f^{-1} \\ &= (X(Y(g \circ f)) - Y(X(g \circ f))) \circ f^{-1} \\ &= X(Y(g \circ f)) \circ f^{-1} - Y(X(g \circ f)) \circ f^{-1} \\ &= X((f_\star Y)(g) \circ f) \circ f^{-1} - Y((f_\star X)(g) \circ f) \circ f^{-1} \\ &= f_\star X((f_\star Y)(g)) - f_\star Y((f_\star X)(g)) \\ &= [f_\star X, f_\star Y](g)\end{aligned}$$

□

Définition 4.7.

– *Soit M une variété différentielle et $\{X_1,...,X_p\}$ une famille de champs de vecteurs sur M. On dit que $\{X_1,...,X_p\}$ sont linéairement indépendants si, pour tout x dans M, $\{X_1(x),...,X_p(x)\}$ sont linéairement indépendants dans l'espace vectoriel T_xM.*

– *Si M est de dimension finie n, on dit qu'elle est* parallélisable *s'il existe n champs de vecteurs sur M qui sont linéairement indépendants.*

Exercice 4.2.
Soit M une variété différentielle, et soient $X^{(1)},X^{(2)},...,X^{(n)}$, n champs de vecteurs sur M formant une base de T_xM en tout point x de M.

1. *Montrer que TM est difféomorphe à $M \times \mathbb{R}^n$. (Si $u = \sum_{k=1}^{n} u_k X^{(k)}$ considérer*
$$\Phi : u \in TM \mapsto (\pi(u),u_1,...,u_n) \in M \times \mathbb{R}^n$$
où $\pi : TM \to M$ est la projection du fibré tangent TM sur la variété M)
2. *Montrer que ce résultat est vrai sur tout groupe de Lie de dimension finie.*

4.2 flot local

Définition 4.8 (courbe intégrale).
Soit $X \in \mathcal{X}(M)$ un champ de vecteurs sur une variété différentielle M, on appelle courbe intégrale de X en $x \in M$ toute courbe $\gamma : t \in I_\gamma =]-\varepsilon_\gamma,\varepsilon_\gamma[\subset \mathbb{R} \mapsto \gamma(t) \in M$ tels que : $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$, $\forall t \in I_\gamma$ où $\gamma'(t)$ désigne le vecteur $T_t\gamma(1)$.

Théorème 4.2.1.
Pour tout a dans M, il existe un triplet (I,U,ϕ) formé d'un intervalle ouvert I contenant 0, d'un voisinage ouvert U de a et d'une application $\phi : I \times U \to M$ de classe $\mathscr{C}^k$, notée $(t,x) \mapsto \phi_t(x)$, vérifiant, pour tous s dans I et x dans U,

$$\begin{cases} \frac{d\phi_t(x)}{dt}|_{t=s} = X(\phi_s(x)), \\ \phi_0(x) = x. \end{cases}$$

Si (I',U',ϕ') est un autre tel triplet, alors ϕ et ϕ' coincident sur $(I \times U) \cap (I' \times U')$. De plus, pour tous t,s dans I et x dans U,

- *si $\phi_s(x) \in U$ et $t + s \in I$, alors $\phi_t \circ \phi_s(x) = \phi_{t+s}(x)$,*
- *ϕ_t est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme local,*
- *le champ de vecteurs X est invariant par ϕ_t i.e $T_x\phi_t(X(x)) = X(\phi_t(x))$.*

Démonstration. Cet énonce est local. En prenant des cartes locales, on se ramène donc au cas ou M est un ouvert d'un espace de Banach, pour lequel le résultat est bien connu (voir le problème de Cauchy dans l'Annexe). L'application (ou par abus son image) $t \mapsto \phi_t(x)$ de I dans M est la courbe intégrale de X passant par x définie sur I. L'application $(t,x) \mapsto \phi_t(x)$ de $I \times U$ dans M (ou la famille $(\phi_t)_{t\in I}$) est appelée le *flot local* de X en x_0 défini sur $I \times U$. Lorsque ce flot est "global" i.e défini sur $\mathbb{R} \times M$ on dit que le champ de vecteurs X est *complet*. Le théorème suivant donne des conditions suffisantes pour qu'un champ X soit complet □

Théorème 4.2.2.

1. *Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout x dans M, il existe un voisinage ouvert U_x de x tel que le flot local de X soit défini sur $]-2\varepsilon,2\varepsilon[\times U_x$. Alors le champ de vecteurs X est complet i.e. le flot local de X est défini sur $\mathbb{R} \times M$, et $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre de $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes de M, i.e :*
   - *ϕ_0 est l'identité de M et pour tous t,s dans $\mathbb{R}$, on a $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$,*
   - *l'application $(t,x) \mapsto \phi_t(x)$ de $\mathbb{R} \times M$ dans M est de classe $\mathscr{C}^k$, et donc $\phi_t : M \to M$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme.*
2. *Si M est compacte, alors tout champ de vecteurs X sur M est complet.*

Démonstration.

1. Posons $\psi_t = \phi_\varepsilon^{(k)} \circ \phi_{t-k\varepsilon}$ où k est la partie entière de t/ε. Comme le flot local de X preserve X, il est immédiat que $\frac{d\psi_t(x)}{dt}|_{t=s} = X(\psi_s(x))$, et $\psi_0(x) = x$ pour tout s dans $\mathbb{R}$ et x dans M. Par unicité, ψ_t est le flot local de X défini sur $\mathbb{R} \times M$. Il est immédiat que $(\psi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre $\mathscr{C}^k$ de $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes de M.
2. Pour tout x dans M, il existe un voisinage ouvert U_x de x et $\varepsilon_x > 0$ tel que le flot local de X soit défini sur $]-2\varepsilon_x,2\varepsilon_x[\times U_x$. Par compacité, il existe $x_1,\dots,x_k$ dans M tels que $M = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_k}$. Soit $\varepsilon = \min_{1\le i\le k} \varepsilon_{x_i}$. Alors l'hypothese de (1) est vérifiée.

□

Pour une variété différentielle de dimension finie M tout champ de vecteurs $X \in \mathcal{X}(M)$ ne s'annulant pas en a peut être "redresser", dans un voisinage de a, à un champ constant. Ceci est précisé dans le théorème suivant

Théorème 4.2.3 (Théorème de redressement).
Soit X un champ de vecteurs $\mathscr{C}^k$ sur une variété M de classe $\mathscr{C}^{r+1}$, avec $1 \le k \le r \le \omega$ Pour tout point x_0 de M tel que $X(x_0) \neq 0$, il existe une carte locale (U,φ) de classe $\mathscr{C}^k$ en x_0, telle que

$$\varphi_\star(X|_U) = (X_{e_1})|_{\varphi(U)}$$

X_{e_1} étant le champ de vecteurs constant $X_{e_1} : x \mapsto e_1$ où e_1 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit, si $X(x_0) \neq 0$, alors il existe des coordonnées locales $x_1,\dots,x_n$ au voisinage de 0 telles que, au voisinage de 0, on ait $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$

Démonstration. Comme le problème est local, et par les propriétés des champs de vecteurs vis à vis des restrictions et des images réciproques, nous pouvons supposer que M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, que $x_0 = 0$ et que $X(x_0) = e_1$. Notons (ϕ_t) le flot local de X en 0. Considérons l'application

$$\theta : (t,x_2,\dots,x_n) \mapsto \phi_t(0,x_2,\dots,x_n),$$

qui est de classe $\mathscr{C}^k$ et définie sur un voisinage de 0. Comme $\phi_0 = \mathrm{Id}$ et $\frac{d\phi_t(0)}{dt}|_{t=0} = X(0) = e_1$, la différentielle de θ en 0 est l'identité. Donc par le théorème d'inversion locale, θ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme local en 0. Pour tout $x = (x_1,\dots,x_n)$ suffisamment proche de 0, on a

$$d\theta_x(e_1) = \frac{d}{dt}|_{t=x_1}\theta(t,x_2,\dots,x_n) = X(\phi_{x_1}(0,x_2,\dots,x_n)) = X(\theta(x)).$$

Donc $\theta_\star(X_{e_1}) = X$ sur un voisinage de 0, ce qui montre le résultat. $\square$

Exercices

Exercice 4.3. *Soient X_1, X_2 deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$ définis par*

$$X_1(x_1,x_2) = \frac{x_1}{\|x\|}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{x_2}{\|x\|}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

et

$$X_2(x_1,x_2) = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Montrer que $[X_1,X_2] = 0$. Déterminer les coordonnés (y_1,y_2) tels que :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y_1} \text{ et } X_2 = \frac{\partial}{\partial y_2}$$

Chapitre 5

Groupes et algèbres de Lie

5.1 Groupes de Lie

Définition 5.1 (Groupe de Lie).
Un groupe de Lie *est un ensemble G muni d'une structure de groupe et d'une structure de variété $\mathscr{C}^\infty$ compatibles, dans le sens*

$$\text{Les deux applications : } \begin{array}{ccc} G\times G & \to & G \\ (g,h) & \mapsto & gh^{-1} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ g & \mapsto & g^{-1} \end{array} \quad \text{sont de classe } \mathscr{C}^\infty$$

Exemples.

1. *Tout groupe dénombrable est un groupe de Lie $\mathscr{C}^\omega$ de dimension* 0.
2. S^1 *est un groupe de Lie de dimension* 1.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{S}^1 & \simeq & \mathrm{U}(1) = \{z\in\mathbb{C}^*,\ |z|=1\} \quad \text{sous-groupe de } (\mathbb{C}^*,\times) \\ (x,y) & \mapsto & x+iy \end{array}$$

3. *Les groupes classiques :*
   $GL(n,\mathbb{R}) = \{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det M\neq 0\}$
   $SL(n,\mathbb{R}) = \{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det M = 1\}$
   $O(n) = \{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tMM=\mathrm{Id}\}$
   $SO(n) = \{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tMM=\mathrm{Id} \text{ et } \det M = 1\}$

Exercice 5.1. *Soit G un groupe de Lie et C_e la composante connexe de l'élément neutre.*

1. *Montrer que C_e est un sous-groupe distingué de G i.e $\forall g\in G$, $gC_eg^{-1} = C_e$*
2. *Déduire que C_e est un sous-groupe de Lie de G et que l'espace quotient G/C_e est discret. (Montrer que C_e est ouvert dans G).*

Montrer que si G est connexe alors il est engendré par un voisinage de l'élément neutre, i.e $\exists U\in\mathcal{V}_{(e)}$, $G = <U>$.

Définition 5.2.
Soient G et H deux groupes de Lie et $f : G \to H$ une application, on dit que f est un morphisme de groupes de Lie *si*

$$\begin{cases} (i)\ \forall (g_1,g_2) \in G \times G,\ f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1)f(g_2) \text{ (morphisme de groupes)} \\ (ii)\ f : G \to H \text{ est une application } \mathscr{C}^\infty \text{ (morphisme de variétés)} \end{cases}$$

Théorème 5.1.1. *Si $f : G \to H$ est un morphisme de groupes de Lie alors*

1. *f est de rang constant.*
2. *Si de plus f est bijective et G est à base dénombrable alors f est un $\mathscr{C}^\infty$* ***difféomorphisme***

Démonstration.

1. Si f est un morphisme de groupes de Lie, alors $f \circ L_g = L_{f(g)} \circ f$ (où $L_g : x \mapsto gx$ est la translation à gauche) donc $T_x(f \circ L_g) = T_x(L_{f(g)} \circ f)$ i.e
$$T_{gx}f \circ T_xL_g = T_{f(x)}L_{f(g)} \circ T_xf \quad \forall g,x \in G$$
pour $x = e$ on a : $T_gf = T_{f(e)}L_{f(g)} \circ T_ef \circ (T_eL_g)^{-1} \quad \forall g \in G$ or $T_{f(e)}L_{f(g)}$ et T_eL_g sont des isomorphismes on déduit alors que :
$$\operatorname{rang} T_gf = \operatorname{rang} T_ef \quad \forall g \in G \qquad \text{i.e } f \text{ de rang constant}$$

□

Définition 5.3. *Une partie H d'un groupe de Lie G est dite* sous-groupe de Lie *si H est à la fois un sous-groupe et une sous-variété de G.*

Théorème 5.1.2. *Tout sous-groupe de Lie d'un groupe de Lie est fermé.*

Démonstration. Si H est à la fois un sous-groupe et une sous-variété d'un groupe de Lie G alors H est localement fermé i.e H est ouverte dans $\overline{H}$. $\overline{H}$ est un sous groupe de G, l'application $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ étant continue sur H donc si $(x,y) \in \overline{H}$ alors $xy^{-1} \in \overline{H}$. Comme $\forall x \in G$, $\varphi_x : g \mapsto xg$ est un homéomorphisme alors $\varphi_x(H)$ est ouvert dans $\varphi_x(\overline{H})$ i.e xH est ouvert dans $x\overline{H} = \overline{H}$, $\forall x \in \overline{H}$.
Comme $\overline{H} = H \cup \left(\bigcup_{x \in \overline{H} - H} xH \right)$ et $\theta = \bigcup_{x \in \overline{H} - H} xH$ est un ouvert de $\overline{H}$ tel que $H \cap \theta = \varnothing$ alors H est fermé dans $\overline{H}$ donc aussi dans G. □

Définition 5.4 (Algèbres de Lie).
Un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une opération $[.,.]$ est appelé algèbre de Lie si :

– $[X,Y]$ *est un champ de vecteurs sur M.*

– $\begin{cases} \bullet \ (X,Y) \mapsto [X,Y] \quad \textit{est bilinéaire} \\ \bullet \ [X,Y] = -[Y,X] \quad \textit{(antisymétrique)} \\ \bullet \ [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0 \quad \textit{(identité de Jacobi)} \end{cases}$

Exemples.

1. *L'ensemble des champs de vecteurs $\mathcal{X}(M)$ sur une variété différentielle M est une algèbre de Lie pour le crochet de Lie* $[,.]$.
2.

Théorème 5.1.3. *Si G est un groupe de Lie alors il existe un isomorphisme entre T_eG, l'espace tangent en l'élément neutre, et $\mathfrak{g}$ l'ensemble des champs de vecteurs, sur G invariants à gauche.*

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl} X \in \mathfrak{g} & \Longleftrightarrow & X = L_{g\star}X \ \forall g \in G \\ & \Longleftrightarrow & X(gx) = T_xL_g(X(x)) \ \ \forall g \in G, \forall x \in G \\ & \Longrightarrow & X(g) = T_eL_g(X(e)) \ \ \forall g \in G \text{ il suffit de prendre } x = e \end{array}$$

d'autre part si $X(g) = T_eL_g(X(e)) \ \ \forall g \in G$ alors $\forall g \in G, \forall x \in G$ on a

$$\begin{array}{rcl} X(gx) & = & T_eL_{gx}(X(e)) \\ & = & T_e(L_g \circ L_x)(X(e)) \ \ \text{car } L_{gx} = L_g \circ L_x \\ & = & T_xL_g(T_eL_x(X(e))) \ \ \text{car } T_e(L_g \circ L_x) = T_xL_g \circ T_eL_x \\ & = & T_xL_g(X(x)) \ \ \text{i.e } X \in \mathfrak{g} \end{array}$$

On déduit que l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathfrak{g} & \to & T_eG \\ & X & \longmapsto & X(e) \end{array}$$

est injective car si $X,Y \in \mathfrak{g}$ alors

$X(e) = Y(e) \Leftrightarrow T_eL_x(X(e)) = T_eL_x(Y(e)) \ \forall x \in G \Leftrightarrow X(x) = Y(x) \ \forall x \in G \Leftrightarrow X = Y$

ϕ est surjective, en effet si $v \in T_eG$ alors $X(x) = T_eL_x(v)$ définit un champ de vecteurs sur G, invariant à gauche car $X(x) = T_eL_x(v = X(e)) \ \forall x \in G$ i.e $X \in \mathfrak{g}$ et $\phi(X) = v$. □

5.2 Fonction exponentielle

5.3 Groupes homogènes

Théorème 5.3.1.
Si $f : X \to Y$ est une application ouverte et surjective entre deux espaces

topologiques avec Y connexe et pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ est connexe alors X est connexe.

Démonstration. Par l'absurde, si $X = U \cup V$ union disjointe de deux ouverts non vide, alors $Y = f(X) = f(U) \cup f(V)$ (car f est surjective), comme f est ouverte $f(U) \cap f(V) \neq \varnothing$ (sinon Y serais non-connexe). Soit $y \in f(U) \cap f(V)$, $f^{-1}(y) = (U \cap f^{-1}(y)) \cup (V \cap f^{-1}(y))$ réunion disjointe de deux ouverts non vide de $f^{-1}(y)$ ce qui contredit le fait que $f^{-1}(y)$ est connexe. □

Corollaire 5. *Si H est un sou-groupe connexe d'un groupe de Lie G et si G/H est connexe alors G est connexe.*

Il suffit de prendre, dans le théorème précédent, $X = G$, $Y = G/H$ et f la projection canonique.

Corollaire 6. *Si M est une variété homogène sur un groupe de Lie compact G alors M est homéomorphe à G/G_x pour tout $x \in M$.*

Démonstration.

1. Si $y = g.x$ comme l'application $h \mapsto ghg^{-1}$ est un homéomorphisme, alors

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & G_x & \to & G_y \\ & h & \mapsto & ghg^{-1} \end{array}$$

est un homéomorphisme, en effet il suffit de montrer que $\varphi(G_x) = G_y$: si $h \in G_x$ i.e $h.x = x$ alors $ghg^{-1}.y = gh.x = g.x = y$ i.e $ghg^{-1} \in G_y$.

2. $\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & O(x) \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ G/G_x & & \end{array}$ où $f(g) = g.x$ (surjective et continue), $\pi(g) = [g] = g.G_x$ (surjection canonique) et $\bar{f} \circ \pi = f$. $\bar{f}$ est bijective (claire), $\bar{f}$ est continue : si U est un ouvert de $O(x)$ alors $\pi^{-1}\left(\bar{f}^{-1}(U)\right) = f^{-1}(U)$ est un ouvert de G (f est continue) donc $\bar{f}^{-1}(U)$ est un ouvert de G/G_x (par définition des ouverts de la topologie quotient). Si W est un fermé de G/G_x alors $\bar{f}(W) = f(\pi^{-1}(W))$ est fermé dans $O(x)$ car $\pi^{-1}(W)$ est fermé dans G et f est fermée (car continue sur un compact). Il en résulte que $\bar{f}$ est un homéomorphisme.
3. Si G est compact et M homogène alors $\forall x \in M$, $M = O(x) \simeq G/G_x$.
4. Il suffit de montrer que $G = SO(n+1)$ est compact et S^n est homogène. $G = \{A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}),\ {}^tAA = \mathrm{Id} \text{ et } \det A = 1\}$ est un fermé borné de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ donc compact, borné : $\forall A \in G, \|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} < Ax,Ax >^{\frac{1}{2}} = \sup\limits_{\|x\|=1} < x,{}^tAAx >^{\frac{1}{2}} = \sup\limits_{\|x\|=1} < x,x >^{\frac{1}{2}} = 1$ Pour montrer que S^n est homogène il suffit de vérifier que

$$\forall x \in S^n, \exists A(x) \in SO(n+1) \quad x = A(x)\, e_1$$

il en résulte que $\forall\,(x,y)\in S^n$, $\exists A\in SO\,(n+1)\;\; y=Ax \quad \left(A=A\,(y)\,A^{-1}\,(x)\right)$ et S^n est homogène. Il s'agit donc de vérifier que si $x\in S^n$ alors $\exists\{u_1,...,u_n\}\subset S^n$ tels que la famille $\{x,u_1,...,u_n\}$ soit orthogonale et $\det\left(A\,(x)=(x,u_1,...,u_n)\right)=1$ cela est possible grace au procédé d'orthonormalisation de **Gram-Schmidt**, la matrice résulatante $A\,(x)$ est de déterminant $\det A\,(x)=\pm 1$ et on peut changer le signe des $\{u_i\}_{i=1}^n$ pour avoir un déterminant égale à 1, sans affecter le fait que $A\,(x)$ soit orthogonale ou que $x=A\,(x)\,e_1$. D'après ce qui précède $S^n\simeq SO\,(n+1)\,/G_{e_1}$.

5. On montre par récurrence sur n que $SO\,(n)$ est connexe. $SO\,(1)=\{1\}$ est connexe, supposons que $SO\,(n)$ est connexe et montrons que $SO\,(n+1)$ est connexe. Si on prend $X=SO\,(n+1)$, $Y=SO\,(n+1)\,/G_{e_1}$ et $f:X\to Y\;A\longmapsto AG_{e_1}$ il suffit alors de vérifier les hyopothèses de la première question, à savoir que Y est connexe (ce qui est vrai car $Y\simeq S^n$), que f est ouverte et surjective (f étant la surjection canonique, il reste donc à montrer qu'elle est ouverte) et que $\forall y\in Y\;\; f^{-1}\,(y)$ est connexe. f est ouverte, en effet soit U un ouvert de X, $f\,(U)$ est ouvert dans $Y \Leftrightarrow f^{-1}\,(f\,(U))=\bigcup\limits_{A\in SO(n+1)} AU$ est ouvert dans X. C'est une union d'ouverts de X car $L_A:B\longmapsto AB$ est un homéomorphisme sur X et $AU=L_A\,(U)$. Si $y\in Y$, $\exists A\in SO\,(n+1)\;\; y=AG_{e_1}$ et $f^{-1}\,(y)=\{B\in SO\,(n+1)\,,\; BG_{e_1}=AG_{e_1}\}=AG_{e_1}\simeq G_{e_1}\simeq SO\,(n)$ en effet $G_{e_1}=\{B\in SO\,(n+1)\,,\; Be_1=e_1\}=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0\;\cdots\;0 \\ 0 & \\ \vdots & \text{A} \\ 0 & \end{pmatrix},\; A\in SO\,(n)\right\}\simeq SO\,(n)$ donc connexe (par hypothèse), finalement d'après la première question $X=SO\,(n+1)$ est connexe.

6. $V_{k,n}=\{(u_1,...,u_k)\in(\mathbb{R}^n)^k\,,\;\langle u_i,u_j\rangle=\delta_j^i\}$ n'est pas connexe pour tout $k\geq 1$, par exemple $V_{1,n}=S^n$ est connexe et $V_{n,n}=O\,(n)\simeq O\,(1)\times SO\,(n)$ possède 2 composantes connexes : $SO\,(n)$ et $\{A\in O\,(n)\,,\;\det A=-1\}$

□

Chapitre 6

Revêtements et feuilletage

6.1 Revêtements

On dit qu'une application $p : M \to N$ entre deux variétés de classe $\mathscr{C}^k$ est un $\mathscr{C}^r$ *revêtement*, $(r \leq k)$ si :

1. $p$est surjective,
2. $\forall y \in N$, $\exists V \in \mathcal{V}_{(y)}$ $\quad p^{-1}(V) = \dot{\bigcup\limits_{i \in I_y}} U_i$, réunion disjointe d'ouverts de M, telle que$\forall i \in I_y$, $\quad p|_{U_i} : U_i \to V$ est un $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme.

Exemples.

1. $z \mapsto e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ *de* $\mathbb{C}$ *sur* $\mathbb{C}^*$
2. $t \mapsto e^{2\pi i t}$ *de* $\mathbb{R}$ *sur* S^1
3. $(\theta,\varphi) \mapsto \big(\cos\varphi \cdot (R + r\sin\theta), \sin\varphi \cdot (R + r\sin\theta), r\cos\theta\big)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *dans le Tore* T^2

Exercice 6.1. *Montrer que les exemples ci-dessus sont effectivement des revêtements.*

Théorème 6.1.1.
Soit p un revêtement entre deux variétés M et N alors :

1. *p est une application ouverte.*
2. *L'application $y \mapsto \operatorname{card} I_y$ est localement constante.*
   Réciproquement si M est compact et $f : M \to N$ est un $\mathscr{C}^r$-difféomorphisme local, surjectif alors f est un $\mathscr{C}^r$ revêtement.

Démonstration. 1. Soit U un ouvert de M et $y \in p(U)$, de la définition d'un revêtement on a $\exists V \in \mathcal{V}_{(y)}$, $p^{-1}(V) = \dot{\bigcup\limits_{i \in I_y}} U_i$ $\forall i \in I_y$, $\quad p|_{U_i} : U_i \to V$ est un $\mathscr{C}^r$ difféomorphisme. On déduit que $p(U_i \cap U)$ est un voisinage de y contenu dans $p(U)$ qui est donc voisinage de chacun de ses points.

2.

□

6.2 Opération de groupes

Soit G un groupe de Lie et M une variété, on dit que G agit sur M s'il existe une application différentiable

$$\begin{array}{rccll} \phi : & G \times M & \to & M & \\ & (g,x) & \mapsto & \phi(g,x) & \text{(notée aussi } g.x) \end{array}$$

telle que : $\begin{cases} \phi(e,x) = x & \forall x \in M \\ \phi(g,\phi(h,x)) = \phi(gh,x) & \forall g,h \in G, \forall x \in M \end{cases}$

Exercice 6.2. *Montrer que ceci équivaut à l'existence d'un isomorphisme, de groupes de Lie, de G sur un sous-groupe de* $\mathrm{Iso}(M)$ *(ensemble des isomorphismes de M dans M).*

Toute action d'un groupe de Lie G sur une variété M induit une relation d'équivalence sur M : $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G$, $y = g.x$. La classe d'équivalence d'un point x sera notée $O(x) = \{y \in M, \, y \sim x\} = \{g.x, \, g \in G\}$ et appelée orbite de x. Dans ce cas la variété M est appelée espace d'orbites.
L'ensemble des éléments de G qui laissent fixe un point x est appelé stabilisateur de x (ou groupe d'isotropie) et est noté $\mathrm{Stab}(x) = G_x = \{g \in G, \, g.x = x\}$.

Définition 6.1.
Une action d'un groupe de Lie G sur une variété M est dite :
1. *effective si l'application $g \mapsto \phi_g$ est injective.*
2. *libre (fidèle) si $G_x = e$, $\forall x \in M$.*
3. *transitive si $O(x) = M$, $\forall x \in M$ et M est appelé espace homogène.*
4. *propre si $\forall K \Subset M$, $\{g \in G, \, g.K \cap K \neq \varnothing\}$ est relativement compact.*
5. *proprement discontinue si $\forall K \Subset M$, $\{g \in G, \, g.K \cap K \neq \varnothing\}$ est fini.*

Exemples.
1. $GL(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad (A,x) \mapsto Ax$
2. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathrm{S}^n \to \mathrm{S}^n \quad \overline{0}.x = x, \, \overline{1}.x = -x$
3. $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad m.x = x + m$
4. $GL(n+1,\mathbb{R}) \times P^n(\mathbb{R}) \to P^n(\mathbb{R}) \quad A.[x] = [Ax]$

Un système dynamique est la donnée d'une action de $\mathbb{R}$, comme groupe de Lie, sur une variété différentielle M. Cet exemple mérite toute une étude à part, vu son importance dans l'étude des champs de vecteurs et des équations différentielles...voici quelques exemples :
1. $M = \mathbb{R}^2$ *et* $\phi(t,x) = x + (t,0)$

2. $M=\mathbb{R}^2$ *et* $\phi(t,(x,y))=(x+t,e^{-t}y)$
3. $M=\mathbb{R}\times\mathrm{S}^1$ *et* $\phi(t,(x,y,z))=(x+t,A(t)(y,z))$ *où* $A(t)=\left(\begin{smallmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{smallmatrix}\right)$

Exercice 6.3. *Étudier les exemples ci-dessus en déterminant les orbites, les groupes d'isotropie, l'espace des orbites, le type d'action : effective, libre, transitive, propre...*

6.3 Variétés quotients

G agit proprement discontinuement sans point fixe si :

$$\begin{cases} \bullet \quad \forall(x,y)\in M^2, \text{ si } y\notin O(x) \text{ alors } \exists U\in\mathcal{V}_{(x)}, \exists V\in\mathcal{V}_{(y)} \text{ tels que,}\\ \qquad\qquad \forall g\in G, \text{on a } g.U\cap V=\varnothing \\ \bullet \quad \forall x\in M, \exists U\in\mathcal{V}_{(x)} \text{ tel que,} \forall g\in G/\{1\}, \text{on a } g.U\cap U=\varnothing \end{cases}$$

Théorème 6.3.1. *Soit M une variété de classe $\mathscr{C}^k$ et G un sous-groupe de* $\mathrm{Diff}(M)$ *qui agit proprement discontinuement sans point fixe alors il existe sur M/G une unique structure de variété $\mathscr{C}^k$ qui fasse de la projection canonique $p : M\to M/G$ un $\mathscr{C}^k$ revêtement.*

Si M/G est muni de la topologie quotient alors p est ouverte, en effet si U est un ouvert de M alors $\mathrm{Sat}(U)=p^{-1}(p(U))=\bigcup_{g\in G} g.U$ est un ouvert de M, comme réunion d'ouverts $\{g.U=\phi_g(U)\}_{g\in G}$.

Exercice 6.4.

1. *Montrer que M/G est séparé si et seulement si le graphe Γ_G est fermé.*
2. *Faisons agir G sur $M\times M$ par l'action sur la seconde coordonnée, i.e. $g\bullet(x,y)=(x,g.y)$. Montrer l'égalité : $\Gamma_G=\bigcup_{g\in G} g\bullet\Delta_M$ (où Δ_M est la diagonale de M). En conclure que si M est séparé et que G est fini, l'espace quotient M/G est également séparé.*

6.4 Compléments

Une relation d'équivalence $\Re$ sur une variété M est dite régulière s'il existe sur $M/\Re$ une structure de variété telle que la projection canonique $\pi : M\to M/\Re$ soit une submersion, cette structure est alors unique, à un morphisme près, i.e

$g : M/\Re\to N$ est un morphisme $\Leftrightarrow$ $g\circ\pi : M\to N$ est un morphisme

Théorème 6.4.1.
Si $\Re$ est une relation d'équivalence sur une variété M et $G\subset M\times M$ son graphe alors $\Re$ est régulière si et seulement si :

$$\begin{cases} G \text{ est une sous-variété de } M \times M \\ \pi_1 : G \longrightarrow M \text{ (la première projection) est une submersion} \end{cases}$$

De plus $M/\Re$ est séparé si et seulement si G et fermé.

Chapitre 7

Intégration

Introduction

Dans tout ce chapitre E,F,... désignent des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.

7.1 Algèbre tensorielle

Définition 7.1 (convention d'Einstein).
La convention de sommation d'Einstein consiste à :

- *Placer l'indice en bas, lorsqu'on indexe une famille de vecteurs ou de champs de vecteurs et placer l'indice en haut, lors'on indexe une famille de covecteurs (formes linéaires ou leurs valeurs lorsque appliquées à un vecteur).*
- *Une expression où figure un même indice en position inférieure et supérieure est une somme par rapport à cet indice.*

cette convention fort utile permet, notamment, de distinguer entre vecteur et covecteur et d'écrire les formules de manière compacte.

Exemples.

1. *Soit $\{e_i\}_{i=1}^n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire de deux vecteurs $u = \sum_{i=1}^n u^i e_i = u^i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i = v^i e_i$ est donné par*

$$< u,v >= u^i v^j < e_i,e_j >= \delta_{ij} u^i v^j$$

2. *Soit E un espace vectoriel de base $\{e_i\}_{i=1}^n$ et de base duale $\{e^i\}_{i=1}^n$. Pour un vecteur $u = u^i e_i$ et deux covecteurs $\alpha = \alpha_i e^i$ et $\beta = \beta_i e^i$ on a*

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)(u) &= \alpha_i u^i + \beta_j u^j \\ &= (\alpha_i + \beta_i) u^i\end{aligned}$$

3. *Soient* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x),...,f_n(x))$ *et* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $y \mapsto (g_1(y),...,g_p(y))$ *deux fonctions "régulières" alors*

$$\frac{\partial (g \circ f)^i}{\partial x^j}(x) = \frac{\partial g^i}{\partial y^k}(f(x)) \cdot \frac{\partial f^k}{\partial x^j}(x)$$

ici la sommation est par rapport à l'indice k.

Produit tensoriel Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimensions p et q respectivement. Le produit tensoriel de E et F est le couple constitué d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, noté $E \otimes F$, et d'une application bilinéaire T noté $(x,y) \mapsto x \otimes y$, de $E \times F$ dans $E \otimes F$, satisfaisant à la propriété universelle suivante : Pour tout couple (G,S) constitué d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel G et d'une application bilinéaire S de $E \times F$ dans G, il existe une application linéaire ϕ et une seule de $E \otimes F$ dans G telle que, pour tout élément $(x,y) \in E \times F$,

$$S(x,y) = \phi(x \otimes y)$$

On résume tout ça en disant que $E \otimes F$ existe à un isomorphisme près tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "S"] \arrow[d, "T"'] & G \\ E \otimes F \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

Nous notons E^* et F^* leur espace vectoriel dual. Pour $f \in E^*$, $g \in F^*$, $x \in E$ et $y \in E$, nous posons $(f \otimes g)(x,y) = f(x)g(y)$. Nous définissons ainsi $f \otimes g$ comme une forme bilinéaire sur $E \times F$. C'est le produit tensoriel des deux formes f et g. Si $\{e^1,...,e^p\}$ est une base de E^* et $\{f^1,...,f^q\}$ une base de F^*, alors l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur $E \times F$ admet pour base les pq éléments $e^i \otimes f^j$. Par définition, l'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times F$ est noté $E^* \otimes F^*$ et appelé produit tensoriel de E^* et F^*. Tout élément $T \in E^* \otimes F^*$ s'écrit donc $T = T_{ij} e^i \otimes f^j$. Nous savons d'autre part que tout vecteur de E peut être considéré comme une forme linéaire sur E^*, c'est à dire comme élément de E^{**} (en dimension finie, nous avons $E^{**} \simeq E$). Nous pouvons donc appliquer ce schéma de construction à E^* et E^* afin de définir le produit tensoriel $E \otimes F \simeq E^{**} \otimes F^{**}$. Une base de $E \otimes F$ est alors $\{e_i \otimes f_j\}$ où $\{e_i\}$ et $\{f_j\}$ sont des bases de E et F. Nous avons alors les règles algébriques suivantes, faciles à vérifier : si $x,x_1,x_2 \in E$, $y,y_1,y_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

Nous pouvons itérer ce processus et définir ainsi $E \otimes ... \otimes E \otimes F \otimes ... \otimes F$ Pour la suite, on prendra $F = E^*$ et les éléments de $T^s_r(E) = \underbrace{E \otimes ... \otimes E}_{\text{s fois}} \otimes \underbrace{E^* \otimes ... \otimes E^*}_{\text{r fois}}$ sont des formes $(r+s)$-linéaires sur $\underbrace{E^* \otimes ... \otimes E^*}_{\text{r fois}} \otimes \underbrace{E \otimes ... \otimes E}_{\text{s fois}}$.
Un tel élément s'écrit $T = T^{i_1...i_s}_{j_1...j_r} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_r}$, c'est un tenseur de type (s,r). Nous dirons que les coefficients $T^{i_1...i_s}_{j_1...j_r}$ sont les coordonnées du tenseur T dans la base

$$\left\{ e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_r},\ i_1,...,i_s,j_1,...,j_r \in \{1,...,p\} \right\}.$$

Effectuons un changement de base $e'_i = a^j_i e_j$ dans E. Nous avons alors $e'^i = (a^{-1})^i_j e^j$. On montre que les coordonnées du tenseur T se transforment selon :

$$T'^{i_1...i_s}_{j_1...j_r} = (a^{-1})^{i_1}_{k_1} ... (a^{-1})^{i_s}_{k_s} T^{k_1...k_s}_{l_1...l_r} a^{l_1}_{j_1} ... a^{l^r}_{j_r}$$

De cette relation, nous dirons que les indices bas de T sont covariants, et les indices hauts contravariants. Un élément de $\mathbb{R}$ est par convention un tenseur de type (0,0). Ces tenseurs sont appelés des scalaires. Ces tenseurs n'ayant pas d'indice, par la relation précédente ils sont invariants par changements de base. C'est bien ce qu'on attend d'un scalaire. Un tenseur de type (1,0) est bien sûr un vecteur de E, et un tenseur de type (0,1) est une forme de E^*. Nous dirons qu'un tenseur $T = T^{i_1...i_s} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s}$ est symétrique si Les opérations de produit tensoriel et de contraction permettent de construire de nouveaux tenseurs à partir de tenseurs donnés.

7.2 Formes différentielles

Définition 7.2 (Formes n-linéaires).
On appelle forme n-linéaire, toute application $\varphi : \underbrace{E \times E \times ... \times E}_{n\ fois} \to \mathbb{R}$ *qui est linéaire par rapport à chaque composante indépendamment, i.e chaque application*

$$\begin{array}{rccc} \varphi^i : & E & \to & \mathbb{R} \\ & a & \mapsto & \varphi\,(x_1,...,x_{i-1},a,x_{i+1},...,x_n) \end{array}$$

est linéaire $\forall\,(x_1,...,\hat{x}_i,...,x_n) \in E^{n-1}$, $\forall i \in \{1,...,n\}$
L'ensemble des formes n-linéaires sur E *sera noté* $\mathcal{L}^n(E)$.
En posant pour tout $\varphi,\psi \in \mathcal{L}^n(E)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\varphi + \psi)(x_1,...,x_n) & = & \varphi(x_1,...,x_n) + \psi(x_1,...,x_n) \\ (\lambda \cdot \varphi)(x_1,...,x_n) & = & \lambda \times \varphi(x_1,...,x_n) \end{array} \right.$$

les applications $\varphi + \psi$ *et* $\lambda \cdot \varphi$ *sont encore n-linéaires.*
Muni de ces opérations, l'ensemble $\mathcal{L}^n(E)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

Exercice 7.1. *En notant $\mathscr{L}(\mathsf{E},\mathsf{F})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications linéaires de E dans F, montrer que $\mathcal{L}^{n+1}(\mathsf{E}) \simeq \mathscr{L}(\mathsf{E},\mathcal{L}^n(\mathsf{E}))$*

Si $\mathscr{B} = \{e_1,..,e_d\}$ est une base de E alors la n-linéarité de φ

$$\begin{aligned}\varphi(x_1,...,x_n) &= \varphi\left(\sum_{i_1=1}^{d} \lambda_{i_1} e_{i_1},..., \sum_{i_n=1}^{d} \lambda_{i_n} e_{i_n}\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{d} ... \sum_{i_n=1}^{d} \varphi(e_{i_1},...,e_{i_n}) \\ &= \sum_{(i_1,...,i_n)\in\{1,...,d\}^n} \lambda_{i_1...i_n} (x_1)_{i_1} ... (x_n)_{i_m}\end{aligned}$$

où $(x)_j$ désigne la $j^{\text{ième}}$ composante de x dans la base $\mathscr{B}$.

Soit $\mathscr{B}^* = \{e_1^*,..,e_d^*\}$ la base duale de $\mathscr{B}$ i.e la base du dual E^* telle que $e_i^*(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ On a $(x)_j = e_j^*(x)$ donc la dernière égalité se réécrit :

$$\begin{aligned}\varphi(x_1,...,x_n) &= \sum_{(i_1,...,i_n)\in\{1,...,d\}^n} \lambda_{i_1...i_n} e_{i_1}^*(x_1)...e_{i_n}^*(x_n) \\ &= \sum_{(i_1,...,i_n)\in\{1,...,d\}^n} \lambda_{i_1...i_n} \left(e_{i_1}^* \otimes ... \otimes e_{i_n}^*\right)(x_1,...,x_n)\end{aligned}$$

Il s'ensuit que la famille de toutes les formes n-linéaires de la forme $e_{i_1}^* \otimes ... \otimes e_{i_n}^*$ constitue une base pour $\mathcal{L}^n(\mathsf{E})$, en particulier $\dim \mathcal{L}^n(\mathsf{E}) = (\dim \mathsf{E})^n = d^n$.

Action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathcal{L}^n(\mathsf{E})$

Notons $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1,...,n\}$; posons pour chaque $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\varphi \in \mathcal{L}^n(\mathsf{E})$

$$(\sigma \cdot \varphi)(x_1,...,x_n) = \varphi(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(n)})$$

L'application $\sigma \cdot \varphi$ est une forme n-linéaire et on a définit ainsi une opération de groupes

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n \times \mathcal{L}^n(\mathsf{E}) & \to & \mathcal{L}^n(\mathsf{E}) \\ (\sigma,\varphi) & \mapsto & \sigma \cdot \varphi \end{array}$$

Définition 7.3 (Formes alternées).

Une forme n-linéaire f est dite alternée si pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on a

$$f(x_1,...,x_n) = \epsilon(\sigma) f(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(n)})$$

$\epsilon(\sigma)$ étant la signature de σ qui est égale à $(-1)^\nu$ où ν désigne le nombre d'inversions de σ, i.e $\nu = \operatorname{card}\left\{(i,j) \in \{1,...,n\}^2,\ i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\right\}$.

Exercice 7.2.
Soit f une forme n-linéaire. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :
1. *f est alternée.*
2. *Pour tout i,j $(i \neq j)$ dans $\{1,...,n\}$, si $x_i = x_j$ alors $f(x_1,...,x_n) = 0$.*
3. *Pour tout i dans $\{1,...,n\}$, si $x_i = x_{i+1}$ alors $f(x_1,...,x_n) = 0$.*

On note par $\bigwedge^n E^*$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E et

$$\bigwedge E^* = \bigoplus_{k=0}^{+\infty} \bigwedge^k E^* = \bigoplus_{k=0}^{n} \bigwedge^k E^*.$$

On cherche à présent à former des éléments de $\bigwedge^n E^*$ à partir des éléments de $\mathcal{L}^n(E)$. Par exemple, si $f \in \mathcal{L}^2(E)$, on peut définir $Af(x,y) = \frac{1}{2}(f(x,y) - f(y,x))$. Alors $Af \in \mathcal{L}^2(E)$ et $Af = f$ si et seulement si f est déjà alternée. Plus généralement, on définit l'opérateur suivant :

Définition 7.4.
L'alternateur ou l'antisymétriseur est l'opérateur $A_n : \mathcal{L}^n(E) \to \mathcal{L}^n(E)$ défini par

$$A_n f(x_1,...,x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) f(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(n)}).$$

Exercice 7.3.
1. *Montrer que l'opérateur $A_n : \mathcal{L}^n(E) \to \mathcal{L}^n(E)$ est un projecteur linéaire. Plus précisément : $A_n|_{\bigwedge^n(E)} = Id_{\bigwedge^n(E)}$ et $A_n \circ A_n = A_n$.*
2. *Déduire la décomposition : $\mathcal{L}^n(E) = \ker A_n \oplus \bigwedge^n(E)$ en sous-espaces $\mathfrak{S}_n$-invariants.*

Définition 7.5 (Produit extérieur).
On définit une opération $\wedge : \bigwedge^n(E) \oplus \bigwedge^m(E) \to \bigwedge^{n+m}(E)$ appelée "produit extérieur" par :

$$f \wedge g = \frac{(n+m)!}{n! \cdot m!} A_{n+m}(f \otimes g)$$

i.e $(f \wedge g)(x_1,...,x_{n+m}) = \frac{1}{n!m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+m}} \epsilon(\sigma) f(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(n)}) g(x_{\sigma(n+1)},...,x_{\sigma(n+m)})$

On résume, dans le théorème suivant, les principales propriétés du produit extérieur

Théorème 7.2.1.
1. L'application $\left\{ \begin{array}{llll} \wedge : & \bigwedge^n(E) \times \bigwedge^m(E) & \to & \bigwedge^{n+m}(E) \\ & (f,g) & \mapsto & f \wedge g \end{array} \right.$ est bilinéaire.
2. $f \wedge g = (A_n f) \wedge g = f \wedge (A_m g)$
3. associativité : $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$
4. anticommutativité : si $f \in \bigwedge^n(E)$ et $g \in \bigwedge^m(E)$ alors $f \wedge g = (-1)^{nm} g \wedge f$

Démonstration.

1. C'est immédiat, car le produit tensoriel est bilinéaire et l'antisymétriseur est linéaire.
2. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ alors

$$\begin{aligned}
[(\sigma \cdot f) \otimes g](x_1,...,x_n,x_{n+1},...,x_{n+m}) &= (\sigma \cdot f)(x_1,...,x_n)g(x_{n+1},...,x_{n+m}) \\
&= f(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(n)})g(x_{n+1},...,x_{n+m}) \\
&= f(x_{\sigma'(1)},...,x_{\sigma'(n)})g(x_{\sigma'(n+1)},...,x_{\sigma'(n+m)}) \\
&= [\sigma' \cdot (f \otimes g)](x_1,...,x_n,x_{n+1},...,x_{n+m})
\end{aligned}$$

$$\text{où} \quad \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & ... & n & n+1 & ... & n+m \\ \sigma(1) & ... & \sigma(n) & n+1 & ... & n+m \end{pmatrix}$$

donc $(\sigma \cdot f) \otimes g = \sigma' \cdot (f \otimes g)$ avec $\epsilon(\sigma') = \epsilon(\sigma)$, par suite

$$\begin{aligned}
A_{n+m}(A_n f \wedge g) &= \frac{1}{(n+m)!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{n+m}} \epsilon(\tau)\tau \cdot \left[\left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma)\sigma \cdot f \right) \otimes g \right] \\
&= \frac{1}{(n+m)!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{n+m}} \epsilon(\tau) \frac{1}{n!} \tau \cdot \left[\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma)(\sigma \cdot f) \otimes g \right] \\
&= \frac{1}{(n+m)!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{n+m}} \epsilon(\tau) \frac{1}{n!} \tau \cdot \left[\sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_{n+m}} \epsilon(\sigma')\sigma' \cdot (f \otimes g) \right] \\
&= \frac{1}{(n)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{1}{(n+m)!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{n+m}} \epsilon(\tau \cdot \sigma')(\tau \cdot \sigma') \cdot (f \otimes g) \\
&= \frac{1}{(n)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} A_{n+m}(f \otimes g) \\
&= A_{n+m}(f \otimes g)
\end{aligned}$$

on déduit, de la même façon, que $A_{n+m}(f \otimes A_m g) = A_{n+m}(f \otimes g)$, d'où le point 2.

3. à partir de la propriété précédente on a

$$\begin{aligned}
(f \wedge g) \wedge h &= \frac{(n+m+p)!}{(n+m)!p!} A_{n+m+p} \left[\frac{(n+m)!}{n!m!} A_{n+m}(f \otimes g) \otimes h \right] \\
&= \frac{(n+m+p)!}{n!m!p!} A_{n+m+p} \left[(f \otimes g) \otimes h \right] \\
&= \frac{(n+m+p)!}{n!(m+p)!} A_{n+m+p} \left[f \otimes \frac{(m+p)!}{m!p!} A_{m+p}(g \otimes h) \right] \\
&= f \wedge (g \wedge h)
\end{aligned}$$

4. Définissons σ par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & ... & n & n+1 & ... & n+m \\ m+1 & ... & m+n & 1 & ... & m \end{pmatrix}$$

alors $\epsilon(\sigma) = (-1)^{nm}$ et on a :

$$\begin{aligned}[\sigma \cdot (f \otimes g)](x_1,...,x_n,x_{n+1},...,x_{n+m}) &= (f \otimes g)(x_{m+1},...,x_{m+n},x_1,...,x_m) \\ &= g(x_1,...,x_m)f(x_{m+1},...,x_{m+n}) \\ &= (g \otimes f)(x_1,...,x_{n+m})\end{aligned}$$

donc $\sigma \cdot (f \otimes g) = g \otimes f$, par suite

$$\begin{aligned}A_{n+m}(g \otimes f) &= \frac{1}{(n+m)!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{n+m}} \epsilon(\tau)(\tau\sigma) \cdot (f \otimes g) \\ &= \epsilon(\sigma)\frac{1}{(n+m)!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{n+m}} \epsilon(\tau\sigma)(\tau\sigma) \cdot (f \otimes g) \\ &= \epsilon(\sigma)\frac{1}{(n+m)!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_{n+m}} \epsilon(\rho)\rho \cdot (f \otimes g) \\ &= (-1)^{nm} A_{n+m}(f \otimes g)\end{aligned}$$

(L'application $\tau \mapsto \rho = \tau \circ \sigma$ étant un automorphisme sur $\mathfrak{S}_{n+m}$)

□

Définition 7.6 (image inverse d'une forme multilinéaire).
Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $\phi : E \to F$ une application linéaire, on définit $\phi^* : \mathcal{L}^m(F) \to \mathcal{L}^m(E)$ par

$$\phi^*(f)(x_1,...,x_m) = f(\phi(x_1),...,\phi(x_m))$$

Théorème 7.2.2.

1. *L'application $\phi^* : \mathcal{L}^m(F) \to \mathcal{L}^m(E)$ est linéaire et commute avec l'action de $\mathfrak{S}_m$.*
2. *$\phi^*(f \wedge g) = \phi^*(f) \wedge \phi^*(g)$ pour tous $f, g \in \wedge(E^*) = \oplus_{n=0}^{n=\infty} \wedge^n (E^*)$*
3. *$(\phi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \phi^*$*

Démonstration. S'en convaincre est un excellent exercice. □

Théorème 7.2.3.
Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de bases $\mathscr{B}_E = (e_1,...,e_n)$, $\mathscr{B}_F = (f_1,...,f_m)$ et de bases duales $(e_1^*,...,e_n^*)$ et $(f_1^*,...,f_m^*)$ respectivement. Soit ϕ :

$E \to F$ une application linéaire de matrice $(a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$, relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_E$. On a pour tout $k \le \min(n,m)$:

$$\phi^*(f_{j_1}^* \wedge ... \wedge f_{j_k}^*) = \sum_{1\le i_1<...<i_k\le n} \left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \epsilon(\sigma) a_{j_1 i_{\sigma(1)}} a_{j_2 i_{\sigma(2)}} .... a_{j_k i_{\sigma(k)}} \right) (e_1^* \wedge ... \wedge e_n^*)$$

En particulier, si $n = m$, alors

$$\phi^*(f_1^* \wedge ... \wedge f_n^*) = \det(a_{ij}) e_1^* \wedge ... \wedge e_n^*$$

Démonstration. □

Théorème 7.2.4.
Soit $E =< e_1,...,e_n >$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Pour tout $k > n$, $\wedge^k E^* = \{0\}$ et pour tout $k \le n$, $\wedge^k E^*$ est engendré par la famille des formes k-linéaires alternées $\{e_{i_1}^* \wedge ... \wedge e_{i_k}^* / \ 1 \le i_1 < ... < i_k \le n\}$. En particulier, $\dim \wedge^k E^* = C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

Démonstration. □

Définition 7.7 (formes différentielles).
On appelle $\mathscr{C}^k$-forme différentielle de degré r, sur une variété différentielle M, toute application $\alpha \in \Omega_k^r(M) = \mathscr{C}^k(M, \wedge^r E^*)$

Cohomologie de De Rham

Soit E un espace normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et U un ouvert de E. On considère l'espace vectoriel $\Omega_p^r(U)$ des formes différentielles sur U de degré p et de classe $\mathscr{C}^r$. Soit $Z_p^r(U)$ (resp. $B_p^r(U)$) le sous espace de $\Omega_p^r(U)$ constitué des formes différentielles fermées (resp. exactes). L'espace quotient : $H_p^r(U) = Z_p^r(U)/B_p^r(U)$ s'appelle $p^{\text{ième}}$ espace de cohomologie des formes différentielles de classe $\mathscr{C}^r$.

Théorème 7.2.5 (Poincaré).
Si U est étoilé alors tous les espaces de cohomologie sont réduit à $\{0\}$.

7.3 Théorème de Stokes

Définition 7.8 (Ouvert à bord).
Soit M une variété et Ω un ouvert de M, on dit que Ω est un ouvert à bord si $\forall x \in Fr\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$, $\exists (U,\varphi)$ carte centrée en x telle que $\varphi(U \cap \Omega) = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \varphi(U),\ x_n > 0\}$

Exercice 7.4.
Montrer que Ω est un ouvert à bord si et seulement si $\forall x_0 \in Fr\Omega$, $\exists U$ voisinage ouvert de x_0, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ tels que $f(x_0) = 0$ et $U \cap \Omega = \{x \in U,\ f(x) > 0\}$.

Exemples.

1. *Si $\varphi \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R})$ alors $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y < \varphi(x)\}$ est un ouvert à bord de $\mathbb{R}^2$ $\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = \varphi(x)\}$*
2.

Théorème 7.3.1.
Si Ω est un ouvert à bord alors $Fr\Omega$ est une hypersurface de classe $\mathscr{C}^\infty$, sans bord.

Démonstration. □

Définition 7.9 (Orientabilité). *Une variété différentielle M est dite orientable s'il existe sur M une n-forme ω (dite aussi forme volume) qui ne s'annule jamais.*

Si M est une variété connexe orientable, on peut munir l'espace des formes volumes sur M par la relation d'équivalence suivante $\omega_1 \sim \omega_2$ s'il existe $f > 0$ telle que $\omega_2 = f\omega_1$. On obtient alors deux classes d'équivalences. Orienter M sera de choisir une classe d'équivalence $[\omega]$ (une orientation).

Exercice 7.5.

1. *Montrer qu'une variété différentielle est orientable si et seulement si elle admet un atlas dont les jacobiens des fonctions de transitions sont positifs i.e il existe sur M un atlas $\mathcal{A} = \{(U_i,\varphi_i),\ i \in I\}$ tel que $\forall i,j \in I$, $\forall x \in U_i \cap U_j$ $\det(D_{\varphi_j(x)}\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) > 0$*
2. *$\mathbb{R}^n_+$ est-elle une variété à bord orientable?*

Théorème 7.3.2 (Stokes).
Soit M une variété différentielle de dimension n, orientable et soit Ω un ouvert à bord de M relativement compact. Si $\omega \in \Omega_0^{n-1}(M)$ tel que $\omega|_\Omega$ est de classe $\mathscr{C}^1$ ou bien si $\omega \in \Omega_1^{n-1}(M)$ alors :

1. *Si M est compacte, $\int\limits_M d\omega = 0$*
2. *$\int\limits_\Omega d\omega = \int\limits_{\partial\Omega} i^*\omega$ où $i : \partial\Omega \to M$ est l'injection canonique.*

Chapitre 8

Variétés Riemanniennes

8.1 Symboles de Christoffel et connexions

Une connexion Γ sur une variété différentielle M est une opération qui, à un chemin de classe $\mathscr{C}^k$ $\gamma : [0,1] \to M$ reliant x et y i.e $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$, induit un unique isomorphisme $\widetilde{\gamma} : T_xM \to T_yM$ (holonomie en x si $y = x$). On veut différencier les champs de vecteurs mais comme ils sont à valeurs dans différents espaces tangents à des points différents.

Définition 8.1.
Une connexion linéaire sur M est la donnée d'une application bilinéaire ∇ : $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \mapsto \mathcal{X}(M)$ qu'on écrit $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$, vérifiant les propriétés:

i) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$ *pour tout* $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$

ii) ∇ *vérifie la règle de Leibniz:* $\nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + X(f)Y$ $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$.

$\nabla_X Y$ *est appelé la dérivée covariante de Y dans la direction de X.*

En coordonnées locales une connexion est représentée à l'aide des symboles de Christoffel Γ_{ij}^k. Soit $x^1, \ldots, x^n$ un système de coordonnées locales sur $U \subset M$, et soit $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}$ la base associée des champs de vecteurs. En utilisant les conventions de sommation d'Einstein, les symboles de Christoffel sont définies par :

$$\Gamma_{ij}^k \, \partial_{x_k} = \nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j}.$$

Définition 8.2.

- *La torsion de ∇ est définie par :*

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

- *La courbure de ∇ est définie par :*

$$R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

Une connexion linéaire est dite symétrique si sa torsion est nulle. Si, en plus sa courbure est nulle, on dit qu'elle est plate.

Exercice 8.1.
Soit G un groupe de Lie. Expliquer pourquoi on définit une connexion sur G en posant $\nabla_{L_\omega} L_\xi = \frac{1}{2}[L_\omega, L_\xi]$ où L_ω désigne le champ de vecteur invariant à gauche engendré par le vecteur $\omega \in \mathfrak{g}$. Montrer que cette connexion est symétrique et calculer sa courbure.

8.2 Géodésiques

8.3 Courbures

Les variétés de dimension finie sont localement euclidiennes (mais pas globalement). On dispose d'une notion, appelée "la courbure", qui permet de mesurer l'écartement de l'euclidien, dans le passage du local au global.

Définition 8.3 (Métrique Riemannienne).
*Une **métrique Riemannienne** sur M est la donnée, pour tout $x \in \mathsf{M}$, d'un produit scalaire $< , >_x$ sur $\mathsf{T}_x\mathsf{M}$ vérifiant la propriété suivante : si X et Y sont deux champs de vecteurs de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur M, $x \mapsto < \mathsf{X}(x), \mathsf{Y}(x) >_x$ est $\mathscr{C}^\infty$. Supposons donnée une structure Riemannienne sur une variété M de classe $\mathscr{C}^\infty$, connexe, séparée, et de dimension finie. Si $c : [0,1] \mapsto \mathsf{M}$ est une courbe de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur M on pose*

$$l(c) = \int_0^1 \sqrt{< c'(t), c'(t) >_{c(t)}} \quad dt$$

De plus, si x et y sont deux point de M on note $d(x,y) = \inf\{l(c)\}$ l'infimum étant pris sur l'ensemble des chemins de classe $\mathscr{C}^\infty$ tels que $c(0) = x$ et $c(1) = y$. On montre que la restriction de d à un domaine de carte est une métrique compatible avec la topologie de la variété M.

Chapitre 9

Annexe

9.1 Algèbre et théorie des ensembles

Lemme de Zorn Un ensemble ordonné E est *inductif* si toute partie totalement ordonné de E (chaîne) admet un majorant. le lemme de Zorn s'énonce alors : Tout ensemble ordonné inductif admet un élément maximal. Ce lemme est équivalent à l'*axiome de choix* et est d'usage constant (voir la démonstration du théorème de Hahn-Banach, de Tychonov...)

factorisation canonique d'une application Si $f : E \to F$ est une application entre deux ensembles E et F, elle définit sur E la relation d'équivalence : $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ et on a la factorisation suivante :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi \text{ projection canonique}"'] & F \\ U/\sim \arrow[r, "\overline{f}"'] & f(E) \arrow[u, "i \text{ injection canonique}"'] \end{tikzcd}$$

9.2 Topologie générale

Ordre sur l'ensemble des topologies Soient sur un ensemble non vide X deux topologies τ et τ_1, on dit que τ est plus fine que τ_1 si $\tau \supset \tau_1$ ceci revient au même de dire que l'application identité $\mathrm{Id}_X : (X,\tau) \to (X,\tau_1)$ est continue.

Topologie engendrée par une famille Si $A \subset \mathcal{P}(X)$ il existe aux moins une topologie sur X pour laquelle tout élément de A est ouvert (par exemple la topologie discrète). L'intersection de toutes ces topologies est une topologie, qui est la moins fine contenant A, appelée *topologie engendrée* par A et est notée $\tau(A)$. Si on note A_0 l'ensemble des intersections de familles finies d'éléments de A et A_∞ l'ensemble des réunions quelconques d'éléments de A_0 alors $A_\infty = \tau(A)$.

Base d'une topologie $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ est une base d'ouverts d'une topologie τ sur X si tout élément de τ est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$, ceci équivaut à

$$\forall U,V \in \mathcal{B},\, \forall x \in U \cap V,\, \exists \theta \in \mathcal{B},\, x \in \theta \subset U \cap V.$$

Il est immédiat que A_0 est une base de $\tau(A)$.

Définition 9.1.
Un espace topologique X est dit

1. séparable *s'il admet une partie dénombrable dense.*
2. localement connexe *si tout point possède un système fondamental de voisinages connexes.*
3. localement compact *s'il est séparé et si tout point admet un voisinage compact (ceci implique que tout point possède un système fondamental de voisinages compacts).*
4. σ-compact *s'il est séparé et union dénombrable de compacts.*
5. dénombrable à l'infini *s'il est séparé et recouvert par une suite $(K_n)_{n\geq 0}$ exhaustive de compacts i.e $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$.*

Topologie initiale
Topologie finale

Partition de l'unité Dans toute cette section X désigne un espace topologique.

support Si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, on appel *support* de f l'ensemble fermé $\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in X,\ f(x) \neq 0\}}$, c'est le complémentaire du plus grand ouvert dans lequel f est nulle (dit ouvert d'annulation).

famille localement finie Une famille $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de parties de X est dite *localement finie* si pour tout x dans X, il existe un voisinage de x ne rencontrant qu'un nombre fini de U_λ i.e

$$\forall x \in X,\, \exists V \in \mathcal{V}_{(x)},\ \operatorname{card}\big(\{\lambda \in \Lambda,\, V \cap U_\lambda \neq \varnothing\}\big) < +\infty$$

On dit de même pour une famille de fonctions continues $(f_i)_{i\in I}$ si la famille de leurs supports $(\operatorname{supp}(f_i))_{i\in I}$ est localement fini.

raffinement Un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ est *plus fin* qu'un recouvrement ouvert $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$, ou que $\mathcal{U}$ est un *raffinement* de $\mathcal{V}$ si pour tout i il existe j tel que V_j contient U_i i.e

$$\forall i \in I,\, \exists j(i) \in J \quad U_i \subset V_j$$

paracompact Un espace topologique est paracompact s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert admet un recouvrement ouvert localement fini plus fin (i.e un raffinement localement fini).

partition de l'unité Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de X. Une famille $\{g_i\}_{i\in I}$ de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$ est une *partition de l'unité* subordonnée à $\mathcal{U}$ si elle vérifie les propriétés suivantes

1. $g_i(x) \geq 0$ pour tout $i \in I$ et tout $x \in X$
2. $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$ Pour tout $i \in I$
3. $\sum\limits_{i\in I} g_i(x) = 1$ pour tout $x \in X$.

Voici quelques résultats très utiles

Théorème 9.2.1.

1. *Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille localement finie, alors $(\overline{A_i})_{i\in I}$ est une famille localement finie, et $\overline{\cup_{i\in I} A_i} = \cup_{i\in I}\overline{A_i}$*
2. *Si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille localement finie de fonctions continues alors $f = \sum_{i\in I} f_i$ est définie et continue, de plus $\operatorname{supp} f \subset \cup_{i\in I} \operatorname{supp} f_i$*

Théorème 9.2.2.
Pour qu'un espace topologique séparé X soit paracompact, il faut et il suffit que tout recouvrement ouvert de X admet une partition de l'unité qui lui est subordonnée.

Supplémentaires topologiques Soit B un espace de Banach et E un sous-espace vectoriel de B. Le sous-espace E admet toujours un supplémentaire algébrique F mais, en général, l'application $(x_1,x_2) \in E \times F \mapsto x_1 + x_2$ n'est pas un homéomorphisme. C'en est un si et seulement si son inverse $x \mapsto (\operatorname{pr}_1(x), \operatorname{pr}_2(x))$ est continu, i.e. si et seulement si les projections pr_1 et pr_2 sont continues.

Définition 9.2. *Soit B un espace de Banach. On dit qu'un sous-espace E de B admet un* supplémentaire topologique *s'il admet un supplémentaire F (algébrique) tel que $(x_1,x_2) \mapsto x_1 + x_2$ soit un homéomorphisme de $E \times F$ sur B. On dit aussi que E est un* facteur direct topologique. *Comme $E \oplus F \simeq F \oplus E$ on peut inverser les roles de E et F.*

Si $B = E_1 \oplus E_2$ alors E_1 et E_2 sont fermés puisque $E_i = \operatorname{pr}_i^{-1}(0)$. Un projecteur $p : B \to B$ est une application linéaire telle que $p \circ p = p^2 = p$.

Proposition 9.1. *Soient B un espace de Banach et E un sous-espace fermé de B. Pour que E admette un supplémentaire topologique, il faut et il suffit qu'il existe un projecteur continu p sur B tel que $p(B) = E$.*

Démonstration. Si E admet un supplémentaire topologique F, d'après ce qui précède, la projection parallèlement à F est un projecteur continu sur B d'image E. Soit p un projecteur continu sur B tel que $p(B) = E$. Si $F = \ker p$, $\mathrm{Id}_B - p$ est un projecteur sur B d'image F ; p et $\mathrm{Id}_E - p$ sont donc les projecteurs associés à la décomposition de E en somme directe ; comme ils sont continus, B est somme directe topologique de E et F. □

En dimension finie les sous espaces sont fermés, les applications linéaires sont continues ; il en résulte que tout sous-espace admet un supplémentaire topologique. Ceci n'est pas vrai sur un Banach quelconque. On montre que si E est de dimension finie, ou de codimension finie dans B, il admet un supplémentaire topologique. Dans le cas des espaces de Hilbert, la situation est bien plus simple.

Théorème 9.2.3.
Tout sous-espace fermé E d'un espace de Hilbert H admet un supplémentaire topologique

$$E^{\perp} = \{x \in H;\ < x,y >= 0\ \forall y \in E\}.$$

*qui est appelé l'*orthogonal *de E dans H.*

La notion de supplémentaire topologique permet de définir les submersions et les immersions et donne les versions du théorème du rang en dimension infinie. Pour plus de détail voir Marsden, Ratiu [8] et Boubakar, Vinel [2]

Théorème 9.2.4.
Soient E et F deux espaces de Banach, f une application linéaire continue de E dans F, et g une application linéaire continue de F dans E

1. *Pour que f admette un inverse à gauche continu, il faut et il suffit que f soit injective et que son image admette un supplémentaire topologique dans F.*
2. *Pour que g admette un inverse à droite continu, il faut et il suffit que g soit surjective et que son noyau admette un supplémentaire topologique dans F.*

Démonstration.
1. Supposons que f est injective et que son image est fermée et admet un supplémentaire topologique ; il existe donc un projecteur continu p de F dans F tel que $p(F) = f(E)$. Alors, $f^{-1} \circ p : F \to E$ est un inverse à gauche continu de f. Réciproquement, si f admet un inverse à gauche continu φ de F dans E, $f \circ \varphi$ est un projecteur continu d'image $f(E)$.
2. Si g est une application linéaire surjective dont le noyau fermé admet un supplémentaire topologique F_1, soit i l'injection canonique de F_1

dans F. $g \circ i$ est un isomorphisme de F_1 dans E et $s = (g \circ i)^{-1}$, considérée comme application de E dans F, est un inverse à droite de g. Réciproquement, si s est un inverse à droite continu de g, $s \circ g$ est un projecteur continu de noyau $\ker g$.

□

Exponentielle complexe

Théorème 9.2.5. *on définit l'exponentielle complexe, qui est un morphisme de groupes, par*

$$\begin{array}{rccc} f = \exp : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^\star \\ & z & \mapsto & \exp z = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \quad \textit{notée aussi } e^z \end{array}$$

et on a les propriétés suivantes :

1. $e^{z_1} \times e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ *en particulier* $(e^z)^{-1} = e^{-z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
2. *cette application est surjective et périodique de période* $2\pi i$ *et* $\ker(\exp) = 2\pi i\mathbb{Z}$.
3. *c'est un* $\mathscr{C}^\infty$ *revêtement et* $\forall z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^\star$, $\log z = \log r + i\theta + i2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. L'application est bien définie car la série converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$.

1.

$$\begin{aligned} e^{z_1} \times e^{z_2} = \left(\sum_{n\geq 0} \frac{z_1^n}{n!}\right) \times \left(\sum_{n\geq 0} \frac{z_2^n}{n!}\right) &= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{z_2^k}{k!}\right) \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k z_1^{n-k} \cdot z_2^k\right) \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

donc pour tout z dans $\mathbb{C}$ e^z est inversible, i.e $\exp(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^*$ et $(e^z)^{-1} = e^{-z}$.

2. On a $e^z = 1 \Leftrightarrow e^{\mathfrak{Re} z} \cdot e^{i\mathfrak{Im} z} = 1 \Leftrightarrow \mathfrak{Re} z = 0$ et $\mathfrak{Im} z = 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ donc le noyau est donné par $\ker(\exp) = \{z \in \mathbb{C},\ \exp z = 1\} = 2\pi i\mathbb{Z}$, la fonction exponentielle est donc périodique de période $r = 2\pi i$. Montrons que f est surjectif. Comme la restriction de f à $U_{z_0} = \{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| \leq \frac{\pi}{2}\}$ est un homéomorphisme sur son image pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, f est un homéomorphisme local donc c'est une application ouverte, par suite

$f(\mathbb{C})$ est un sous-groupe ouvert de $\mathbb{C}^*$. On déduit, par connexité de $\mathbb{C}^*$, que $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$, en effet si $H = \mathbb{C}^* \backslash f(\mathbb{C}) \neq \varnothing$ et comme $H = \bigcup_{z \in H} z{\cdot}f(\mathbb{C})$, H serais un ouvert non vide de $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{C}^* = H \cup f(\mathbb{C})$ ce qui contredit la connexité de $\mathbb{C}^*$, donc $H = \varnothing$ et f est surjectif.

3.

$\square$

9.3 Problème de Cauchy

Soit $f\ : U \subset \mathbb{R} \times B \to B$ une fonction continue à valeur dans un Banach B, on considère l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{9.1}$$

Une fonction différentiable $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to B$ est dite solution de l'équation (9.1) si :

$$\begin{cases} \text{i)} & (t,\varphi(t)) \in U & \text{pour tout } t \in I \\ \text{ii)} & \varphi'(t) = f(t,\varphi(t)) & \text{pour tout } t \in I \end{cases}$$

Si φ est une solution de l'équation (9.1) et si f est de classe $\mathscr{C}^k$ alors φ est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$.

Exemples. *$x'(t) = x(t)$ admet une infinité de solutions : $x(t) = ae^t$, $a \in \mathbb{R}$. Si on se donne la* condition initiale *$x(0) = x_0$, alors le problème admet une unique solution $x(t) = x_0 e^t$.*

La question "naturelle" qui se posent est : quels sont les conditions pour que l'équation (9.1) admet une unique solution ? la réponse est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 9.3.1 (Cauchy-Lipschitz).
Soit $f\ :\ (t,x) \in U \subset \mathbb{R} \times B \mapsto f(t,x) \in B$ une fonction continue à valeur dans un Banach B. Si f est localement Lipschitzienne par rapport à x alors le problème de Cauchy :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = f(t,x) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases} \tag{9.2}$$

admet une unique solution définie sur un voisinage de t_0.

Démonstration.
Avant de montrer ce théorème précisons quelques notations

$$\exists \alpha > 0,\ \exists r > 0,\ \forall t \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[,$$
$$\forall (x,y) \in B(x_0,r) \times B(x_0,r),\ \exists k > 0, \quad \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k\|x - y\|$$

$\Omega =]t_0 - h,t_0 + h[\times B(x_0,r) \subset U$ est appelé *cylindre de sécurité*, quitte à diminuer α et r on peut supposer $\overline{\Omega} \subset U$ et on pose $M = \sup\limits_{(t,x)\in\overline{\Omega}} \|f(t,x)\|$

Remarquons tout d'abord que :

$$\begin{aligned} x \text{ solution de } (\mathcal{P}) \quad &\Leftrightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds \\ &\Leftrightarrow \quad x \text{ point fixe de T où } Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds \end{aligned}$$

Le problème sera donc de construire un espace complet, là où l'opérateur T est contractant, et de conclure grâce au théorème du point fixe. Soit $h = \min(\alpha,\frac{r}{M})$ et considérons l'espace

$$E = \left\{ x \in \mathscr{C}\big([t_0 - h,t_0 + h],\overline{B}(x_0,r)\big),\ \sup_{|t-t_0|\le h} \|x(t) - x_0\| \le Mh \right\}$$

Il est claire que E est un espace de Banach, pour la norme $\|x - y\|_E = \sup\limits_{|t-t_0|\le h} \|x(t) - y_t\|_B$, c'est la boule fermée de $\mathscr{C}\big([t_0 - h,t_0 + h],\overline{B}(x_0,r)\big)$. Si $x \in E$ alors $t \mapsto Tx$ est continue et

$$\begin{aligned} \sup_{|t-t_0|\le h} \|Tx(t) - x_0\| &= \sup_{|t-t_0|\le h} \|\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds\| \\ &\le \sup_{|t-t_0|\le h} \int_{t_0}^{t} \|f(s,x(s))\|ds \\ &\le \sup_{|t-t_0|\le h} \|f(t,x(t))\| \times \sup_{|t-t_0|\le h} \int_{t_0}^{t} ds \\ &\le Mh \quad \text{i.e } Tx \in E \end{aligned}$$

D'autre part pour h assez petit T est contractant, en effet

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\| &= \sup_{|t-t_0|\le h} \|\int_{t_0}^{t} f(s,x(s)) - f(s,y(s))ds\| \\ &\le \sup_{|t-t_0|\le h} \int_{t_0}^{t} \|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\|ds \\ &\le \sup_{|t-t_0|\le h} \int_{t_0}^{t} k\|x(s) - y(s)\|ds \\ &\le k\int_{t_0}^{t} ds \times \sup_{|t-t_0|\le h} \|x(t) - y(t)\| \\ &\le kh\|x - y\| \end{aligned}$$

Si on choisit h assez petit pour que $kh < 1$ alors T sera contractant et admettra un unique point fixe (unique solution de $(\mathcal{P})$). Une autre méthode, plus subtile, pour prouver l'existence et l'unicité locale de la solution de $(\mathcal{P})$ consiste à montrer l'existence d'un point fixe d'un itéré T^{n_0} de T et ceci pour tout $h = \min(\alpha, \frac{r}{M})$ indépendamment de k. On prétend que $\forall n \geq 0$, $\|T^n x(t) - T^n y(t)\| \leq \frac{k^n|t-t_0|^n}{n!}\|x-y\|$ en effet, par récurrence

$$\begin{aligned}\|T^{n+1}x(t) - T^{n+1}y(t)\| &= \|\int_{t_0}^{t} f(s,T^n x(s)) - f(s,T^n y(s))ds\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s,T^n x(s)) - f(s,T^n y(s))\|ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} k\|T^n x(s) - T^n y(s)\|ds \\ &\leq k\int_{t_0}^{t} \frac{k^n|s-t_0|^n}{n!}\|x-y\|ds \\ &\leq \frac{k^{n+1}|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}\|x-y\|\end{aligned}$$

on déduit que $\forall n \geq 0$, $\|T^n x - T^n y\| \leq \frac{(kh)^n}{n!}\|x-y\|$ et comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{(kh)^n}{n!} = 0$ alors à partir d'un certain rang n_0, T^{n_0} devient contractant et admet donc un unique point fixe x qui est aussi point fixe de T, car $Tx = T(T^{n_0}x) = T^{n_0}(Tx)$ i.e Tx point fixe de T^{n_0} et par unicité du point fixe $Tx = x$. □

Définition 9.3 (Solutions maximales). *Un couple (I,x), où I est un* intervalle *et x une solution du problème de Cauchy* (9.2) *sur I, est appelé solution maximale s'il n'existe pas d'intervalle strictement plus grand que I sur lequel x est solution.*

L'unicité a pour conséquence le résultat suivant.

Proposition 9.2. *Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz 9.3.1, pour tout (t_0,x_0) dans U il existe une unique solution maximale (I,x) de condition initiale (t_0,x_0).*

Démonstration. Soit (I_α,x_α) toutes les solutions de condition initiale (t_0,x_0). On a d'après l'unicité locale de la solution $x_{\alpha\ |(I_\alpha\cap I_\beta)} = x_{\beta\ |(I_\alpha\cap I_\beta)}$, ce qui permet de poser $I = \bigcup I_\alpha$ et $x_{|I_\alpha} = x_\alpha$. I est bien un intervalle (réunion de connexes deux à deux non disjoints) et x est unique. L'existence de x est assurée par le lemme de Zorn. □

Théorème 9.3.2 (Principe des majorations a priori).
On suppose que U est de la forme $U = \mathbb{R}\times\Omega$. Si $x :]T_-,T_+[\to U$ est une solution maximale, alors,

- *ou bien $T_+ = +\infty$,*

- *ou bien pour tout compact K de Ω il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]T_+ - \varepsilon, T_+[$ on a $x(t) \notin K$.*

La conclusion est analogue concernant T_-.

Autrement dit une solution maximale qui cesse d'exister au bout d'un temps fini se rapproche de la frontière de U lorsque t tend vers T_+.

Démonstration. □

Une forme affaiblie de ce principe peut s'énoncer de la façon suivante : supposons qu'on peut montrer que la solution maximale issue d'un point x reste confinée dans un compact de Ω tant qu'elle est définie, alors cette solution est définie pour tous les temps positifs.

Exercice 9.1. *Montrer que les solutions maximales de : $\dot{x}(x - \sin x \cos x) = \sin t \cos t$ sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. (Indication : considérer $u = x^2 + \cos^2 x$.)*

Corollaire 7. *Si il existe un compact K de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathbb{R} \times K \subset \Omega$ et pour tout $(t,x) \in \Omega$, $x \notin K$ on a $f(t,x) = 0$ (c'est à dire si f est à support compact en x, indépendant de t), alors toutes les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$ en entier.*

Corollaire 8. *Si $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et si il existe deux constantes A et B telles que pour tout $(t,x) \in \Omega$ on a $\|f(t,x)\| \leq A\|x\| + B$, alors toutes les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$ en entier.*

En particulier c'est le cas si f est bornée, ou si f est globalement lipschitzienne en x.

Définition 9.4 (Champ de vecteurs).

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^k$ sur U est une application de classe $\mathscr{C}^k$ de U dans $\mathbb{R}^n$. On note par $\Gamma(U)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur U.

§ *Un champ de vecteurs sur une variété différentielle M est une application $X : M \to TM$ (fibré tangent de M) de classe $\mathscr{C}^k$ telle que $\forall x \in M$, $X(x) \in T_xM$ (espace tangent à M en x). voir le cours de la géométrie différentielle.*

Si $X \in \Gamma(U)$ est un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et si $a \in U$, on leur associe le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}_a) : \begin{cases} \frac{dx}{dt}|_{t=s} & = & X(x(s)) \\ x(0) & = & a \end{cases}$$

Si (x, I_a) est l'unique solution maximale de $(\mathcal{P}_a)$ on définit le flot $\{\phi_t\}_{t \in I_a}$ de X par

$$\begin{array}{rccc} \phi_t & : & U & \to & U \\ & & a & \mapsto & \phi_t(a) = x(t) \end{array}$$

Propriétés du flot

1. $\phi_0 = \mathrm{Id}_U$
2. $\forall t,s \in I_a$ si $t+s \in I_a$ alors $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$
3. $\forall s \in I_a$, $X(x(s)) = \frac{d\phi_t(a)}{dt} \mid_{t=s}$ en particulier pour $s=0$ $X(a) = \frac{d\phi_t(a)}{dt} \mid_{t=0}$

Démonstration. 1. $\forall a \in U$, $\phi_0(a) = x(0) = a$ i.e $\phi_0 = \mathrm{Id}_U$

2. $\phi_{t+s}(a) = x(t+s) = y_1(t)$ avec
   - x solution maximale de $(\mathcal{P}_a)$: $\begin{cases} \frac{dz}{dt} \mid_{t=s} & = & X(z(s)) \\ z(0) & = & a \end{cases}$
   - y_1 solution maximale de $(\mathcal{P}_{x(s)})$: $\begin{cases} \frac{dz}{dt} \mid_{t=s} & = & X(z(s)) \\ z(0) & = & x(s) \end{cases}$

   d'autre part $\phi_t \circ \phi_s(a) = \phi_t(\phi_s(a)) = \phi_t(x(s)) = y_2(t)$ avec y_2 solution maximale de $(\mathcal{P}_{x(s)})$ et par unicité $y_1 = y_2$ i.e si $t+s \in I_a$, $\phi_{t+s}(a) = \phi_t \circ \phi_s(a)$.
3. Ça résulte de la définition

$$\left.\begin{array}{rcl} \phi_t(a) & = & x(t) \\ \frac{dx}{dt} \mid_{t=s} & = & X(x(s)) \end{array}\right\} \Rightarrow X(x(s)) = \frac{d\phi_t(a)}{dt} \mid_{t=s}$$

□

Chapitre 10

Solutions des exercices

Chapitre 1

Solution de l'exercice. *(1.4, page 17)*

1. *F est une application n-linéaire donc différentiable et sa différentielle est :*
   $D_AF(H) = D_{(A_1,\ldots,A_n)}\det(H_1,\ldots,H_n) = \det(H_1,A_2\ldots,A_n)+\ldots+\det(A_1,\ldots,A_{n-1},H_n)$
2. *Si $\phi(H) = AH$ alors*

$$\begin{aligned}
D_AF(AH) &= D_aF(\phi(H)) \\
&= D_{\mathrm{Id}}(F\circ\phi)(H) \quad \textit{(car } \phi \textit{ est linéaire et } \phi(\mathrm{Id}) = A) \\
&= D_{\mathrm{Id}}(\det A \times F(H)) \quad \textit{(car } \det(AH) = \det A\cdot\det H) \\
&= \det A \times D_{\mathrm{Id}}F(H)
\end{aligned}$$

d'autre part si $H = (H_1,\ldots,H_n)$ où $H_j = (h_{1j},\ldots,h_{nj})$ est la $j^{\text{ième}}$ colonne de H alors

$$\begin{aligned}
F(\mathrm{Id}+H) - F(\mathrm{Id}) &= \det(e_1 + \sum_{k=1}^n h_{k1}e_k,\ldots,e_n + \sum_{k=1}^n h_{kn}e_k) - \det(e_1,\ldots,e_n) \\
&= \det((1+h_{11})e_1,\ldots,(1+h_{nn})e_n) - 1 \\
&= \prod_{i=1}^n (1+h_{ii}) - 1 \\
&= \sum_{i=1}^n h_{ii} + \mathrm{o}(\|H\|)
\end{aligned}$$

donc $D_{\mathrm{Id}}F(H) = \operatorname{tr} H$, $D_AF(AH) = \det A\cdot\operatorname{tr} H$ et si A est inversible $D_AF(H) = \det A\cdot\operatorname{tr} A^{-1}H$

3.

$$\begin{aligned}
D_AF(H) &= \det(H_1,A_2...,A_n) + ... + \det(A_1,...,A_{n-1},H_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} h_{k1}\det(e_1,A_2...,A_n) + ... + \sum_{k=1}^{n} h_{kn}\det(A_1,A_2...,e_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} h_{k1}(-1)^{k+1}\det A_{k1} + ... + \sum_{k=1}^{n} h_{kn}(-1)^{k+n}\det A_{kn}
\end{aligned}$$

où A_{ij} est le mineur d'ordre $n-1$ obtenu en supprimant la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice A.

$$\begin{aligned}
\det A_{ij} &= \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots\cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots\cdots & a_{1n} \\
 & & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & & \\
a_{(i-1)1} & \cdots\cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots\cdots & a_{(i-1)n} \\
a_{(i+1)1} & \cdots\cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots\cdots & a_{(i+1)n} \\
 & & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & & \\
a_{n1} & \cdots\cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots\cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \\
&= (-1)^{i+j}\det(A_1,...,A_{j-1},e_i,A_{j+1},...,A_n)
\end{aligned}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}H = ((-1)^{i+j}\det A_{ij})_{1\le i,j\le n}\cdot(h_{ij})_{1\le i,j\le n} &= (c_{ij})_{1\le i,j\le n} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}(\det A_{ik})\cdot h_{kj}\right)_{1\le i,j\le n}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\widetilde{A}H) &= \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}\det A_{ik}h_{ki}) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\det A_{1k}h_{k1} + ... + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+n}\det A_{nk}h_{kn}
\end{aligned}$$

i.e $D_AF(H) = \operatorname{tr}(\widetilde{A}H)$ et on retrouve les résultats de la question précédente.

Solution de l'exercice.

1. *Soit $M \in \mathcal{M}(m\times n,\mathbb{R})$, $\operatorname{rang} M \ge k$ si et seulement s'il existe un mineur d'ordre k de déterminant non nul, i.e $\exists (I,J) \subset \{1,...,m\} \times$*

$\{1,...,n\}$, $|I| = |J| = k$, $\det M_{I,J} \neq 0$ *où* $M_{I,J}$ *est la matrice* $k \times k$ *obtenue en supprimant les lignes* $L_i(M)$, $i \notin I$ *et les colonnes* $C_i(M)$, $i \notin J$. *Cette opération est une application continue.*

$$\begin{array}{cccc} \pi_{I,J} : & \mathcal{M}(m \times n,\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}(k \times k,\mathbb{R}) \\ & M & \mapsto & M_{I,J} \end{array} \quad \begin{array}{c} \textit{application linéaire} \\ \textit{donc continue} \end{array}$$

Comme $\operatorname{rang} M \geq k \Leftrightarrow \det \pi_{I,J}(M) \neq 0$ *il en résulte que*

$$A_k = \bigcup_{\substack{(I,J)\subset\{1,...,m\}\times\{1,...,n\} \\ |I|=|J|=k}} (\det \circ \pi_{I,J})^{-1}(\mathbb{R}^*) \text{ est un ouvert de } \mathcal{M}(m\times n,\mathbb{R})$$

2. *Soit* $x_0 \in B_k$, $\operatorname{rang} D_{x_0} f = r \geq k$ *si et seulement s'il existe un mineur d'ordre* r *de déterminant non nul i.e* $\exists (I_0,J_0) \subset \{1,...,m\}\times\{1,...,n\}$, $|I_0| = |J_0| = r$, $\det(D_{x_0} f)_{I_0,J_0} \neq 0$ *(et aucun mineur d'ordre supérieur à* r *de déterminant non nul). par continuité de l'application* $x \mapsto \det \circ \pi_{I_0,J_0}(D_x f)$ *on déduit que :* $\exists V \in \mathcal{V}_{(x_0)}$, $V \subset U$ *tel que* $\det \pi_{I_0,J_0}(D_x f) \neq 0$, $\forall x \in V$ *i.e* $\operatorname{rang} D_x f \geq k$, $\forall x \in V$ *(on référera à cette propriété en disant que le rang est semi-continu inférieurement).* B_k *est alors voisinage de chacun de ses points donc ouvert.*
3.

Solution de l'exercice.

$$\begin{cases} \phi_{n+1}^i = \phi_n^i & (1 \leq i \leq n-1) \\ \phi_{n+1}^n = \cos\theta \times \phi_n^n \\ \phi_{n+1}^{n+1} = \sin\theta \times \phi_n^n \end{cases}$$

$$\frac{D\phi_{n+1}}{D(r,\theta_1,...,\theta_{n-1},\theta)} = \begin{pmatrix} \frac{D\left(\phi_{n+1}^1,...,\phi_{n+1}^{n-1}\right)}{D(r,\theta_1,...,\theta_{n-1})} & \frac{\partial\left(\phi_{n+1}^1,...,\phi_{n+1}^{n-1}\right)}{\partial\theta} \\ \frac{D\ \phi_{n+1}^n}{D(r,\theta_1,...,\theta_{n-1})} & \frac{\partial\phi_{n+1}^n}{\partial\theta} \\ \frac{D\ \phi_{n+1}^{n+1}}{D(r,\theta_1,...,\theta_{n-1})} & \frac{\partial\phi_{n+1}^{n+1}}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D\left(\phi_n^1,...,\phi_n^{n-1}\right)}{D(r,\theta_1,...,\theta_{n-1})} & \frac{\partial\left(\phi_n^1,...,\phi_n^{n-1}\right)}{\partial\theta} \\ \frac{D(\cos\theta\times\phi_n^n)}{D(r,\theta_1,...,\theta_{n-1})} & \frac{\partial(\cos\theta\times\phi_n^n)}{\partial\theta} \\ \frac{D(\sin\theta\times\phi_n^n)}{D(r,\theta_1,...,\theta_{n-1})} & \frac{\partial(\sin\theta\times\phi_n^n)}{\partial\theta} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{D(\phi_n^1,...,\phi_n^{n-1})}{D(r,\theta_1,...,\theta_{n-1})} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \cos\theta \times \frac{D\ \phi_n^n}{D(r,\theta_1,...,\theta_{n-1})} & -\sin\theta \times \phi_n^n \\ \sin\theta \times \frac{D\ \phi_n^n}{D(r,\theta_1,...,\theta_{n-1})} & \cos\theta \times \phi_n^n \end{pmatrix}$$

en développant le déterminant par rapport à la dernière colonne on obtient :

$$\left|\frac{D\ \phi_{n+1}}{D(r,\theta_1,...,\theta_{n-1},\theta)}\right| = \cos^2\theta\times\phi_n^n \left|\frac{D\ \phi_n}{D(r,\theta_1,...,\theta_{n-1})}\right| + \sin^2\theta\times\phi_n^n \left|\frac{D\ \phi_n}{D(r,\theta_1,...,\theta_{n-1})}\right| = \phi_n^n \left|\frac{D\ \phi_n}{D(r,\theta_1,...,\theta_{n-1})}\right|$$

Chapitre 2

1^{ier} **Examen**

Exercice 10.1.

Soit Γ une hypersurface compacte, de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$. On considère l'ensemble :

$$U_\delta = \{z \in \mathbb{R}^n,\, d(z,\Gamma) < \delta\}$$

où $d(z,\Gamma) = \inf\limits_{x\in\Gamma} \|z - x\|$ est la distance euclidienne de z à Γ dans $\mathbb{R}^n$

1. *Montrer que pour tout $z \in U_\delta$, il existe $p \in \Gamma$ tel que : $d(z,\Gamma) = \|z-p\|$.*
2. *Si $x \in \Gamma$ on note par $\eta(x)$ le vecteur normal unitaire extérieur, i.e $\eta(x) \in (T_x\Gamma)^\perp$,*
   $\|\eta(x)\| = 1$ tels que la base $\{\eta(x),v_1,\ldots,v_{n-1}\}$ soit directe ($\{v_1,\ldots,v_{n-1}\}$ étant une base de $T_x\Gamma$). Soit $(U\cap\Gamma,\varphi|_{U\cap\Gamma})$ une carte en $x\in\Gamma$ et soit $V = \pi|_{\mathbb{R}^{n-1}}(\varphi(U))$, montrer que

   $$\begin{array}{rccc} F: & V\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ & (s,t) & \mapsto & \varphi^{-1}((s,0)) + t\,\eta\,(\varphi^{-1}(s,0)) \end{array}$$

   est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme au voisinage de $(s,0)$.
3. *Montrer que pour tout $a\in\Gamma$ il existe $U_a \in \mathcal{V}_{(a)}$, et $\varepsilon_a > 0$ tels que :*

   $$\begin{array}{rccc} \widetilde{F}: & (U_a\cap\Gamma)\times]-\varepsilon_a,\varepsilon_a[& \to & U_{\varepsilon_a} \\ & (x,t) & \mapsto & x + t\,\eta\,(x) \end{array}$$

   est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme.
4. *Déduire, par compacité de Γ, qu'il existe $\delta_0 > 0$ tels que $\forall\delta\le\delta_0$, $\forall z\in U_\delta$, $\exists!(p,t)\in\Gamma\times]-\delta,\delta[$ (unique), de sorte que $z = p + t\,\eta\,(p)$. Faire une illustration graphique de ce résultat. (U_δ est appelé* voisinage tubulaire *de la surface Γ).*

Exercice 10.2.

Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et soit Σ une sous-variété de $\mathbb{R}^m$. On suppose que f est transverse *à Σ, c'est-à-dire :*

$$\forall a\in\Omega,\ f(a)\notin\Sigma \quad ou \quad T_{f(a)}\Sigma + \mathrm{Im}(D_af) = \mathbb{R}^m$$

1. *Soit $x\in f^{-1}(\Sigma)$ et (V,ϕ) une carte en $f(x)\in\Sigma$ telle que $\phi(V\cap\Sigma) = \phi(V)\cap(\mathbb{R}^k\times 0_{m-k})$ où k est la dimension de Σ. Montrer que l'application suivante :*
   $\pi_2\circ\phi\circ f\ :\ f^{-1}(V) \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\phi} \phi(V) \subset \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{m-k} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{R}^{m-k}$ est une submersion.

2. *Montrer, à l'aide du théorème du rang constant, que* $f^{-1}(\Sigma)$ *est une sous-variété de* $\mathbb{R}^n$ *et que* $\operatorname{codim} f^{-1}(\Sigma) = \operatorname{codim} \Sigma$.
3. *En déduire que si* f *est une submersion alors* $\forall x \in f(\Omega)$, $f^{-1}(x)$ *est une sous-variété de* $\mathbb{R}^n$*, de dimension* $n - m$.

Corrigé du 1^{ier} examen

Exercice 10.3.

Soit Γ *une hypersurface compacte, de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *et soit* $U_\delta = \{z \in \mathbb{R}^n, d(z, \Gamma) < \delta\}$ *où* $d(z, \Gamma) = \inf\limits_{x\in\Gamma} \|z - x\|$ *est la distance euclidienne de* z *à* Γ *dans* $\mathbb{R}^n$

1. *Comme l'application* $a \mapsto \|z-a\|$ *est continue sur* $\mathbb{R}^n$ *sa restriction à* Γ *est bornée et réalise ses bornes, donc* $\exists p \in \Gamma$, $\inf_{x\in\Gamma} \|z - x\| = \|z - p\|$. *Ce point* p *n'est pas nécessairement unique.*
2. *Soit* $x \in \Gamma$ *et soit* $\eta(x)$ *le vecteur normal unitaire extérieur, i.e* $\eta(x) \in (T_x\Gamma)^\perp$,
   $\|\eta(x)\| = 1$ *tels que la base* $\{\eta(x), v_1, ..., v_{n-1}\}$ *soit directe* ($\{v_1, ..., v_{n-1}\}$ *étant une base de* $T_x\Gamma$). *Soit* $(U \cap \Gamma, \varphi|_{U\cap\Gamma})$ *une carte en* $x \in \Gamma$ *et soit* $V = \pi|_{\mathbb{R}^{n-1}}(\varphi(U))$ *i.e* $\varphi : U \to \varphi(U)$ *est un* $\mathscr{C}^\infty$ *difféomorphisme et* $\varphi(U \cap \Gamma) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) = V \times \{0\}$ *considérons*
   $$\begin{array}{rccc} F: & V \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ & (s,t) & \mapsto & \varphi^{-1}((s,0)) + t\,\eta\left(\varphi^{-1}(s,0)\right) \end{array}$$
   on a $D_{(s,0)}F = \left(\frac{D\varphi^{-1}}{D(s_1,...,s_{n-1})}(s,0) \quad \eta\left(\varphi^{-1}(s,0)\right)\right)$ *comme la famille* $\{\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial s_1}(s,0), ..., \frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial s_{n-1}}(s,0)\}$ *est libre (car elle engendre l'espace tangent à* Γ *en* x, $T_x\Gamma$ *qui est de dimension* $n-1$*),* $T_x\Gamma = (D_x\varphi)^{-1}(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) = D_{(s,0)}\varphi^{-1}(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ *et* $\eta(x) \in (T_x\Gamma)^\perp$ *donc la famille* $\{\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial s_1}(s,0), ..., \frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial s_{n-1}}(s,0), \eta\left(\varphi^{-1}(s,0)\right)\}$ *est libre, elle forme donc une base de* $\mathbb{R}^n$*, par suite* $\det D_{(s,0)}F \neq 0$, $D_{(s,0)}F$ *est inversible, et par le théorème d'inversion locale* F *est un* $\mathscr{C}^\infty$ *difféomorphisme sur un voisinage de* $(s,0)$. *i.e* $\forall s_0 \in V$, $\exists V_0 \in \mathcal{V}_{s_0}$ $(V_0 \subset V)$ $\exists\varepsilon > 0$ $(\varepsilon = \varepsilon(s_0))$ *tel que*
   $$\begin{array}{rccc} F: & V_0\times]-\varepsilon,\varepsilon[& \to & U_\varepsilon \\ & (s,t) & \mapsto & \varphi^{-1}((s,0)) + t\,\eta\left(\varphi^{-1}(s,0)\right) \end{array}$$
   est un $\mathscr{C}^\infty$ *difféomorphisme.*
3. *On déduit que* $\forall a \in \Gamma$, $\exists U_a$ *voisinage ouvert de* a, $\exists\varepsilon_a > 0$ *tel que*
   $$\begin{array}{rccc} \widetilde{F}: & (U_a \cap \Gamma)\times]-\varepsilon_a, \varepsilon_a[& \to & U_{\varepsilon_a} \\ & (x,t) & \mapsto & x + t\,\eta(x) \end{array}$$
   qui est $F\circ(\varphi\times\mathrm{Id})$ *i.e* $\widetilde{F}(x,t) = F(\varphi(x),t)$, *est un* $\mathscr{C}^\infty$*-difféomorphisme.*

4. *Comme* $\Gamma = \cup_{a\in\Gamma}(U_a \cap \Gamma)$ *alors par compacité de* Γ*, il existe* $\{a_i\}_{i=1}^m \subset \Gamma$ *telle que* $\Gamma = \cup_{i=1}^m (U_{a_i} \cap \Gamma)$*. Si on prend* $\delta = \min_{1\leq i\leq m} \varepsilon_i$ *alors* $\forall \delta \leq \delta_0$*,* $\forall z \in U_\delta$*,* $\exists!(p,t) \in \Gamma\times]-\delta,\delta[$ *(unique), de sorte que* $z = p + t\,\eta\,(p)$*.* *Voir figure* (10.1)*, page 91.*

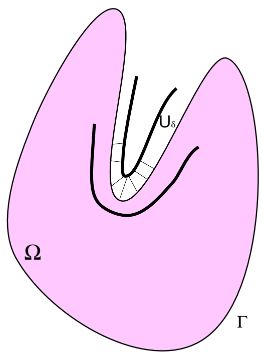

FIG. 10.1 – *voisinage tubulaire*

Exercice 10.4.
Soit f *une application de classe* $\mathscr{C}^1$ *d'un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^m$ *et soit* Σ *une sous-variété de* $\mathbb{R}^m$ *de dimension* k*. On suppose que* f *est* ***transverse*** *à* Σ*, c'est-à-dire :*

$$\forall a \in f^{-1}(\Sigma), \quad T_{f(a)}\Sigma + \mathrm{Im}(D_a f) = \mathbb{R}^m \tag{10.1}$$

1. *Si* $a \in f^{-1}(\Sigma)$ *et* (V,ϕ) *une carte en* $f(a)$ *tel que* $\phi(V\cap\Sigma) = \phi(V)\cap(\mathbb{R}^k\times\{0_{m-k}\})$ *alors* $\pi_2\circ\phi\circ f : f^{-1}(V) \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\phi} \phi(V) \subset \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{m-k} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{R}^{m-k}$ *est une submersion. En effet, comme* $T_{f(a)}\Sigma = (D_{f(a)}\phi)^{-1}(\mathbb{R}^k\times\{0_{m-k}\})$ *et comme* $D_{f(a)}\phi$ *est un isomorphisme sur* $\mathbb{R}^m$ *alors on a les équivalences :*

$$\begin{aligned} \text{l'hypothèse de transversalité (10.1)} \;\Leftrightarrow\; \mathbb{R}^m &= (D_{f(a)}\phi)^{-1}(\mathbb{R}^k\times\{0_{m-k}\}) + D_a f(\mathbb{R}^n) \\ \Leftrightarrow\; \mathbb{R}^m &= \mathbb{R}^k\times\{0_{m-k}\} + D_a(\phi\circ f)(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

Comme $\ker\pi_2 = \mathbb{R}^k\times\{0_{m-k}\}$ *et* π_2 *est surjective alors* $\mathbb{R}^{m-k} = \pi_2(\mathbb{R}^m) = \pi_2\circ D_a(\phi\circ f)(\mathbb{R}^n)$ *il en résulte que :* $D_a(\pi_2\circ\phi\circ f) = \pi_2\circ D_a(\phi\circ f)$ *est surjective i.e* $\pi_2\circ\phi\circ f$ *est une submersion en* a*.*

2. *Par le théorème du rang constant,* $\exists U_a \in \mathcal{V}_{(a)}$, $\exists\, \varphi_a : U_a \to W$ *un* $\mathscr{C}^1$ *difféomorphisme tel que :* $\Big((\pi_2 \circ \phi \circ f)\circ \varphi_a^{-1}\Big)(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_{m-k})$, *il s'en suit alors que* $\varphi_a(U_a \cap f^{-1}(V)) = W \cap (\mathbb{R}^{n-m+k} \times \{0_{m-k}\})$ *i.e* $f^{-1}(\Sigma)$ *est une sous-variété de* $\mathbb{R}^n$, *au voisinage de chacun de ses points, de codimension* $m-k$.
3. *Si* f *est une submersion sur* Ω *alors* f *est transverse à la sous-variété* $\Sigma = \{x\}$, $\forall x \in f(\Omega)$, *de dimension* 0, *car* $\mathbb{R}^m = \operatorname{Im} D_x f = T_x\Sigma + \operatorname{Im} D_x f$ *donc* $\forall x \in f(\Omega)$, $f^{-1}(x)$ *est une sous-variété de* $\mathbb{R}^n$, *de codimension* m, *i.e de dimension* $n-m$.

Deuxième Examen

Exercice 10.5.

Soient e_3 *le vecteur* $(0,0,1)$, *et* $f : \mathrm{S}^2 \to \mathbb{R}$ *l'application donnée par* $f(x) = <x,e_3>$.

1. *Donnez l'expression de* $\nabla f(x)$, *pour tout* x *de* S^2.
2. *Déterminez les courbes intégrales de* $X(x) = -\dfrac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|^2}$
3. *En notant* ϕ_t *le flot au temps* t *de* X, *déterminez* $\phi_t\big(\{x^2+y^2=1, z=0\}\big)$.

Exercice 10.6.

Soit H *l'ensemble formé des matrices de la forme :* $\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *avec* $x,y,z \in \mathbb{R}$.

1. *Montrer que* H *est un groupe de Lie connexe (dit groupe de Heisenberg).*
2. *Montrer que son algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *admet une base* $\{u,v,w\}$ *vérifiant la table de multiplication :* $[u,v] = w$, $[u,w] = 0$, $[v,w] = 0$.
3. *Montrer que l'application suivante :* $\left(\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ ay+z+c \end{pmatrix}$ *définit une opération de* H *sur* $\mathbb{R}^3$

Exercice 10.7.

Soit M une variété différentielle, et soient $X^{(1)},X^{(2)},...,X^{(n)}$, n champs de vecteurs sur M formant une base de T_xM en tout point x de M.

1. *Montrer que TM est difféomorphe à $M \times \mathbb{R}^n$. (Si $u = \sum_{k=1}^{n} u_k X^{(k)}$ considérer*
$$\Phi : u \in TM \mapsto (\pi(u),u_1,...,u_n) \in M \times \mathbb{R}^n$$
où $\pi : TM \to M$ est la projection du fibré tangent TM sur la variété M)
2. *Montrer que ce résultat est vrai sur tout groupe de Lie de dimension finie.*

Corrigé du deuxième Examen

Exercice 10.8.

1. *H est un groupe (pour le produit matriciel), si $A(x_1,y_1,z_1)$, $A(x_2,y_2,z_2)$ dans H alors $A(x_1,y_1,z_1)\,A(x_2,y_2,z_2) = A(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2+x_1y_2) \in H, Id_{\mathbb{R}^3} = A(0,0,0) \in H$ et $A^{-1}(x,y,z) = A(-x,-y,-z+xy) \in H$ et comme les deux applications*
$$\begin{array}{rcl} \phi_1 : GL(n,\mathbb{R}) \times GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R}) & \text{et} & \phi_2 : GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R}) \\ (A,B) \longmapsto AB & & A \longmapsto A^{-1} \end{array}$$
sont de classe $\mathscr{C}^\infty$, donc aussi par restriction sur H.
H est connexe, image de $\mathbb{R}^3$ par l'application continue $\varphi : (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on peut montrer aussi que H est convexe.
2. *Une simple récurrence sur n montre que*
$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & nx & nz + \frac{n(n-1)}{2}xy \\ 0 & 1 & ny \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
pour $n \geq 0$ et pour $n \leq 0$ il suffit de remarquer que $A^{-n} = (A^{-1})^n$. Soit $A(x,y,z) \in H$
$$\exp A = \sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \begin{pmatrix} 1 & nx & nz + \frac{n(n-1)}{2}xy \\ 0 & 1 & ny \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & ex & ez + \frac{e}{2}xy \\ 0 & e & ey \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 1 & x & z + \frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 10.9.

1. *L'ensemble de points $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 = 1$ et $x+y+z = 1\}$ représente l'intersection de la sphère unité S^2 avec le plan $(\pi) : x+y+z = 1$ qui passe par les points $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$*

2. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x^2+y^2+z^2-1, x+y+z-1) \end{array}$ *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *et la différentielle* $D_{(x_0,y_0,z_0)}f = \begin{pmatrix} 2x_0 & 2y_0 & 2z_0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *est de rang* 2 *si et seulement si l'un des déterminants suivants est non nul :* $A_1 = \begin{vmatrix} 2x_0 & 2y_0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $A_2 = \begin{vmatrix} 2x_0 & 2z_0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ *et* $A_3 = \begin{vmatrix} 2y_0 & 2z_0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$
   $A_1 = A_2 = A_3 = 0 \Leftrightarrow 2(x_0 - y_0) = 2(x_0 - z_0) = 2(y_0 - z_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = y_0 = z_0$ *comme* $\forall x \in \mathbb{R},\ (x,x,x) \notin \Sigma$ f *est alors une submersion et* $\Sigma = f^{-1}(0)$ *est une sous-variété de* $\mathbb{R}^3$ *de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *et de dimension* 1. *En fait* Σ *est le cercle de centre* $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ *est de rayon* $r = \sqrt{\frac{2}{3}}$ *déssiné sur le plan* (π).
3.

$$T_{(1,0,0)}\Sigma = \ker D_{(1,0,0)}f = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (2x, x+y+z) = (0,0)\right\} = \left\{(0,y,-y),\ y \in \mathbb{R}\right\} = \langle (0,1,-1) \rangle$$

droite dérigée par le vecteur $(0,1,-1)$.

Exercice 10.10.

1. $x\mathcal{R}y$ *dans* $[0,1] \Leftrightarrow x = y$ *ou* $|y-x| = 1$ *est une relation d'équivalence sur* $[0,1]$ *car*
   $\forall x \in [0,1]$ $x = x$ *i.e* $x\mathcal{R}x$ *et* $\mathcal{R}$ *est* ***réflexive***.
   $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y$ *ou* $|y-x| = 1 \Leftrightarrow y = x$ *ou* $|x-y| = 1$ *et* $\mathcal{R}$ *est* ***symétrique***.
   $\left(\begin{array}{c} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} x = y \text{ ou } |y-x| = 1 \\ y = z \text{ ou } |z-y| = 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow x = z$ *ou* $|z-x| = 1$ *et* $\mathcal{R}$ *est* ***transitive***.
2. *Si* $f: \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & S^1 \\ x & \mapsto & (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) \end{array}$ *alors* f *est surjective et continue, de plus*
   $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ *(les valeurs de* f *sont distinctes sur* $]0,1[$ *et* $f(0) = f(1)$*). en passant au quotient* $F : [0,1]/\mathcal{R} \to S^1$ $F(\bar{x}) = f(x)$ *qui est bien définie et bijective est continue car si* U *est un ouvert de* S^1 *alors* $f^{-1}(U) = \pi^{-1}(F^{-1}(U))$ *est un ouvert de* $[0,1]$ *donc* $F^{-1}(U)$ *est un ouvert de* $[0,1]/\mathcal{R}$ *par définition même de la topologie quotient (voir la notion de topologie finale).* F *est en plus fermée, en effet soit*

V un fermé de $[0,1]/\mathcal{R}$ comme $F(V) = f(\pi^{-1}(V))$, π est continue et f est fermée (car continue sur un compact) $F(V)$ est alors fermé. Une autre façon de voir que F est fermée est de remarquer que $[0,1]/\mathcal{R}$ est compact (image du compact $[0,1]$ par l'application continue π) et F est continue sur ce compact. F est l'homéomorphisme cherché entre $[0,1]/\mathcal{R}$ et S^1.

3. *$[0,1]/\mathcal{R}$ est donc compact et connexe. Par transport de structures $[0,1]/\mathcal{R}$ est une variété de dimension 1, de classe $\mathscr{C}^\infty$. Si $\mathcal{A} = \{(U_i,\varphi_i),\ i \in I\}$ est un $\mathscr{C}^\infty$ atlas sur S^1 alors $\bar{\mathcal{A}} = \{(F^{-1}(U_i),\varphi_i \circ F),\ i \in I\}$ est un $\mathscr{C}^\infty$ atlas sur $[0,1]/\mathcal{R}$.*

Exercice 10.11.
M variété différentielle de dimension finie n, séparée et connexe. $f \in \mathscr{C}^1(M,M)$, $f\circ f = f$

1. *Si on pose $\Sigma = f(M)$ alors $\Sigma = \{x \in M,\ f(x) = x\}$ (ensemble des points fixes de f). En effet si $x = f(x)$ alors $x \in f(M)$, d'autre part si $y \in f(M)$ alors $\exists x \in M$, $y = f(x)$, par suite $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$ d'où l'égalité cherchée.*
2. *$\forall a \in \Sigma$, $T_af = T_a(f\circ f) = T_{f(a)}f \circ T_af = T_af \circ T_af$ le même argument de la question précédente montre que $\operatorname{Im} T_af = T_af(T_aM) = \{u \in T_aM, T_af(u) = u\} = \ker(id_{T_aM} - T_af)$ (ensemble des points fixes de T_af).*
3. *le 1^{er} théorème d'isomorphisme donne $\mathbb{R}^n \simeq T_aM \simeq \ker(id_{T_aM} - T_af) \oplus \operatorname{Im}(id_{T_aM} - T_af)$*

$$\begin{aligned} \textit{donc}\quad n = \dim M = \dim T_aM &= \dim\ker(id_{T_aM} - T_af) + \operatorname{rang}(id_{T_aM} - T_af) \\ &= \operatorname{rang} T_af + \operatorname{rang}(id_{T_aM} - T_af) \end{aligned}$$

l'application rang *est semi-continue inférieurement. i.e $\forall a \in \Sigma$, $\exists U_a$ voisinage de a dans M tel que $\forall x \in U_a$, $\operatorname{rang} T_xf \geq \operatorname{rang} T_af$ et $\operatorname{rang}(id_{T_xM} - T_xf) \geq \operatorname{rang}(id_{T_aM} - T_af)$ comme la somme reste constante alors nécessairement $\operatorname{rang} T_af$ est constant sur U_a. l'application $a \mapsto \operatorname{rang} T_af$ est donc localement constante sur le connexe Σ elle est alors constante et posons $\operatorname{rang} T_af = p$ (Σ est en fait connexe comme image du connexe M par l'application continue f).*

4. *$\forall x \in M$ $T_xf = T_x(f\circ f) = T_{f(x)} \circ T_xf$ donc $\operatorname{rang} T_xf \leq \operatorname{rang} T_{f(x)}f = p$, d'autre part $\forall a \in \Sigma$, $\exists U_a$ voisinage de a dans M tel que $\forall x \in U_a$ $\operatorname{rang} T_xf \geq \operatorname{rang} T_af = p$ donc $\forall x \in U = \bigcup_{a\in\Sigma} U_a$ $\operatorname{rang} T_xf = p$.*

   Le théorème du rang constant donne alors : $\forall a \in U$, $\exists(U_a,\varphi)$ carte en

a, $\exists\,(V_a,\phi)$ carte en $f\,(a)$ tel que $\phi\circ f\circ\varphi^{-1}$est de la forme $(x_1,...,x_n)\mapsto(x_1,...,x_p,0,...,0)$ de là en déduit que $f:U_a\to f\,(U_a)\subset V_a$ est ouverte, que $\phi:f\,(U_a)\to\phi\,(f\,(U_a))$ est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme entre un voisinage de $f\,(a)$ et un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ (car $\phi:V_a\to\phi\,(V_a)$ est non seulement un homéomorphisme mais un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme) de plus $\phi\,(f\,(U_a)\cap\Sigma)=\phi\,(f\,(U_a))\cap(\mathbb{R}^p\times 0)$ donc Σ est une sous-variété de M fermée et connexe, de classe $\mathscr{C}^1$ et de dimension p.

Exercice 10.12.

1. *Si $f\in\mathscr{C}^1\,(M,N)$ entre deux variétés différentielles avec $\dim M=m$ et $\dim N=n$ l'expression locale de T_xf permet de ramener le problème à des ouverts de $\mathbb{R}^m$ et de $\mathbb{R}^n$, en effet si (U,φ) est une carte en x_0 et (V,ϕ) une carte en $f(x_0)$ telles que $f(U)\subset f(V)$ alors $T_{x_0}f=\theta_\phi^{-1}\circ D_{\varphi(x_0)}(\phi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ\theta_\varphi$*

$$\begin{tikzcd} T_{x_0}M \arrow[r, "T_{x_0}f"] \arrow[d, "\theta_\varphi"'] & T_{f(x_0)}N \arrow[d, "\theta_\phi"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "D_{\varphi(x_0)}(\phi\circ f\circ\varphi^{-1})"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

donc $\operatorname{rang} T_{x_0}f=r\geq k\Leftrightarrow\operatorname{rang} D_{\varphi(x_0)}(\phi\circ f\circ\varphi^{-1})=r\geq k$, θ_φ et θ_ϕ étant des isomorphismes. Si $J_{x_0}(\phi\circ f\circ\varphi^{-1})$ dénote la matrice jacobienne de $D_{\varphi(x_0)}(\phi\circ f\circ\varphi^{-1})$ alors $\operatorname{rang} T_{x_0}f=r\geq k\Leftrightarrow\exists(I_0,J_0)\subset\{1,...,m\}\times\{1,...,n\}$, $|I_0|=|J_0|=r$, $\det\pi_{I_0,J_0}J_{x_0}(\phi\circ f\circ\varphi^{-1})\neq 0$ (voir les notations de la question précédente). Or l'application

$$\begin{array}{rccc}\psi: & M & \to & \mathbb{R}\\ & x & \mapsto & \det\pi_{I_x,J_x}(J_x(\phi\circ f\circ\varphi^{-1}))\end{array}$$

est continue, comme composé d'applications continues, ici il faut pas oublier que φ,ϕ,I et J dépendent de x, on a omis de les indexer tous par x juste pour simplifier les notations.

$$B_k=\{x\in M,\operatorname{rang} T_xf\geq k\}=\bigcup_{\substack{x\in M,\ (I_x,J_x)\subset\{1,...,m\}\times\{1,...,n\}\\ |I_x|=|J_x|=k}}\left[\det\pi_{I_x,J_x}(J_x(\phi_x\circ f\circ\varphi_x^{-1}))\right]^{-1}(\mathbb{R}^*$$

est donc un ouvert de M.

Bibliographie

[1] M. Berger. *A panoramic view of Riemannian geometry*, Springer 2003.

[2] Boubakar Ba, G. Vinel. *Géométrie différentielle.*

[3] H. Cartan, *Calcul différentiel*, Hermann 1982.

[4] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine. *Riemannian Geometry*, 3rd edition, Springer 2004.

[5] J. Dieudonné. *Éléments d'analyse*, vol I et III. Gauthier-Villars, 1970.

[6] J. Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*, Presses universitaires de Grenoble, 1996.

[7] J.M Lee. *Riemannian Manifolds*, Springer 1997.

[8] Jerold E. Marsden, Tudor S. Ratiu. *Differntial geometry*

[9] Laurent Schwartz. *Topologie générale et analyse fonctionnelle.* Hermann, 1970.