وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد الصديق بن يحي-جيجل

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم علوم التسيير

محاضرات في الرياضيات المالية

لطلبة السنة الثانية ميدان العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

إعداد: د. كعواش جمال الدين

2018/2017

فهرس المحتويات	
الموضوع	الصفحة

مقدمة:

تعتبر الرياضيات المالية مهمة بالنسبة لعلوم الاقتصاد والإدارة ولا يمكن الإستغناء عنها، كون هذه العلوم تركز بشكل كبير على الجانب الكمي، لذلك لابد من تدريس هذه المادة على المستوى الجامعي لتزويد الطلبة بالأسس العلمية و العملية الصحيحة التي تساعدهم في الحياة العملية.

الموضوع الاساسي في الرياضيات المالية هو الفائدة، ودراسة الفائدة لا تأخذ أهميتها من كونها تستعمل في البنوك في عمليات مختلفة كالقروض والإيداعات فحسب، بل هي تشكل نسبة مئوية ويمكن استعمالها كمعدل عائد، وهذا يدخل في كثير من الدراسات وأهمها إدارة الإستثمار وإدارة المحافظ المالية، ودراسة الجدوى الإقتصادية للمشروعات.

لذا كان من الضروري تغطية هذا الموضوع تغطية كاملة، وعرضه بأسلوب مبسط ومنهجي حتى يتمكن الطلبة من فهمه واستيعابه بسهولة ويسر حتى و إن كان مستواه في الرياضيات متوسطا، دون الإخلال بالجوهر وبالمحتوى العلمي لهذه المادة.

وتتضمن هذه المطبوعة قسمين أساسين، القسم الأول بعنوان العمليات المالية قصيرة الأجل، وقد ضم فصلين، حيث تم التركيز فيهما على طرق حساب الفائدة البسيطة، وكيفية خصم واستبدال الأوراق التجارية، أما القسم الثاني فقد حمل عنوان العمليات المالية طويلة الأجل، وقد ضم هذا القسم خمسة فصول، تم التطرق فيها إلى كيفية حساب الجملة والقيمة الحالية في الفائدة المركبة، بالإضافة إلى كيفية استبدال الديون طويلة الأجل، وقد تم التطرق في هذه القسم كذلك إلى موضوع الدفعات وموضوع استهلاك القروض طويلة الأجل، و أخر فصل من هذا القسم تم التطرق فيه إلى معايير اختيار الاستثمارات.

ونأمل في الأخير أن نكون قد وفقنا في شرح وتبسيط الرياضيات المالية من خلال هذه المطبوعة، وأن يكون أسلوبها العلمي منظم ومنهجي حتى يعود على الطلبة بالفائدة والنفع.

القسم الأول: العمليات المالية قصيرة الأجل

الفصل الأول

الفائدة البسيطة:

Intérêt simple

هدف الفصل	✓ معرفة علاقة حساب الفائدة البسيطة والجملة. ✓ استعمال علاقة الفائدة البسيطة لحساب المدة، معدل الفائدة البسيطة، والمبلغ الأصلي. ✓ حساب الفائدة البسيطة باستخدام الطريقة التجارية والطريقة الحقيقية (العقلانية). ✓ معرفة كيفية حساب الفائدة البسيطة باستخدام طريقة النمر والقاسم.
خطة الفصل	1.1. مفهوم الفائدة. 2.1. مفهوم الفائدة البسيطة. 3.1. عناصر الفائدة البسيطة. 4.1. القانون الأساسي لحساب الفائدة البسيطة. 5.1. استخدام القانون الأساسي لحساب الفائدة البسيطة. 6.1. الفائدة التجارية والفائدة الحقيقية. 7.1. حساب الجملة (القيمة المحصلة). 8.1. طريقة النمر والقاسم لحساب الفائدة البسيطة.

1.1. مفهوم الفائدة:

يمكن تعريف الفائدة بأنها العائد الذي يحصل عليه المقرض نتيجة توظيفه (استثماره) لماله في مؤسسة مالية، أو هي المبلغ الذي يجب أن يدفعه المقترض للمقرض مقابل انتفاعه بالقرض لفترة من الزمن، فالفائدة هي محصلة المبلغ المقترض (أو الموظف) لمدة زمنية معينة، وبمعدل فائدة معين يتم الاتفاق عليه بين المقرض والمقترض.

فالبنك يدفعه لعملائه مكافأة على حسابات التوفير عندما يحتفظون بأموالهم في حساب بفائدة لدى البنك، وهو ما يتوافق مع مبدأ القرض، فالعميل يجمد بجزء من رأس ماله في حساب بنكي، والبنك يستعمل رأس المال هذا للمدة التي يكون فيها المال في الحساب البنكي ويحقق منه عوائد من خلال اقراضه لهذا المال، وفي مقابل تجميد العملاء لأموالهم في البنك، يقوم البنك بمنح فوائد لهؤلاء العملاء.

فالفائدة من وجه نظر المقترض هي المبلغ الدي يدفعه مقابل استعمال المبلغ المالي الذي يمثل القرض، أما من وجهة نظر المقرض أي صاحب رأس المال فهي تعتبر كدخل ناتج عن توظيف هذا المبلغ.

2.1. مفهوم الفائدة البسيطة:

إذا وضع احد الأشخاص مبلغ في بنك وتعهد البنك باحتساب فائدة ثابتة لصالحه على أساس أصل المبلغ خلال فترة زمنية محددة، يقال إن الفائدة بسيطة ،فالفائدة البسيطة يظل مقدارها ثابتا بغض النظر عن كون الفوائد تدفع بصفة دورية أو عند نهاية الفترة الزمنية المحددة.

الفائدة البسيطة هي العائد الثابت على المبلغ المستثمر لوحدات زمنية متساوية، فالفائدة البسيطة تحسب فقط على رأس المال (المبلغ الاصلي) الموظف أو المقترض أول مرة، والفوائد يتم احتسابها في نهاية مدة التوظيف أو الاقتراض، فهي تعتبر كفائدة فقط ولا يتقاضى عليها المودع أية فائدة لاحقا، وتطبق الفائدة البسيطة عادة عندما تكون المدة أقل من سنة.

3.1. عناصر الفائدة البسيطة:

يتحدد مبلغ الفائدة بثلاث عناصر هي:

أ/ **المبلغ المالي (الأصل)**: ويرمز له بالرمز "C_0"، هو المبلغ الذي يوظفه المقرض ويطلق عليه مصطلح الأصل، وهذا المبلغ هو الذي يتحصل عليه المقترض ويدفع فائدة مقابل استخدامه لهذا القرض، وكلما كان هذا المبلغ أكبر كانت الفائدة اكبر والعكس صحيح.

ب/ مدة القرض: ويرمز لها "n"، ويقصد بها مدة القرض أو مدة التوظيف، أي المدة التي يمكثها المبلغ لدى المقترض (أو في البنك)، وخلال هذه المدة يستطيع المقترض استعمال الأصل، أي هي الفرق بين تاريخ الإقراض (أو الايداع)، وتاريخ التسديد (أو السحب)، وتكون العلاقة طردية بين الفائدة والمدة، كما أن المدة قد تكون بالأيام أو بالأشهر أو بالسنوات، حسب نوع القرض.

ج/ معدل الفائدة Taux d'intérêt: ويرمز له "t"، حيث يتم الاتفاق عادة على نسبة مئوية من الأصل تدفع كل وحدة زمنية، تعرف هذه النسبة المستحقة بمعدل الفائدة، وفي العادة يكون المعدل سنويا وبنسبة مئوية، ويمكن أن يكون المعدل سداسي أو شهري، وهذا بقسمة المعدل السنوي على الفترة المراد تحديد معدلها، فمثلا: إذا كان معدل الفائدة السنوي على مبلغ 100 دج هو 12%، فإن المعدل السداسي هو $\frac{12}{2} = 6\%$، أما الشهري فهو $\frac{12}{12} = 1\%$.

4.1. القانون الأساسي لحساب الفائدة البسيطة:

تتناسب الفائدة طرديا مع كل من المبلغ الأصلي C_o، معدل الفائدة t، و المدة n، و على هذا الأساس فإن مبلغ الفائدة البسيطة "I" يتم حسابها وفق العلاقة التالية:

$$\boxed{I = C_o \times t \times n}$$

مثال: مبلغ 25000 دج أودع في بنك لمدة 2 سنة، وبمعدل فائدة 09 % سنويا.

المطلوب : حساب الفائدة المحققة خلال هذه المدة.

الفائدة المحققة هي:

$$I = C_o \times t \times n = 25000 \times 0{,}09 \times 2 = 4500 \text{ DA.}$$

إذا كانت المدة تحسب بالأشهر:

يمكن أن تكون مدة حساب الفائدة بالأشهر، في هذه الحالة إذا اعتبرنا أن k هو عدد الأشهر التي تم فيها اقتراض (توظيف) المبلغ المالي، ففي هذه الحالة نكتب: $n = \frac{k}{12}$، لأن عدد الاشهر في السنة هو 12 شهر، وبالتالي تصبح علاقة حساب الفائدة البسيطة:

$$\boxed{I = C_o \times t \times \frac{k}{12}}$$

مثال: وظف مبلغ قدره 48000 دج بمعدل فائدة قدره 7% لمدة 11 شهر.

المطلوب: حساب الفائدة المحققة خلال مدة التوظيف.

الفائدة المحققة هي:

$$I = C_0 \times t \times \frac{k}{12} = 48000 \times 0,07 \times \frac{11}{12} = 3080 \text{ DA.}$$

إذا كانت المدة تحسب بالأيام:

يمكن أن تكون مدة حساب الفائدة بالأيام، في هذه الحالة إذا اعتبرنا أن j هو عدد الأيام التي تم فيها اقتراض (توظيف) المبلغ المالي، ففي هذه الحالة نكتب: $n = \frac{j}{360}$، لأن عدد الأيام في السنة هو 360 يوم، وبالتالي تصبح علاقة حساب الفائدة البسيطة:

$$\boxed{I = C_0 \times t \times \frac{j}{360}}$$

مثال: وظف شخص مبلغ 2000 دج بمعدل فائدة قدره 10 % سنويا، ما هي الفائدة التي يحققها إذا كانت مدة التوظيف 90 يوم.

الفائدة المحققة: $$I = C_0 \times t \times \frac{j}{360} = 2000 \times 0,1 \times \frac{90}{360} = 50 \text{ DA.}$$

ملاحظة: في حالة وجود مدة زمنية محددة بين تاريخ التوظيف (الإقتراض) وتاريخ حساب الفائدة، فإنه يتم حساب العدد الفعلي للأيام بين هذين التاريخين، أي يتم احتساب عدد الأيام الحقيقية لكل شهر.

مثال: قرض منح بتاريخ 13 مارس ويسترجع بتاريخ 8 سبتمبر، ما هي بالأيام مدة هذا القرض؟

لإيجاد مدة هذا القرض يتم حساب المدة الحقيقية لكل شهر بين تاريخ الإقراض وتاريخ استرجاع هذا القرض، وذلك كما يلي:

مارس 31 (عدد الأيام الحقيقية لهذا الشهر)– 13 (تاريخ منح القرض) = 18 يوم

أفريل = 30 يوم

ماي = 31 يوم

جوان = 30 يوم

جويلية = 31 يوم

أوث = 31 يوم

سبتمبر 8 (تاريخ استرجاع القرض) = 8 أيام

117 يوم

مثال: وظف مبلغ مالي قدره 1000 دج بمعدل فائدة 8 % من 1 مارس إلى 2 سبتمبر.

المطلوب: حساب الفائدة المحققة خلال مدة التوظيف.

الحل:

مدة توظيف هذا المبلغ تحسب بين تاريخ التوظيف وتاريخ سحب المبلغ:

مارس 31–1 = 30 يوم

أفريل 30 يوم

ماي 31 يوم

جوان 30 يوم

جويلية 31 يوم

أوث 31 يوم

سبتمبر 2 يوم

185 يوم

ومنه الفائدة المحققة من توظيف هذا المبلغ هي:

$$I = C_o \times t \times \frac{j}{360} = 1000 \times 0{,}08 \times \frac{185}{360} = 41{,}11 \text{ DA.}$$

5.1. استخدام القانون الأساسي لحساب الفائدة البسيطة:

يمكن استخدام قانون حساب الفائدة البسيطة لإيجاد أي مجهول في حالة معرفة المجهولين الآخرين.

مثال01: ما هو المبلغ الواجب توظيفه بمعدل فائدة 10 % سنويا إذا أراد شخص تحقيق فائدة سنوية قدرها 10 دج خلال سنة.

من علاقة الفائدة البسيطة: $I = C_o \times t \times n$

$$C_0 = \frac{I}{t \times n} = \frac{10}{0,1 \times 1} = 100 \text{ DA.}$$

مثال 02: شخص يريد توظيف مبلغ 200 دج لمدة سنتين، ويهدف لتحقيق فائدة سنوية قدرها 40 دج، فما هو معدل الفائدة البسيطة الذي يجب أن يوظف به هذا المبلغ حتى يحقق هدفه؟

من علاقة الفائدة البسيطة: $I = C_0 \times t \times n$

$$t = \frac{I}{Co \times n} = \frac{40}{200 \times 2} = 0.1$$

أي أن معدل الفائدة الذي يجب أن يوظف به هذا المبلغ هو: 10 % .

مثال 03: شخص وظف مبلغ قدره 9200 دج بمعدل فائدة بسيطة 7 %، فبلغ مجموع الفوائد البسيطة في نهاية مدة التوظيف 644 دج، فما هي مدة توظيف هذا المبلغ؟

من علاقة الفائدة البسيطة: $I = C_0 \times t \times n$

$$n = \frac{I}{Co \times t} = \frac{644}{9200 \times 0,07} = 1\text{سنة}$$

إذن مدة القرض هي سنة واحدة.

6.1. الفائدة التجارية والفائدة الحقيقية: يمكن حساب الفائدة البسيطة بإحدى الطرق التالية:

أ. الطريقة التجارية: تعتبر هذه الطريقة الأبسط لحساب الفائدة، وتعرف بالطريقة الفرنسية، وفرضية هذه الطريقة أن السنة تتضمن 360 يوم، وهي الطريقة المتبعة في المعاملات المالية، وهي الطريقة التي تطبق إذا لم يذكر صراحة الطريقة التي يتم اتباعها لحساب الفائدة، وتكون الصيغة في حالة الأيام:

$$\boxed{I_c = C_0 \times t \times \frac{n}{360}}$$

ب. الطريقة الحقيقية (العقلانية): وتعرف أحيانا بالطريقة الانجليزية أو الصحيحة، في هذه الطريقة يتم حساب الفائدة على أساس أيام السنة الحقيقية، حيث يكون عدد أيام السنة العادية 365 يوم، أما عدد أيام السنة الكبيسة 366 يوم، وتكون الصيغة كالتالي:

في حالة السنة العادية: $\boxed{I_R = C_0 \times t \times \frac{n}{365}}$

في حالة السنة الكبيسة:

$$\boxed{I_R = C_0 \times t \times \frac{n}{366}}$$

مثال: أودع شخص مبلغ 1700 دج في أحد البنوك لمدة 73 يوم، إذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة 6%، فما هي قيمة الفائدة بالطريقتين التجارية والصحيحة؟

الحل:

أ/بالطريقة التجارية:

$$I_c = C_0 \times t \times \frac{n}{360} = 1700 \times 0{,}06 \times \frac{73}{360} = 20{,}68 \text{ DA.}$$

ب/ بالطريقة الحقيقية:

$$I_R = C_0 \times t \times \frac{n}{365} = 1700 \times 0{,}06 \times \frac{73}{365} = 20{,}4 \text{ DA.}$$

ملاحظات:

- ✓ تتكون السنة الكبيسة من 366 يوم، وشهر فيفري به 29 يوم، أما السنة العادية فتتكون من 265 يوم، وشهر فيفري به 28 يوم، أما باقي أشهر السنة فبعضها به 31 يوم، والبعض الآخر به 30 يوم.
- ✓ تستخدم الطريقة التجارية في حساب الفائدة إلا إذا نص صراحة على استخدام الطريقة الصحيحة.
- ✓ لا يتم احتساب يوم الإيداع (أو الاقتراض) عند حساب المدة.

ج. العلاقة بين الفائدة التجارية والفائدة الحقيقية:

يمكن استخلاص العلاقة بين الفائدة التجارية والفائدة الحقيقية بطرح الأولى من الثانية.

لدينا: $I_c = C_0 \times t \times \frac{n}{360}$ ، $I_R = C_0 \times t \times \frac{n}{365}$

بقسمة I_c على I_R نجد:

$$\frac{I_c}{I_R} = \frac{(C_0 \times t \times n)/360}{(C_0 \times t \times n)/365} = \frac{365}{360} = \frac{73}{72}$$

$$\frac{I_c}{I_R} = \frac{73}{72}$$

ومنه:

$$I_c = \frac{73}{72}\ I_R$$

$$I_c = (1+ \frac{1}{72})\ I_R$$

من العلاقة السابقة نستنتج:

$$I_R = \frac{72}{73}\ I_c$$

$$I_R = (1- \frac{1}{73})\ I_c$$

مثال: بلغ الفرق بين الفائدة التجارية والفائدة الحقيقية 9,68 دج، ولمدة 121 يوم.

المطلوب: أوجد الفائدة التجارية والفائدة الحقيقية.

الحل:

- ايجاد الفائدة التجارية:

لدينا:

$$I_c - I_R = 9{,}68$$

$$I_c - I_c\ \frac{72}{73} = 9{,}68$$

$$I_c\ (1- \frac{72}{73}) = 9{,}68$$

$$I_c\ \frac{1}{73} = 9{,}68$$

$$I_c = 73 \times 9.68 = 706{,}64 \text{ DA.}$$

- ايجاد الفائدة الحقيقية:

لدينا:

$$I_R = \frac{72}{73}\ I_c$$

$$I_R = \frac{72}{73} \times 706{,}64 = 696{,}96 \text{ DA.}$$

7.1. حساب الجملة (القيمة المحصلة):

أ. **جملة مبلغ واحد:** الجملة (القيمة المحصلة) هي عبارة عن المبلغ الموظف (المقترض) خلال مدة زمنية محددة مضافا إليه الفائدة التي يحققها هذا المبلغ (الأصل) خلال مدة التوظيف.

مثال: وظف شخص مبلغ 24000 دج لمدة 45 يوم، بمعدل فائدة بسيطة 10 %، أحسب رصيد هذا الشخص في نهاية مدة التوظيف.

الحل:

الرصيد في نهاية مدة التوظيف يحسب كما يلي:

$$C_t = C_o + I$$
$$= C_o + C_o \times t \times \frac{n}{360} = C_o\,(1 + t \times \frac{n}{360})$$

ومنه علاقة جملة مبلغ تكتب بالشكل:

$$\boxed{C_t = C_o\,(1 + t \times \frac{n}{360})}$$

إذن:

$$C_t = 24000\,(1 + 0{,}1 \times \frac{45}{360}) = 24300 \text{ DA} .$$

ب. **جملة عدة مبالغ:**

في حالة حساب جملة عدة مبالغ، نضيف إلى الصيغة السابقة رمز Σ، لأن الجملة في هذه الحالة هي عبارة عن مجموع جمل المبالغ المختلفة.

$$\boxed{C_t = \sum_{i=1}^{n} C_i(1 + t \times \frac{n}{360})}$$

مثال: أودع أحد الأشخاص المبالغ التالية في أحد البنوك: 1000دج، 8500دج، 9000دج، 25000دج، وذلك لمدة 90 يوم، 230 يوم، 52 يوم، و73 يوم على الترتيب بمعدل فائدة مشترك 4.8% سنويا، أوجد رصيد هذا الشخص في نهاية مدة الإيداع.

الحل:

$$C_t = 1000(1+0{,}048 \times \frac{90}{360}) + 8500(1+0{,}048 \times \frac{230}{360}) + 9000(1+0{,}048 \times \frac{52}{360}) +$$
$$25000(1+ 0{,}048 \times \frac{73}{360}) = 1012 + 8760{,}66 + 9062{,}4 + 25243{,}33$$

$C_t = 44078{,}4$ DA.

8.1. طريقة النمر والقاسم لحساب الفائدة البسيطة:

تستخدم هذه الطريقة بشكل أساسي عندما تكون مدة التوظيف أو الإقتراض بالأيام أو بالأشهر.

انطلاقا من العلاقة الأساسية للفائدة البسيطة:

$$I = C_0 \times t \times \frac{n}{360}$$

وبقسمة البسط والمقام على t نحصل على العلاقة :

$$I = \frac{(C_0 \times t \times n)/t}{360/t}$$

$$I = \frac{C_0 \times n}{360/t}$$

وعليه نحصل على البسط الذي يمثل حاصل ضرب المبلغ الأصلي في المدة، ويسمى بالنمر (Nombre)، ويرمز له N، أي أن: $N = C_0 \times n$، أما المقام فيعبر عنه بحاصل قسمة أيام السنة (360 يوم) على معدل الفائدة البسيطة، ويسمى بالقاسم (Diviseur)، ويرمز له D، أي أن: $D = \frac{360}{t}$.

وبذلك تكون علاقة حساب الفائدة البسيطة من الشكل:

$$\boxed{I = \frac{N}{D} = \frac{C_0 \times n}{360/t}}$$

الطريقة المتبعة في حساب الفائدة باستخدام النمر والقاسم هي الطريقة التجارية، ومن خصائصها أنها تساعد على اختصار العمليات الحسابية، خاصة إذا كان لدينا عدة مبالغ وكان معدل الفائدة البسيطة موحدا.

مثال 01: احسب باستخدام طريقة النمر والقاسم الفائدة البسيطة لمبلغ 915.46دج، وظف بمعدل 8 % لمدة 31 يوم.

الحل:

$$D = \frac{360}{t} = \frac{360}{0.08} = 4500. \qquad , \qquad N = 915{,}46 \times 31 = 28379{,}26.$$

$$I = \frac{28379{,}26}{4500} = 6{,}31 \text{ DA.}$$

مثال 02: أحسب الفائدة البسيطة للمبالغ التالية باستخدام طريقة النمر والقاسم إذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة لجميع هذه المبالغ هو 8 %:

712,15دج لمدة 21 يوم

2531,80دج لمدة 32 يوم

912,75دج لمدة 52 يوم

الحل:

عند استخدام طريقة النمر والقاسم نكتب:

$$I = \frac{(712,15 \times 21)+(2531,8 \times 32)+(912,75 \times 52)}{4500}$$

$$I = \frac{14955,15 + 81017,6 + 912,75}{4500}$$

$$I = \frac{143435,75}{4500} = 31,87 \text{ DA.}$$

الفصل الثاني	

خصم و تكافؤ الأوراق التجارية:

Escompte et équivalence des effets de commerce

هدف الفصل	✓ معرفة أساسيات حول الأوراق التجارية. ✓ تحديد مفهوم الخصم. ✓ معرفة كيفية حساب الخصم والقيمة الحالية للورقة التجارية. ✓ فهم المقصود بالآجيو ومعرفة كيفية حسابه. ✓ فهم المقصود بتكافؤ الأوراق التجارية. ✓ معرفة كيفية استبدال الأوراق التجارية. ✓ تحديد تاريخ تكافؤ الأوراق التجارية.
خطة الفصل	1.2. مفهوم الورقة التجارية **L'effet de commerce** . 2.2. أنواع الأوراق التجارية. 3.2. مفهوم خصم الأوراق التجارية. 4.2. حساب مجمل تكاليف الخصم **Agio** . 5.2. تكافؤ (استبدال) الأوراق التجارية. 1.5.2. التكافؤ بين ورقتين تجاريتين. 2.5.2. التكافؤ بين عدة أوراق تجارية (ديون). 5.2. تاريخ الاستحقاق الوسطي لعدة أوراق تجارية.

يستعمل المتعاملون الماليون والتجار وسائل تسديد فورية في معاملاتهم مثل النقود وكذلك الشيكات، أو أي قيم أخرى تأخذ مكانها، بالإضافة إلى هذا فقد سمح القانون التجاري لهؤلاء المتعاملين الدفع بأوراق تجارية والتي تتمثل أساسا في السند لأمر والكمبيالة.

1.1. مفهوم الورقة التجارية L'effet de commerce :

الورقة التجارية هي: وثيقة قانونية يلتزم المدين بتسويتها في تاريخ لاحق (تاريخ الاستحقاق)، ويوجد على ظهرها مبلغ محدد.

كما تعرف كذلك بأنها: وثيقة تعبر عن دين، يسدد لأمر أو لحامل الورقة، بحيث يحصل في أجل (بعد مدة) على المبلغ المسجل على الورقة.

فالورقة التجارية تسمح على سبيل المثال لمؤسسة (التي تعتبر زبون) بدفع قيمة المشتريات للمورد في وقت لاحق إذا لم تتمكن من ذلك على الفور.

2.2. أنواع الأوراق التجارية:

أ . الكمبيالة (السفتجة) Lettre de change :

هي عبارة عن صك مكتوب من شخص يسمى الساحب أو الدائن إلى شخص آخر هو المسحوب عليه أو المدين، يأمره يدفع مبلغ معين في تاريخ معين لأمره أو لأمر شخص ثالث يسمى المستفيد أو حامل الورقة التجارية، وهي قابلة للتداول عن طريق التظهير، وتحرر الكمبيالة بأشكال متعدد، لكن جميع هذه الأشكال تتضمن نفس البيانات، وفيما يلي أحد هذه الأشكال:

كمبيالة (سفتجة)

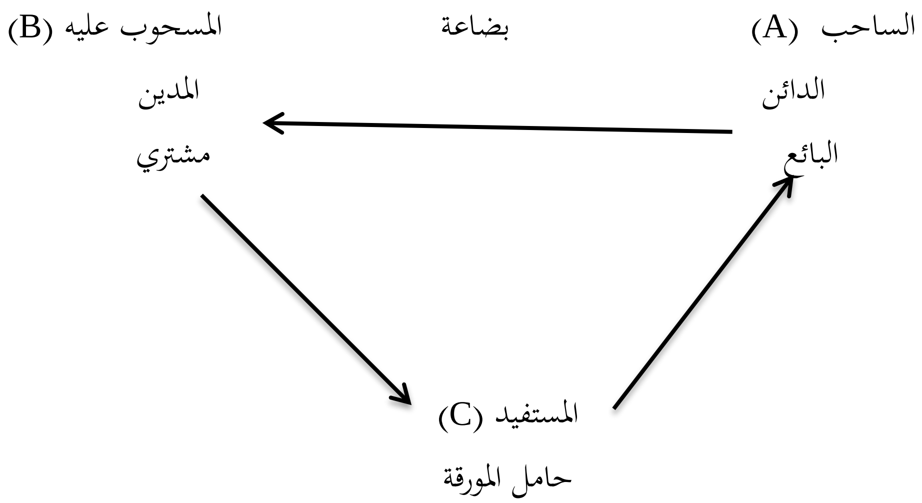
جيجل في: 2018/02/20 المبلغ: 5000دج

إلى السيد:×××× عبد الله

بموجب هذه الكمبيالة ادفعوا مبلغ: خمسة آلاف دينار جزائري لأمر السيد: ××××محمد، نهج المجاهدين بتاريخ 2018/11/30.

توقيع

×××× علي



الكمبيالة تضم ثلاث أطراف:

- ✓ الساحب (A): يمضي، يعطي الأمر.
- ✓ المسحوب عليه (B): ينفذ الأمر.
- ✓ المستفيد (C): لصالحه ينفذ الأمر.

ب . السند لأمر (السند الإدني) Billet à ordre :

هو محرر مكتوب يتعهد بموجبه شخص يسمى المحرر أو المدين بدفع مبلغ معين من النقود لأمر شخص ثاني هو المستفيد أو الدائن بمجرد الاطلاع أو في ميعاد معين، وهو قابل للتداول بطريق التظهير، ويحرر السند لأمر على الشكل التالي:

سند لأمر

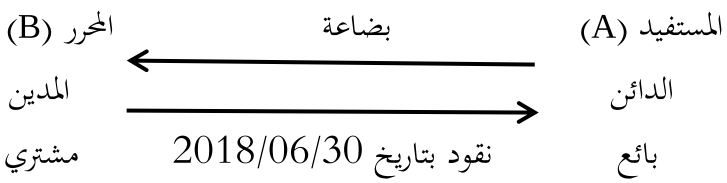
جيجل في: 2018/02/12 المبلغ: 5000دج

بموجب هذه السند سأدفع مبلغ: خمسة آلاف دينار جزائري لأمر السيد:××××محمد، شارع المجاهدين بتاريخ 2018/06/30.

توقيع

××××عبد الله

إذن فالسند لأمر يضم طرفين هما المحرر والمستفيد:



ج . **الشيك Chèque**:

هو محرر مكتوب يتضمن أمرًا صادرًا من شخص هو الساحب إلى شخص آخر هو المسحوب عليه (عادة ما يكون بنكًا)، بأن يدفع لدى الإطلاع مبلغا معينا من النقود لأمره (أي لأمر الساحب نفسه) أو لأمر شخص آخر أو لحامل الشيك، والشيك قابل للتداول عن طريق التظهير.

الشيك يتضمن ثلاث أطراف شأنه في ذلك شأن الكمبيالة، وهم: الساحب محرر الشيك والمدين الأصلي فيه، والمسحوب عليه وهو عادة بنك يودع فيه الساحب نقوده، وأخيرا المستفيد أو من يحرر الشيك لمصلحته، وبالتالي فالشيك يشبه إلى حد بعيد الكمبيالة.

أوجه الشبه والإختلاف بين الكمبيالة والشيك.

أوجه الشبه	
الكمبيالة (السفتجة)	**الشيك**
تحتوي على ثلاث أطراف	يحتوي على ثلاث أطراف
يمكن أن يكون الساحب هو المستفيد	يمكن أن يكون الساحب هو المستفيد
قابلة للتظهير	قابل التظهير
أوجه الإختلاف	
توفى في تاريخ استحقاق معين	يوفى عند التقديم (الإطلاع)
تقدم للمسحوب عليه للقبول	لا يقدم للمسحوب عليه للقبول
التعامل بالكمبيالة يعد عملا تجاريا مهما كانت صفة الاطراف	التعامل بالشيك لا يعد عملا تجاريا إلا إذا صدر من تاجر
المسحوب عليه يكون عادة شخص طبيعي	المسحوب عليه يكون بنكا أو مركز الصكوك البريدية

3.2. مفهوم خصم الأوراق التجارية L'escompte:

بتاريخ 10 مارس قام الشخص A ببيع بضاعة للشخص B، وحرر في مقابل ذلك كمبيالة تستحق بتاريخ 31 ماي قيمتها 30000 دج.

الشخص A (الدائن) سينتظر حتى تاريخ 31 ماي للحصول على أمواله، إلا أنه قد يحتاج إلى هذه الأموال قبل هذا التاريخ.

بافتراض أن الشخص A تقدم بتاريخ 26 مارس إلى البنك من أجل الحصول على سيولة، ومن أجل ذلك قدم للبنك الكمبيالة الموجود لديه، وحصل في مقابل ذلك على مبلغ مالي أقل من المبلغ الموجود على ظهر الورقة

التجارية (الكمبيالة) المحررة سابقا، أما البنك الذي أصبحت الكمبيالة في حوزته فقد حصل هو الآخر على مكافأة نتيجة شرائه لهذه الكمبيالة قبل تاريخ استحقاقها.

يمكن استخراج عدة ملاحظات من هذه العملية بين الدائن (الشخص A) والمدين (الشخص B) من جهة، وبين الدائن والبنك من جهة أخرى:

- ✓ مبلغ الدين يتمثل في 30000 دج، ويسمى القيمة الإسمية للورقة التجارية (Valeur nominale)، وهو المبلغ المحرر على ظهر الورقة التجارية.
- ✓ تاريخ تسديد هذه القيمة الإسمية يسمى بتاريخ استحقاق الورقة التجارية، والمتمثل هنا في 31 ماي.
- ✓ تاريخ تقديم الشخص A الورقة التجارية للبنك للحصول على السيولة، أي 26 مارس، يسمى تاريخ الخصم، ويأتي قبل تاريخ استحقاق الورقة التجارية، وتسمى عملية شراء الورقة التجارية التي قام بها البنك من هذا الشخص بالخصم (خصم الورقة التجارية Escompte).
- ✓ السيولة التي حصل عليها الشخص A من قبل البنك تسمى بالقيمة الحالية للورقة التجارية (Valeur actuelle).
- ✓ أما المكافأة التي حصل عليها البنك نتيجة شرائه للورقة التجارية من الشخص A قبل تاريخ استحقاقها فهي تمثل تكاليف الخصم، أو ما يسمى بالآجيو Agio، وهو الفرق بين القيمة الإسمية للورقة التجارية وبين قيمتها الحالية، هذا الأخير يشمل: قيمة الخصم L'Escompte، العمولات Les Commissions، بالإضافة إلى الضرائب.

المدين B	⟷	الدائن A	⟷	البنك
المسحوب عليه	يتعهد بدفع مبلغ في تاريخ لاحق عن طريق ورقة تجارية	**المستفيد**	يقدم البنك تسبيق نقدي مقابل حصوله على قيمة الآجيو	

الخصم كعملية يعتبر الإجراء الذي يسمح لحامل الورقة التجارية أن يحولها إلى سيولة قبل تاريخ استحقاقها.

وكمبلغ يعبر عن القيمة التي يقتطعها البنك أو الجهة التي قبلت الخصم على أساس معدل خصم معين، والمدة التي تفصل بين تاريخ الخصم وتاريخ استحقاق الورقة.

أ. **حساب الخصم التجاري**: يحسب الخصم التجاري على أساس القيمة الإسمية للورقة التجارية (القيمة الموجودة على ظهر الورقة التجارية) عن مدة محدودة من تاريخ الخصم إلى تاريخ الإستحقاق، وبمعدل خصم محدد.

إذا كانت:

القيمة الإسمية للورقة التجارية (Valeur nominale): V_n.

مدة الخصم: n.

معدل الخصم: t.

فعلاقة الخصم التجاري E_c تحسب باستخدام القانون الأساسي للفائدة البسيطة، وتكتب بالشكل:

$$\boxed{E_c = V_n \times t \times \frac{n}{360}}$$

أو:

حيث D هو القاسم: $D = \frac{360}{t}$ ،

$$\boxed{E_c = \frac{V_n \times n}{D}}$$

ملاحظة: في حالة كانت مدة الخصم بالأشهر، يتم استبدال القيمة $\frac{n}{360}$ بـ $\frac{n}{12}$ مع مراعاة أن n بالأشهر.

ب. **حساب القيمة الحالية التجارية**: تحسب القيمة الحالية Va للورقة التجارية بطرح القيمة الاسمية للورقة التجارية من قيمة الخصم:

$$Va = V_n - E_c = V_n - V_n \times t \times \frac{n}{360}$$

$$\boxed{Va = V_n\left(1 - t \times \frac{n}{360}\right)}$$

ونكتب باستخدام طريقة النمر والقاسم:

$$Va = V_n - E_c = V_n - \frac{V_n \times n}{D}$$

$$Va = V_n\left(1 - \frac{n}{D}\right)$$

$$\boxed{Va = V_n\left(\frac{D-n}{D}\right)}$$

مثال: كمبيالة قيمتها الإسمية 3500 دج، تستحق السداد بتاريخ 20 أكتوبر 2018، في 29 مارس اتفق المدين مع الدائن على سداد قيمتها حالا، فما هي قيمة الخصم والقيمة الحالية للكمبيالة إذا علمت أن معدل الخصم هو 6 %.

الحل:

لدينا: $t = 6\% = 0,06$

$V_n = 3500$ DA

✓ حساب مدة الخصم:

مارس	31-29= 2
أفريل	= 30
ماي	= 31
جوان	= 30
جويلية	= 31
أوث	= 31
سبتمبر	= 30
أكتوبر	= 20
	205 يوم

ومنه: n= 205 يوم

✓ حساب الخصم التجاري:

- الطريقة 01:

$$E_c = V_n \times t \times \frac{n}{360} = 3500 \times 0,06 \times \frac{205}{360}$$

$E_c = 119,58$ DA.

- الطريقة 02:

$$E_c = \frac{V_n \times n}{D} = \frac{3500 \times 205}{\frac{360}{0.06}}$$

$E_c = 119,58$ DA.

✓ حساب القيمة الحالية التجارية:

- الطريقة 01:

$$V_a = V_n - E_c = 3500 - 119,58$$

$V_a = 3380,42$ DA.

- الطريقة 02:

$$Va = V_n\,(1-\frac{n}{D}) = 3500\,(1- \frac{205}{\frac{360}{0.06}})$$

$$Va = 3380{,}45 \text{ DA.}$$

ج. عمليات على علاقة الخصم التجاري:

تنطوي علاقة الخصم التجاري على أربعة متغيرات هي: V_n، t، n، E_c، حيث يمكن إيجاد قيمة أحد المتغيرات بمعرفة قيمة المتغيرات الثلاث الباقية، وذلك كما يلي:

لدينا علاقة الخصم التجاري من الشكل:

$$E_c = V_n \times t \times \frac{n}{360}$$

ومنه يمكن كتابة علاقة حساب معدل الخصم بالشكل:

$$\boxed{t = \frac{360 \times E_c}{V_n \times n}}$$

أما علاقة حساب مدة الخصم فتكتب بالشكل:

$$\boxed{n = \frac{360 \times E_c}{V_n \times t}}$$

هذه العلاقة الأخيرة لحساب مدة الخصم يمكن من خلالها إذا توافرت لدينا القيمة الإسمية للورقة التجارية، قيمة الخصم، ومعدل الخصم تحديد:

- تاريخ استحقاق الورقة إذا تمت معرفة تاريخ خصم الورقة.
- أو تاريخ خصم الورقة إذا تم معرفة تاريخ استحقاقها.

4.2. حساب مجمل تكاليف الخصم Agio :

عند خصم الأوراق التجارية في البنوك يقتطع من قيمتها الإسمية قيمة الخصم، بالإضافة إلى مصاريف أخرى، فمجموع ما يقتطعه البنك من القيمة الإسمية للورقة التجارية يسمى "الآجيو" "Agio"، ويشمل على:

✓ الخصم: L’Escompte

✓ العمولات: Les Commissions

✓ الرسم: La Taxe sur la Valeur Ajoutée (TVA)

الآجيو(متضمن الرسم) = قيمة الخصم + العمولات + الرسم TVA.
Agio (TTC) = E_c + Commissions + TVA.

أما الآجيو خارج الرسم (Hors Taxes) فيحسب كما يلي:

الآجيو(خارج الرسم) = قيمة الخصم + العمولات.
Agio (HT) = E_c + Commissions.

القيمة الإسمية للورقة التجارية	
الخصم + العمولات	**القيمة الحالية الصافية**
Agio	**القيمة الحالية الصافية**
البنك	**الزبون**

تؤخد قيمة الآجيو من طرف البنك، ويأخذ الزبون الذي قدم الورقة التجارية للخصم لدى البنك الفرق بين القيمة الإسمية للورقة التجارية وقيمة الآجيو، وهو ما يسمى بالقيمة الحالية الصافية.

$$\mathbf{V}\boldsymbol{a}_{\text{net}} = \mathbf{V}_{\boldsymbol{n}} - \textbf{Agio}$$

Va_{net}: القيمة الحالية الصافية.

أ. **العمولات**: وتتضمن :

✓**عمولات متناسبة مع الزمن**: تحسب بنفس طريقة حساب الخصم، فهي متناسبة مع القيمة الإسمية للورقة التجارية، والمعدل المرتبط بهذه العمولات:

$$\text{العمولة المتناسبة مع الزمن} = V_n \times t` \times \frac{n}{360}$$

t': معدل العمولة المتناسبة مع الزمن.

✓ **عمولات غير متناسبة مع الزمن**: و تكون متناسبة فقط مع القيمة الإسمية للورقة التجارية و معدل العمولة، و ليس لها أي ارتباط مع عدد أيام أو مدة الخصم:

العمولة الغير متناسبة مع الزمن = $V_n \times K$

K: معدل العمولة الغير متناسبة مع الزمن.

مثال: بتاريخ 4 جويلية تم خصم ورقة تجارية قيمتها الإسمية 6000 دج وتاريخ استحقاقها 31 جويلية. وفق الشروط التالية:

معدل الخصم: 10.5 %.

العمولة المتناسبة مع الزمن: 0,6 %.

العمولة الغير متناسبة مع الزمن: $\frac{1}{8}$ %.

المطلوب: حساب قيمة Agio، والقيمة الحالية الصافية.

الحل:

✓ حساب قيمة الآجيو:

- حساب مدة الخصم:

جويلية 31-4 =27 يوم.

إذن: $n= 27$ يوم

✓ حساب قيمة الخصم:

$$E_c = V_n \times t \times \frac{n}{360} = 6000 \times 0{,}105 \times \frac{27}{360}$$

$E_c = 47{,}25$ DA.

✓ العمولة المتناسبة مع الزمن:

$$V_n \times 0{,}006 \times \frac{n}{360} = 6000 \times 0{,}006 \times \frac{27}{360} = 2{,}7 \text{ DA.}$$

✓ العمولة الغير متناسبة مع الزمن:

$$V_n \times \frac{1}{800} = 6000 \times \frac{1}{800} = 7{,}5 \text{ DA.}$$

بجمع قيمة الخصم وقيم العمولات نحصل على الآجيو:

$$\text{Agio} = 47{,}25 + 2{,}7 + 7{,}5 = 57{,}45 \text{ DA.}$$

✓ حساب القيمة الحالية الصافية:

$$Va_{net} = V_n - \text{Agio}$$

$$Va_{net} = 6000 - 57{,}45 = 5942{,}55 \text{ DA.}$$

ب. المعدل الحقيقي للخصم:

المعدل الحقيقي للخصم هو المعدل الذي يقتطع منه البنك مبلغ الآجيو من القيمة الإسمية للورقة التجارية، فهو المعدل الذي يعكس جميع تكاليف الخصم، بتعبير آخر، فالمعدل الحقيقي للخصم هو المعدل الذي إذا ضرب في القيمة الإسمية للورقة التجارية أو المدة الباقية عن تاريخ استحقاقها لأعطى قيمة الآجيو:

يمكننا حساب قيمة الآجيو بدلالة المعدل الحقيقي للخصم كالآتي:

$$\boxed{\text{Agio} = V_n \times t_r \times \frac{n}{360}}$$

t_r: المعدل الحقيقي للخصم.

من العلاقة السابقة نجد:

$$\boxed{t_r = \frac{360 \times \text{Agio}}{V_n \times n}}$$

مثال: انطلاقا من المثال السابق، سنحاول استبدال المعدلات الثلاث (t، $t`$،k) بمعدل واحد هو المعدل الحقيقي للخصم t_r.

المعدل الحقيقي للخصم t_r المطبق على القيمة الإسمية للورقة التجارية $V_n = 6000$ DA، ولمدة خصم

يوم $n = 27$، يعطي آجيو (خارج الرسم) قيمته 57,45 DA .

وبالتالي يمكننا أن نكتب:

$$57{,}45 = 6000 \times t_r \times \frac{27}{360}$$

$$t_r = \frac{360 \times 57{,}45}{6000 \times 27} = 0{,}12766$$

$$t_r = 12{,}766\ \%$$

كما يمكن ايجاد المعدل الحقيقي للخصم من خلال تحويل نسب أو معدلات الآجيو إلى نسب مئوية سنوية، حيث أن:

$$\boxed{t_r = t + t` + \frac{360k}{n}}$$

t_r: المعدل الحقيقي للخصم.

t: معدل الخصم (المعدل الإسمي للخصم).

$t`$: معدل العمولة المتناسبة مع الزمن.

k: معدل العمولة الغير متناسبة مع الزمن.

n: عدد الأيام المتبقية لإستحقاق الورقة التجارية (مدة خصم الورقة).

لدينا:

$$t_r = t + t` + \frac{360 \times k}{n}$$

$$t_r = 10{,}5 + 0{,}6 + \frac{360 \times k}{n}$$

معدل العمولة الغير متناسبة مع الزمن المئوية السنوية:

$$k = \frac{1}{8}\ \% \longrightarrow 27 \text{ يوم}$$

$$x \longrightarrow 360 \text{ يوم}$$

$$x = \frac{360 \times \frac{1}{8}}{27} = 1{,}666\ \%$$

بالتعويض في علاقة المعدل الحقيقي للخصم نجد:

$$t_r = 10,5 + 0,6 + 1,666$$

$$t_r = 12,766\ \%.$$

ملاحظة:

- ✓ يعتمد معدل الخصم الحقيقي على المعدلات k،$t`$ ، t ، بالإضافة إلى مدة الخصم n، حيث كلما كانت مدة الخصم أقل، كلما كان المعدل الحقيقي للخصم أعلى، بعبارة أخرى يكون معدل الخصم الحقيقي أعلى كلما كان تاريخ خصم الورقة أقرب إلى تاريخ استحقاقها.
- ✓ الرسم على القيمة المضافة (TVA) = الآجيو خارج الرسم (HT) × معدل الرسم.

5.2. تكافؤ (استبدال) الأوراق التجارية:

يعتبر استبدال الأوراق التجارية تطبيقا مباشرا للفائدة البسيطة التي تم دراستها في الفصول السابقة، وذلك فيما يتعلق بالجملة والقيمة الحالية، فعادة ما يكون الشخص الطبيعي أو المعنوي مدينا بمجموعة من الديون ذات أجل استحقاق قصير، وغالبا ما تكون الديون القصيرة الأجل تلك الديون التي تستحق في أقل من سنة من ايداعها أو من إقراضها، فإذا كان شخص مدينا لشخص آخر، فهو بحاجة إلى معرفة مقدار المبلغ المسدد عند تاريخ الإستحقاق أو قبل تاريخ الإستحقاق، إذا قام بخصم الأوراق الموجودة لديه، وقد يضطر لإستبدالها بأوراق أخرى تستحق في تواريخ لاحقة أو سابقة لتاريخ الإستحقاق.

فإذا استحق دفع الورقة (أو الأوراق) التجارية الجديدة بعد تاريخ الاستحقاق للورقة أو الأوراق القديمة (الأصلية)، فإن قيمة الأوراق الجديدة تكون عبارة عن جملة مبالغ الأوراق التجارية الأصلية في تاريخ الاستحقاق الجديد.

وإذا استحق دفع الورقة (أو الأوراق) التجارية الجديدة قبل تاريخ الاستحقاق للورقة التجارية الجديدة تكون عبارة عن القيمة الحالية للورقة (أو الأوراق) التجارية الأصلية في تاريخ الاستحقاق الجديد.

ويتيح تطبيق هذا المبدأ تبسيط إدارة الأوراق التجارية (الديون) للدائن، وسهولة استبدالها إذا اقتضت الضرورة ذلك.

1.5.2. التكافؤ بين ورقتين تجاريتين: يمكن لشخص أو مؤسسة نتيجة لظروف غير متوقعة أن يتقدم بطلب تأجيل تاريخ استحقاق الورقة التجارية، وهذا يتطلب إعادة حساب القيمة الإسمية للورقة التجارية في تاريخ الإستحقاق الجديد، بشرط أن تكون القيمة الحالية للورقة الجديدة والقيمة الحالية للورقة القديمة متساويتين في تاريخ الخصم (تاريخ التكافؤ)، وهو ما يطلق عليه تكافؤ الأوراق التجارية.

وعليه يمكن القول أن ورقتين تجاريتين قيمتهما الإسمية Vn_1 و Vn_2، أنهما متكافئتين إذا تساوت قيمتهما الحالية Va_1 و Va_2، في تاريخ الخصم (تاريخ التكافؤ).

القيمة الحالية للورقة التجارية الجديدة = القيمة الحالية للورقة القديمة

$$Va_1 = Va_2$$

$$Vn_1\left(1 - t \times \frac{n_1}{360}\right) = Vn_2\left(1 - t \times \frac{n_2}{360}\right)$$

n_1، n_2: مدة خصم الورقة الأولى والثانية على التوالي.

من العلاقة السابقة نكتب:

$$\frac{V_{n1}}{V_{n2}} = \frac{1 - t \times \frac{n_2}{360}}{1 - t \times \frac{n_1}{360}}$$

مثال: شخص مدين بمبلغ 147000 دج يستحق بعد 9 أشهر من الآن، أراد هذا الشخص استبداله بدين جديد يستحق بعد سنة من الآن، فما هي قيمة الدين الجديد إذا كان معدل الخصم المتفق عليه لتسوية هذا الدين هو 4 % سنويا ؟

الحل:

لدينا: $Vn_1 = 147000$

$t = 4\ \%$

أشهر $9 = n_1 = 270$ يوم

أشهر $12 = n_2 = 360$ يوم

من شرط التكافؤ: $Va_1 = Va_2$

$$Vn_1\,(1 - t \times \frac{n_1}{360}) = Vn_2\,(1 - t \times \frac{n_2}{360})$$

$$147000(1 - 0{,}04 \times \frac{270}{360}) = Vn_2\,(1 - 0{,}04 \times \frac{360}{360})$$

$$Vn_2 = \frac{142590}{0{,}96} = 148531{,}25 \text{ DA.}$$

✓ **تحديد تاريخ التكافؤ لورقتين تجاريتين:**

ويعني هذا التحديد أنه يجب الأخذ بعين الاعتبار لعدد الأيام التي تفصل تواريخ استحقاق الورقة التجارية الأولى والثانية.

مثال 01: ورقتين تجاريتين، القيمة الإسمية للورقة الأولى 98400 دج، وتستحق بتاريخ في 31 أكتوبر، أما الورقة الثانية فقيمتها الإسمية 99000 دج، وتستحق بتاريخ 30 نوفمبر، ما هو التاريخ الذي تتكافئ فيه هاتين الورقتين إذا علمت أن معدل الخصم هو 7,2 % ؟

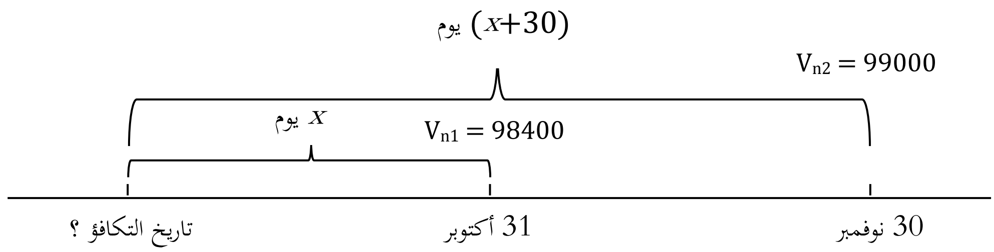
الحل:

سنقوم بحساب القيمة الحالية التجارية للورقتين في تاريخ معين.

إذا كان هناك تاريخ تتساوى فيه القيمة الحالية لهاتين الورقتين التجاريتين، نقول أن هاتين الورقتين التجاريتين متكافئتين، والتاريخ الذي تتكافئ فيه هاتين الورقتين يسمى تاريخ التكافؤ.

يقع تاريخ تكافؤ الورقتين التجاريتين قبل تاريخ استحقاق الورقة التجارية الأولى، أي قبل تاريخ 31 أكتوبر، وهو تاريخ استحقاق أول ورقة من بين الأوراق الموجودة.

إذا كان x هو عدد الأيام التي تفصل بين تاريخ التكافؤ الذي نبحث عنه، وتاريخ 31 أكتوبر، فبالتالي يمكن القول أن $(x+30)$ هو عدد الأيام التي تفصل بين تاريخ التكافؤ وتاريخ استحقاق الورقة الثانية (30 نوفمبر).



وعليه لإيجاد تاريخ تكافؤ الورقتين التجاريتين نستعمل شرط التكافؤ:

$$Va_1 = Va_2$$

ومنه:

$$V_{n1}\,(1 - t \times \frac{x}{360}) = V_{n2}\,(1 - t \times \frac{(x+30)}{360})$$

$$98400(1 - 0{,}072 \times \frac{x}{360}) = 99000(1 - 0{,}072 \times \frac{(x+30)}{360})$$

$$98400 - \frac{7084{,}8\,x}{360} = 99000 - \frac{7128(x+30)}{360}$$

$$\frac{7128(x+30)}{360} - \frac{7084{,}8x}{360} = 600$$

$$7128\,x + 213840 - 7084{,}8\,x = 216000$$

$$43{,}2\,x = 2160$$

$$x = \frac{2160}{43{,}2} = 50 \text{ يوم}$$

يقع تاريخ التكافؤ للورقتين التجاريتين قبل 50 يوم من تاريخ 31 أكتوبر (تاريخ استحقاق الورقة الأولى)، ويمكن إيجاده كما يلي:

أكتوبر	31 =
سبتمبر	19 =
	50 يوم

أي أن تاريخ التكافؤ هو 11 سبتمبر.

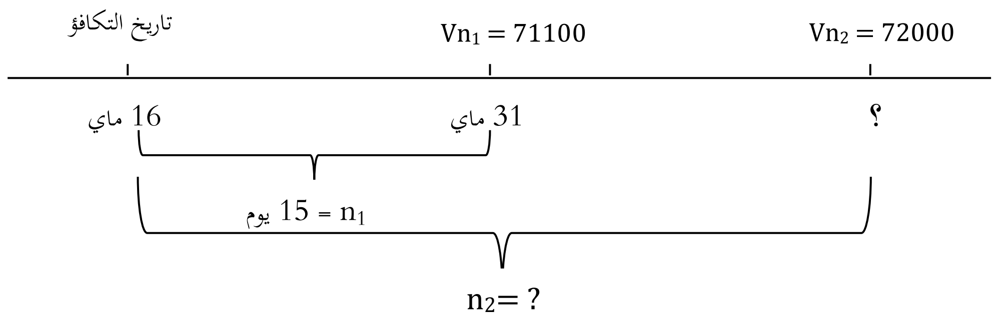
ملاحظة: تاريخ تكافؤ ورقتين تجاريتين، إذا كان موجود، فهو يقع قبل تاريخ استحقاق الورقة التجارية الأقرب له.

مثال 02: شخص B مدين لشخص A بمبلغ 71100 دج يدفع بتاريخ 31 ماي، وبتاريخ 16 ماي اتفق الدائن والمدين على تاريخ جديد لتسديد قيمة هذا الدين، إذا علمت أن قيمة الدين الجديد هي 72000 دج، ومعدل هذا الخصم هو 10 %، أوجد تاريخ استحقاق هذا الدين الجديد.

الحل:

لدينا: $t = 10\%$ ، $V_{n_1} = 71100$ DA

$V_{n_2} = 72000$ DA



شرط التكافؤ هو: $V_{a_1} = V_{a_2}$

تاريخ التكافؤ هو: 16 ماي

بالتعويض في شرط التكافؤ نجد:

$$V_{n_1}\left(1 - t \times \frac{n_1}{360}\right) = V_{n_2}\left(1 - t \times \frac{n_2}{360}\right)$$

$$71100\left(1 - 0,1 \times \frac{15}{360}\right) = 72000\left(1 - 0,1 \times \frac{n_2}{360}\right)$$

$$70803,75 = 72000 - 20 \times n_2$$

$$72000 - 70803,75 = 20 \times n_2$$

$$1196,25 = 20 \times n_2$$

$$n_2 = \frac{1196,25}{20} \simeq 60 \text{ يوم}$$

إذن تاريخ استحقاق الدين الجديد هو:

ماي $= 15$

جوان $= 30$

جويلية $= 15$

---

60 يوم

تاريخ الاستحقاق هو: 15 جويلية.

2.5.2. التكافؤ بين عدة أوراق تجارية (ديون):

قد تكون هناك ورقة تجارية وحيدة تسوى أو تستبدل بورقة تجارية وحيدة كما سبق معالجته، أو قد تكون هذه الورقة الوحيدة تستبدل بمجموعة من الأوراق التجارية، أو قد تكون هناك مجموعة من الأوراق التجارية تستبدل بورقة تجارية واحدة، في هذه الحالة يستعمل نفس المبدأ في حالة تكافؤ ورقتين مع تغيير عدد الأوراق بحيث:

القيمة الحالية للورقة المكافئة = مجموع القيم الحالية للأوراق الأخرى.

$$\mathbf{V}\boldsymbol{a} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{V}\boldsymbol{a}_{\mathbf{i}}$$

$$\mathbf{V_n}\left(\mathbf{1} - \mathbf{t} \times \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{360}}\right) = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{V_{ni}}\left(\mathbf{1} - \mathbf{t} \times \frac{\mathbf{n_i}}{\mathbf{360}}\right)$$

إن تسوية واستبدال الأوراق التجارية لا تخرج عن إحدى الحالات التالية:

- ✓ استبدال ورقة تجارية واحدة بتاريخ سابق لتواريخ استحقاق الأوراق التجارية القديمة.
- ✓ استبدال ورقة تجارية واحدة بتاريخ لاحق لتواريخ استحقاق الأوراق التجارية القديمة.
- ✓ استبدال ورقة تجارية واحدة تستحق خلال تواريخ استحقاق الأوراق التجارية القديمة.
- ✓ استبدال عدة أوارق تجارية تستحق خلال تواريخ استحقاق الأوراق التجارية القديمة.

مثال01: أراد تاجر استبدال أوراقه التجارية الثلاث بورقة تجارية واحدة تستحق بعد شهرين، فما هي القيمة الإسمية لهذه الورقة الجديدة إذا علمت أن:

- ✓ الورقة الوقة قيمتها الإسمية 2000 دج، وتستحق بعد 3 أشهر.

✓ الورقة الثانية قيمتها الإسمية 3500 دج، وتستحق بعد 5 أشهر.

✓ الورقة الثالثة قيمتها الإسمية 6000 دج، وتستحق بعد 7 أشهر.

✓ معدل الخصم: 6%.

الحل:

V_n: القيمة الإسمية للورقة الجديدة.

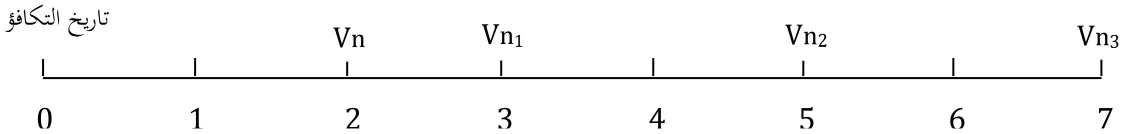
شرط التكافؤ هو:

$$Va = \sum_{i=1}^{n} Va_i$$

$$Va = Va_1 + Va_2 + Va_3$$

$$V_n(1 - t \times \frac{n}{12}) = V_{n_1}(1 - t \times \frac{n_1}{12}) + V_{n_2}(1 - t \times \frac{n_2}{12}) + V_{n_3}(1 - t \times \frac{n_3}{12})$$

✓ تاريخ التكافؤ هو النقطة 0:



ومنه:

$n = 2$ شهر

$n_1 = 3$ أشهر

$n_2 = 5$ أشهر

$n_3 = 7$ أشهر

بالتعويض في شرط التكافؤ نجد:

$$V_n(1 - 0{,}06 \times \frac{2}{12}) = 2000(1 - 0{,}06 \times \frac{3}{12}) + 3500(1 - 0{,}06 \times \frac{5}{12}) + 6000(1 - 0{,}06\ \frac{7}{12})$$

$$0{,}99V_n = 1970 + 3412{,}5 + 5790$$

$$0{,}99\ V_n = 11172{,}5$$

$$V_n = \frac{11172,5}{0,99}$$

$V_n = 11285,35$ DA.

مثال 02: تاجر مدين بالأوراق التجارية التالية:

- ✓ الورقة الأولى قيمتها 5000 دج تستحق بعد 5 أشهر.
- ✓ الورقة الثانية قيمتها 7000 دج تستحق بعد 9 أشهر.
- ✓ الورقة الثالثة قيمتها 8500 دج تستحق بعد 10 أشهر.

بافتراض أنه بتاريخ استحقاق الورقة التجارية الأولى قرر هذا التاجر استبدال الورقتين التجاريتين الثانية والثالثة بورقة تجارية جديدة تستحق بعد 7 أشهر.

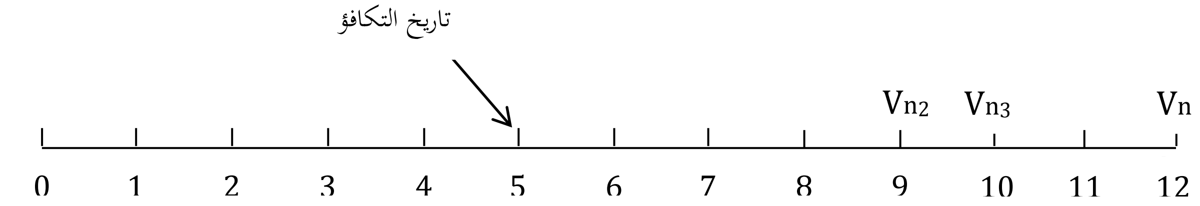
- ✓ أحسب القيمة الإسمية للورقة التجارية الجديدة إذا علمت أن معدل الخصم 5%.

الحل:

بافتراض أن الورقة التجارية الأولى تم دفع قيمتها بتاريخ استحقاقها.

إذن شرط التكافؤ: $Va = Va_1 + Va_2$

تاريخ التكافؤ: نهاية الشهر الخامس.



تخصم الورقة الجديدة بـــ 7 أشهر، والورقتين القديمتين الثانية والثالثة بـــ 4 و 5 أشهر على التوالي:

$$V_n\,(1- 0,05 \times \frac{7}{12}) = 7000\,(1 - 0,05 \times \frac{4}{12}) + 8500\,(1 - 0,05 \times \frac{5}{12})$$

$$0,970833\ V_n = 6883,33 + 8322,91 = 15206,25$$

$$V_n = \frac{15206,25}{0,970833} = 15663$$

$V_n = 15663$ DA.

مثال 03: بتاريخ 6 سبتمبر طلب مدين لدية ثلاث أوراق تجارية.

الورقة الأولى: 1000 دج تستحق بتاريخ 31 أكتوبر.

الورقة الثانية: 3000 دج تستحق بتاريخ 30 نوفمبر.

الورقة الثالثة: 2000 دج تستحق بتاريخ 31 ديسمبر.

من الدائن تعويض هذه الأوراق التجارية الثلاث بورقة وحيدة تستحق بتاريخ 15 ديسمبر.

أحسب القيمة الاسمية للورقة التجارية الجديدة معدل الخصم 9%.

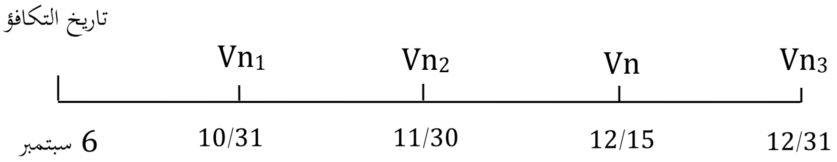
الحل:

حتى يتمكن المدين من استبدال الأوراق التجارية الثلاث بورقة وحيدة يجب أن يتحقق شرط التكافؤ:

$$Va = Va_1 + Va_2 + Va_3$$

تاريخ التكافؤ هو: 6 سبتمبر.

$$Vn(1-t \times \frac{n}{360}) = Vn_1\,(1-t \times \frac{n_1}{360}) + Vn_2\,(1-t \times \frac{n_2}{360}) + Vn_3\,(1-t \times \frac{n_3}{360})$$



إيجاد مدة خصم الأوراق التجارية:

من 6 سبتمبر إلى 31 أكتوبر يوجد 55 يوم.

من 6 سبتمبر إلى 30 نوفمبر يوجد 85 يوم.

من 6 سبتمبر إلى 31 ديسمبر يوجد 116 يوم.

من 6 سبتمبر إلى 15 ديسمبر يوجد 100 يوم.

$$Vn(1-0.09\times\frac{100}{360}) = 1000(1-0.09 \times \frac{55}{360}) + 3000(1-0.09 \times\frac{85}{360}) + 2000(1-0.09 \times \frac{116}{360})$$

$$0.975\times Vn = 986.25+2936.25+1942$$

$$0.975\times Vn = 5864.5 \Longrightarrow Vn = \frac{5864.5}{0.975}$$

$$Vn = 6014.87 \text{ DA}.$$

مثال 4: شخص مدين بالمبالغ التالية:

1000 دج يستحق بعد 3 أشهر.

12000 دج يستحق بعد 4 أشهر.

13000 دج يستحق بعد 6 أشهر.

فإذا أراد المدين استبدال هذه الديون بدينين، الأول نصف الثاني ويسدّد حالا، ودين جديد ثاني يسدد بعد 8أشهر، فما هي قيمة هذين الدينين الجديدين، إذا علمت أن معدل الخصم 9 % سنويا.

الحل:

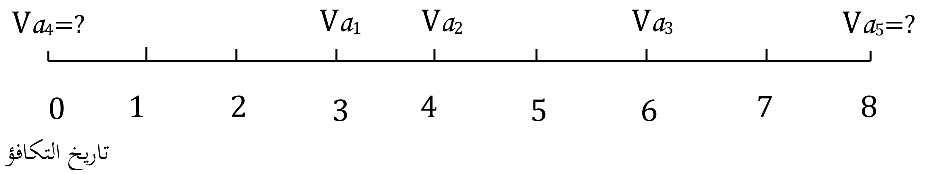
لاستبدال الديون القديمة بالديون الجديدة ينبغي تحقق شرط التكافؤ:

$$Va_4 + Va_5 = Va_1 + Va_2 + Va_3$$

Va_4: القيمة الحالية للدين الأول.

Va_5: القيمة الحالية للدين الجديد الثاني.

- تاريخ التكافؤ هو تاريخ تسديد الدين الجديد الأول.



لدينا: $2Vn_4 = Vn_5$

- مدة الخصم الديون القديمة والديون الجديدة هي:

$n_1 =$ 3 أشهر.

$n_2 =$4 أشهر .

$n_3 =$6 أشهر .

$n_4 =$0 شهر .

$n_5 =$8 أشهر .

بالتعويض في شرط التكافؤ نجد:

$$V_{n4}(1-t \times \frac{n_4}{12})+V_{n5}(1-t \times \frac{n_5}{12})= V_{n1}(1-t \times \frac{n_1}{12})+V_{n2}(1-t\times \frac{n_2}{12})+V_{n3}(1-t\times \frac{n_3}{12})$$

$$V_{n4}(1-0,09\times\frac{0}{12})+V_{n5}(1-0,09\times\frac{8}{12})=10000(1-0.09\times\frac{3}{12})+$$

$$12000(1-0,09\times \frac{4}{12})+13000\ (1-0,09 \times \frac{6}{12})$$

$$V_{n4}+ 0,94\ V_{n5}= 9775+ 11640+12415$$

لدينا كذلك: $2V_{n4}= V_{n5}$

ومنه:

$$2,88\ V_{n4}= 33830 \quad \Longrightarrow \quad V_{n4} = \frac{33830}{2,88}$$

$V_{n4}= 11746,53$ DA.

$V_{n5}= 2 \times 11746,53$

$V_{n5}= 23493,06$ DA.

6.2. تاريخ الاستحقاق الوسطي لعدة أوراق تجارية:

إن تاريخ الاستحقاق الوسطي (المتوسط) يقوم على فكرة استبدال أوراق تجارية أو ديون قديمة بدين أو ورقة تجارية جديدة قيمتها الإسمية تعادل مجموع القيم الإسمية للأوراق القديمة، ويسمى تاريخ استحقاق الدين الجديد بتاريخ الاستحقاق الوسطي.

ويتوسط تاريخ الاستحقاق للورقة الجديدة (أو الدين الجديد) تواريخ استحقاق الأوراق القديمة، بمعنى أنه يقع بين تاريخ استحقاق أول ورقة تجارية وتاريخ استحقاق آخر ورقة تجارية.

بافتراض أنه لدينا مجموعة من الأوراق التجارية القديمة قيمتها الاسمية هي: $V_{n1}, V_{n2}, V_{n3}, ..., V_{nn}$ وتواريخ استحقاقها هي: $n_1, n_2, n_3, ..., n_n$ على التوالي، ويراد استبدالها بورقة تجارية وحيدة قيمتها الإسمية تعادل مجموع القيم الاسمية لهذه الأوراق.

لتحقيق التكافؤ لا بد من تحقق الشرط: $Va = \sum_{i=1}^{n} Va_i$

$$Vn - Vn \times t \times \frac{n}{360} = Vn_1 - Vn_1 \times t \times \frac{n_1}{360} + Vn_2 - Vn_2 \times t \times \frac{n_2}{360} + Vn_3 - Vn_3 \times t \times \frac{n_3}{360} + \ldots\ldots + Vn_n - Vn_n \times t \times \frac{n_n}{360}$$

$$\cancel{Vn} - Vn \times \cancel{t}\ \frac{n}{360} = \cancel{Vn_1 + Vn_2 + Vn_3 + \ldots\ldots + Vn_n} - Vn_1 \times \cancel{t}\,\frac{n_1}{360} - Vn_2 \times \cancel{t}\,\frac{n_2}{360} - Vn_3 \times \cancel{t}\,\frac{n_3}{360} - \ldots\ldots - Vn_n \times \cancel{t}\,\frac{n_n}{360}.$$

بما أن القيم الإسمية متساوية في الطرفين، و t هو نفسه، تصبح العلاقة السابقة كما يلي :

$$Vn \times \frac{n}{360} = Vn_1 \times \frac{n_1}{360} + Vn_2 \times \frac{n_2}{360} + Vn_3 \times \frac{n_3}{360} + \ldots\ldots\ldots + Vn_n \times \frac{n_n}{360}$$

$$\frac{1}{360}\ Vn \times n = \frac{1}{360}(Vn_1 \times n_1 + Vn_2 \times n_2 + Vn_3 \times n_3 + \ldots + Vn_n \times n_n)$$

ومن هذه الأخيرة يمكن استخلاص العلاقة المختصرة لحساب تاريخ الإستحقاق الوسطي N:

$$N = \frac{V_{n1} \times n_1 + V_{n2} \times n_2 + V_{n3} \times n_3 + \cdots + V_{nn} \times n_n}{Vn}$$

N: يمثل تاريخ الاستحقاق الوسطي:

$$\boxed{N = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Vn_i \times n_i}{Vn}\right)}$$

مثال: مؤسسة عليها 3 أوراق تجارية:

الورقة الأولى قيمتها الاسمية 43200 دج تستحق بتاريخ 10 جوان.

الورقة الثانية قيمتها الاسمية 28800 دج تستحق بتاريخ 01 جويلية.

الورقة الثالثة قيمتها الاسمية 32400 دج تستحق بتاريخ 01 أوت.

إذا أرادت هذه المؤسسة تغيير الوراق الثلاثة بورقة وحيدة قيمتها الاسمية 104400 دج، احسب تاريخ استحقاقها إذا كان معدل الخصم 12.4 %.

الحل:

القيمة الإسمية للورقة الجديدة = مجموع القيم الإسمية للأوراق القديمة.

نلاحظ أن الحالة هنا هي حالة استحقاق متوسط، حيث يمكننا الإستغناء عن معدل الخصم من خلال تطبيق قانون الإستحقاق الوسطي.

$$N = \frac{V_{n1} \times n_1 + V_{n2} \times n_2 + V_{n3} \times n_3 + \cdots + V_{nn} \times n_n}{Vn}$$

بافتراض أن تاريخ التكافؤ هو: 10 جوان.

وبالتالي مدة خصم الأوراق الثلاثة: 0 يوم، 21 يوم، 52 يوم على التوالي:

$$N = \frac{(43200 \times 0) + (28800 \times 21) + (32400 \times 52)}{104400}$$

$$= \frac{0+604800+1684800}{104400}$$

$$N = 21.931 \approx 22 \text{ يوم}$$

تاريخ الاستحقاق هو 2 جويلية.

ملاحظة: بما أن معدل الخصم يتم اختزاله في علاقة التكافؤ، فالتكافؤ بين الأوراق التجارية أو الديون يتحقق في أي تاريخ يتم اختياره بشرط الأخذ بعين الإعتبار إشارة المبالغ وموقعها من تاريخ التكافؤ.

القسم الثاني: العمليات المالية طويلة الأجل

الفصل الأول

الفائدة المركبة:

L'Intérêt composé

هدف الفصل	✓ معرفة العلاقة الأساسية للفائدة المركبة. ✓ استعمال علاقة الفائدة المركبة لحساب المدة، معدل الفائدة المركبة، والمبلغ الأصلي. ✓ معرفة كيفية حساب الجملة في حالة المدة غير كاملة. ✓ حساب المعدل المكافئ والمعدل المتناسب.
خطة الفصل	1.1. العلاقة الأساسية للفائدة المركبة. 2.1. عمليات على علاقة الفائدة المركبة. 3.1. حساب الجملة في حالة عدد الفترات غير الكاملة. 4.1. المعدلات المتكافئة والمعدلات المتناسبة.

في الفصول السابقة تم حساب الفائدة والقيمة الحالية باستخدام الفائدة البسيطة، أي أنه طوال مدة عملية الإقراض أو التوظيف حساب الفائدة يستند على المبلغ الأصلي فقط (رأس المال الأولي)، وهذا راجع إلى أن العمليات المالية قصيرة الأجل لا تتجاوز في العادة السنة الواحدة أو عشرات الأيام.

أما عندما تكون عملية الإقراض أو التوظيف طويلة الأجل، والتي يمكن أن تمتد لعدة سنوات، فمن العادة أن المقرض في نهاية المدة المتفق عليها مع المقترض، سنة على سبيل المثال، ينظر إلى الفائدة البسيطة التي تم تكوينها على المبلغ الأصلي خلال هذه السنة على أنها رأس مال جديد، وذلك بعد جمعها مع المبلغ الأصلي (رأس المال الأولي)، والذي ستحسب عليه فائدة في السنة الموالية وهكذا...

وعليه يقال أن مبلغ ما وظف (أقرض) بفائدة مركبة إذا كانت الفائدة المحصل عليها تضاف إلى المبلغ الأصلي وتستثمر في السنوات اللاحقة، وبالتالي فالفائدة تحسب على الجملة (رأس المال) في كل وحدة زمنية، وليس على الأصل فقط، وهذا يؤدي إلى زيادة الفوائد من سنة إلى أخرى على عكس الفائدة البسيطة التي تبقى ثابتة عند كل فترة.

مثال: اقترض شخص مبلغ 10000 دج بمعدل فائدة سنوي 10%.

فائدة السنة الأولى يمكن حسابها باستخدام علاقة الفائدة البسيطة.

$I_1 = C_0\, t\, n = 10000 \times 0{,}1 = 1000$ DA.

وعليه في نهاية السنة الأولى تصبح الجملة $10000 + 1000 = 11000$ DA ، وهو المبلغ الجديد الذي سيتم على أساسه احتساب الفوائد خلال السنة الثانية.

فوائد السنة الثانية تعادل 1100 دج، وتجمع هذه الفوائد مع المبلغ الأصلي تحصل على رأسمال جديد قدره: $11000 + 1100 = 12100$ DA، يتم على أساسه احتساب الفوائد خلال السنة الثالثة.

أي أن فوائد السنة الثالثة تحسب انطلاقا من الجملة المحصلة في نهاية السنة الثانية، أي:

$I_3 = 12100 \times 0{,}1 = 1210$ ، حيث سيتم جمع هذه الفوائد مع المبلغ الأصلي في السنة الثالثة:

$12100 + 1210 = 13310$DA، هذا المجموع يمثل قيمة المبلغ الذي سيدفعه المقترض للمقرض بعد ثلاث سنوات، وهو يتضمن بالإضافة إلى قيمة القرض، مجموع الفوائد خلال ثلاث سنوات، وذلك بمعدل فائدة 10%.

في حالة تطبيق علاقة الفائدة البسيطة لحساب مجموع ما يدفعه المقترض للمقرض في نهاية السنة الثالثة، يمكن استعمال علاقة الجملة وذلك كما يلي:

$$Ct = 10000\ (1+ t \times n)$$

$$Ct = 1000\ (1+ 0.1 \times 3)$$

$$Ct = 13000 \text{ DA.}$$

رسملة (تعني إضافة الفوائد إلى رأس المال) الفوائد في نهاية المدة المتفق عليها (في مثالنا السابق سنوية) من خصائص الفائدة المركبة.

1.1. العلاقة الأساسية للفائدة المركبة: باعتبار أن المودع أو المقرض لأمواله يهدف إلى تحصيل مبالغ جديدة، فإن العملية في نهاية الفترة تعطي ما يسمى بالجملة، وهي القيمة الناتجة عن جمع المبلغ الأصلي مع الفائدة البسيطة المحصل عليها للفترة، وعلاقة الجملة هي العلاقة الأساسية المستعملة في هذا الموضوع.

تتحدد قيمة الفائدة المركبة بنفس محددات الفائدة البسيطة وهي:

C: المبلغ الأصلي (مبلغ رأس المال)، وهو أصل القرض أو المبلغ الموظف.

t: معدل الفائدة، وهو نسبة مئوية تعطى في الغالب على أساس سنوي.

n: تمثل عدد الفترات الزمنية لإقتراض أو توظيف المبلغ الأصلي، وعادة ما تكون سنوية.

وبالتالي يمكننا أن نستنتج علاقة الفائدة المركبة (الرسملة سنوية) ابتداء من احتساب فائدة السنة الأولى والسنوات التي تليها، إلى غاية السنة n، كما هو موضح في الجدول الموالي:

السنوات	رأس المال في بداية السنة	فوائد السنة	القيمة المحصلة في نهاية السنة بعد رسملة الفوائد السنوية
1	C	$C \times t$	$C + C \times t = C(1+t)$.
2	$C(1+t)$	$C(1+t) \times t$	$C(1+t) + C(1+t)\times t = C(1+t)(1+t) = C(1+t)^2$.
3	$C(1+t)^2$	$C(1+t)^2 \times t$	$C(1+t)^2 + C(1+t)^2 \times t = C(1+t)^2(1+t) = C(1+t)^3$.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n-1	$C(1+t)^{n-2}$	$C(1+t)^{n-2} \times t$	$C(1+t)^{n-2} + C(1+t)^{n-2} \times t = C(1+t)^{n-2}(1+t) = C(1+t)^{n-2}$.
n	$C(1+t)^{n-1}$	$C(1+t)^{n-1} \times t$	$C(1+t)^{n-1} + C(1+t)^{n-1} \times t = C(1+t)^{n-1}(1+t) = C(1+t)$.

من خلال الجدول نجد أن الجملة المكتسبة C_n عن توظيف مبلغ C بعد عدد من الفترات الزمنية n، بمعدل فائدة مركبة t عن كل وحدة زمنية تحسب وفق العلاقة التالية:

$$\boxed{C_n = C(1+t)^n}$$

مثال 01: وظف شخص مبلغ 1000 دج لمدة 3 سنوات بمعدل فائدة 5%، احسب قيمة الجملة المحصلة.

الحل:

$t=5\%$ ، $n=3$ سنوات

$$C_n = C(1+t)^n$$

$$C_3 = 1000(1+0{,}05)^3 = 1157{,}63 \text{ DA}.$$

مثال 02: مبلغ قدره 10000دج وظف بفائدة مركبة لمدة 6 سنوات، وذلك بمعدل فائدة ثلاثي قدره 2.5%، وبرسملة ثلاثية.

- احسب القيمة المحصلة في نهاية مدة التوظيف.

الحل:

بما أن الرسملة ثلاثية ومعدل الفائدة ثلاثي، فمدة التوظيف يجب أن تكون ثلاثية كذلك.

إذن: $n = 6 \times 4 = 24$ ثلاثي.

$$C_{24} = 10000(1{,}025)^{24}$$

$$C_{24} = 18087{,}26 \text{ DA.}$$

ملاحظات:

1- إن العلاقة السابقة لحساب الجملة تقتضي تطابق معدل الفائدة مع مدة الرسملة، فإذا كانت الرسملة سنوية لابد أن يكون معدل الفائدة المركبة سنويا، وإذا تم الاتفاق على رسملة الفوائد شهريا أو فصليا أو سداسيا وجب أن يكون معدل الفائدة المركبة متطابقا مع مدة الرسملة.

2- من خلال الجدول السابق يتضح أن فوائد السنوات المتتالية، وأيضا الجملة المحصلة في نهاية السنوات المتتالية تشكل متوالية هندسية أساسها $(1+t)$.

3- على عكس علاقة حساب الفائدة البسيطة التي تمدنا مباشرة بقيمة الفائدة البسيطة، فالعلاقة الأساسية للفائدة المركبة تمدنا بالقيمة (الجملة) المحصلة، ويتعين لمعرفة قيمة الفائدة المركبة طرح أصل القرض (أو المبلغ الموظف) في جملته المحصلة كما يلي:

$$I = C_n - C = C\,(1+t)^n - C$$

$$\boxed{I = C\,[(1+t)^n - 1]}$$

مثال: أودع شخص مبلغ 781250دج في أحد البنوك بمعدل 6 % سنويا، ولمدة 5 سنوات.

- أوجد الفائدة المحققة خلال مدة التوظيف.

الحل:

$$I = C\,[(1+t)^n - 1]$$

$$I = 781250\,[(1+0{,}06)^5 - 1]$$

$$I = 264238{,}7325 \text{ DA.}$$

2.1. عمليات على علاقة الفائدة المركبة: العلاقة الأساسية لحساب القيمة (الجملة) المحصلة لمبلغ وظف بفائدة مركبة $C_n=C(1+t)^n$، يمكن حسابها باستخدام الآلة الحاسبة، كما يمكن استخدام الجداول المالية، حيث يمكن إيجاد القيمة $(1+t)^n$ من الجدول المالي رقم 01.

كما تمكننا العلاقة السابقة من حساب C، t، n.

أ. **حساب المبلغ الأصلي:** إذا كانت لدينا الجملة المحصلة، مدة التوظيف أو الاقتراض، ومعدل الفائدة المركبة، يمكن إيجاد قيمة المبلغ الأصلي كما يلي:

$$C_n = C(1+t)^n$$

$$\boxed{C = \frac{C_n}{(1+t)^n} = C(1+t)^{-n}}$$

وهذه العلاقة هي نفسها علاقة القيمة الحالية لمبلغ مستقبلي في الوقت الحاضر.

مثال: وظف شخص مبلغ مالي في أحد البنوك، بمعدل فائدة سنوي 7.5% وبرسملة سنوية، فأعطى بعد 10 سنوات جملة قدرها 123661.92دج.

أحسب قيمة المبلغ الموظف.

الحل:

لدينا: $n=10$سنوات، $t=7{,}5\%$

$C=?$ ، $C_{10}= 123661{,}92$ DA

- الطريقة 01:

$$C = \frac{C_{10}}{(1+t)^n} = \frac{123661{,}92}{(1+0{,}075)^{10}}$$

$$C = \frac{123661.92}{2.061032} = 60000 \text{ DA.}$$

كما يمكن استخدام الجدول المالي رقم 01 لإيجاد القيمة $(1+0.075)^{10}$ وذلك بأخذ العمود الذي يمثل $t=7.5\%$ ، والسطر رقم 10.

- الطريقة 02:

يمكن إيجاد قيمة المبلغ الأصلي باستخدام العلاقة:

$$C = C_n(1+t)^{-n}$$

$$C = 123661,92\ (1+0.075)^{-10}$$

$$C = 123661,92 \times 0.485194$$

$$C = 60000\ \text{DA}.$$

ويمكن كذلك إيجاد القيمة $0,485194 = (1+0,075)^{-10}$ باستخدام الجدول المالي لرقم 02، عند العمود الذي يشير إلى $t= 7,5\%$، والسطر رقم 10.

ب. حساب المعدل: إذا توفر لدينا المبلغ الأصلي، الجملة المحصلة عن توظيف هذا المبلغ، ومدة التوظيف، بالإمكان إيجاد معدل الفائدة باستخدام العلاقة الأساسية للفائدة المركبة كما يلي:

$$C_n = C(1+t)^n$$

يمكننا أن نكتب:

$$(1+t)^n = \frac{C_n}{C} \Longrightarrow 1+t = \left(\frac{C_n}{C}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\boxed{t = \left(\frac{C_n}{C}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}$$

مثال: اقترض شخص من البنك مبلغ 30000دج، لمدة 11 سنة، فدفع في نهاية مدة القرض مبلغ 89971,77دج.

- إذا علمت أن الرسملة سنوية، أحسب معدل الفائدة.

الحل:

لدينا: $C= 30000$ DA ، $n = 11$ سنة

$t = ?$ ، $C_{11}= 89971,77$ DA

- الطريقة 01:

$$t =\left(\frac{C_n}{C}\right)^{\frac{1}{n}} -1= \left(\frac{89971.77}{30000}\right)^{\frac{1}{n}} -1$$

$$t = 0,105$$

$$t = 10,5\%$$

- الطريقة 02:

تعتمد هذه الطريقة على الجدول المالي رقم 01:

$$C_n = C(1+t)^n$$

$$(1+t)^n = \frac{C_n}{C}$$

$$(1+ t)^{11}= \frac{89971.77}{30000} = 2,999059$$

لإيجاد قيمة t، نبحث عن القيمة 2,999059 في السطر رقم 11 من الجدول المالي رقم 01، ثم نقوم بالبحث عن قيمة t التي تقابلها.

ومن الجدول المالي رقم 01 نجد أن $t=10.5\ \%$.

ج. **حساب المدة**: إذا توفر لدينا المبلغ الأصلي، الجملة المحصلة، ومعدل الفائدة، بإمكاننا إيجاد المدة n كما يلي:

$$C_n = C(1+t)^n$$

$$(1+t)^n = \frac{C_n}{C}$$

باستخدام اللوغاريتم العشري تصبح العلاقة من الشكل:

$$\mathrm{Log}\ (1+t)^n = \log\left(\frac{C_n}{C}\right)$$

ونكتب: $n \log (1+t) = \log (\frac{C_n}{C})$

$$\boxed{n = \frac{\log (\frac{C_n}{C})}{\log (1+t)}}$$

مثال: ما هي المدة الزمنية اللازمة للحصول على جملة قدرها 1215,51دج، إذا علمت أن قيمة المبلغ الأصلي 1000دج، ومعدل الفائدة المركبة السنوي 5% ؟

الحل:

لدينا: $t = 5\%$ ، $C_n = 1215{,}51$ ، $C = 1000$ DA، $n = ?$

$$n = \frac{\log (\frac{C_n}{C})}{\log (1+t)} = \frac{\log (\frac{1215{,}51}{1000})}{\log (1{,}05)}$$

$n = 4$ سنوات

3.1. حساب الجملة في حالة عدد الفترات غير الكاملة:

للوصول إلى العلاقة الأساسية للجملة في الفائدة المركبة $C_n = C(1+t)^n$، اعتبرنا أن المدة n عبارة عن رقم صحيح، يبدأ من 1، 2، 3 إلى غاية فترة محدودة، أي لفترات زمنية كاملة، إلا أنه في الواقع يمكن أن نجد n عبارة عن كسر أو عدد غير صحيح، أي عندما تكون الفترة جزء من السنة (مثلا: 5 سنوات و4 أشهر، أي $n = 5 + \frac{4}{12}$)، في هذه الحالة يمكن استعمال عدة طرق لإيجاد الجملة المحصلة:

مثال: مبلغ قدره 2000دج، وظف في بنك بفائدة مركبة، وبرسملة سنوية للفوائد، معدل الفائدة السنوي 11%، وذلك لمدة 7 سنوات و3 أشهر.

- أحسب الجملة المكتسبة من توظيف هذا المبلغ في نهاية المدة.

يمكن إيجاد قيمة الجملة بثلاث طرق:

أ. **الطريقة العقلانية (باستخدام الفائدة البسيطة)**: مفاد هذه الطريقة أن نحسب جملة المبلغ الموظف للفترات الزمنية الكاملة (7 سنوات هي عدد الفترات الكاملة أو الصحيحة الأصغر من مدة توظيف المبلغ)، ثم نضيف

إليها فائدة هذه الجملة المحسوبة للفترة الأقل من سنة (3 أشهر أو $\frac{3}{12}$ سنة) بتطبيق علاقة الفائدة البسيطة، وذلك كما يلي:

$$C_n = C(1+t)^n + C(1+t)^n \times t \times \frac{m}{12}$$

$$\boxed{C_n = C(1+t)^n \; [1+t \times \frac{m}{12}]}$$

حيث m تمثل عدد أشهر التوظيف بعد نهاية السنوات الصحيحة.

$$C_{7+\frac{3}{12}} = 2000\ (1+ 0,11)^7\ [1+0,11 \times \frac{3}{12}]$$

$$C_{7+\frac{3}{12}} = 42665,09 \text{ DA.}$$

ملاحظة: في حالة الفترات الزمنية غير الكاملة بالأيام نكتب $\frac{m}{360}$ بدلا من $\frac{m}{12}$.

ب. الطريقة التجارية: يمكن في هذه الطريقة إيجاد الجملة المحصلة باستخدام الجدول المالي رقم 01، أو باستخدام الآلة الحاسبة، بالإعتماد على خواص الأسس وذلك كما يلي:

$$C_{n+\frac{m}{12}} = C\ (1+t)^{n+\frac{m}{12}}$$

$$\boxed{= C\ (1+t)^n\ (1+t)^{\frac{m}{12}}}$$

يمكن إيجاد القيمة $(1+t)^n$ من الجدول المالي رقم 01، والقيمة $(1+t)^{\frac{m}{12}}$ من الجدول المالي رقم 06.

$$C_{7+\frac{3}{12}} = 20000\ (1,11)^7\ (1,11)^{\frac{3}{12}}$$

$$C_{7+\frac{3}{12}} = 20000 \times 2,07616 \times 1,026433 = 42620,66 \text{ DA.}$$

ج. باستخدام طريقة التناسب: تقوم هذه الطريقة على إيجاد الجملة المقابلة لمعدل الفائدة المعطى للفترتين الزمنيتين التي تقع في نطاقها مدة التوظيف الفعلية (n وn+1)، وذلك باستخدام الجدول المالي رقم 01، ثم يتم حساب الفرق بينهما وضرب الحاصل في قيمة الكسر الذي يمثل مدة التوظيف بعد السنة n أي $\frac{m}{12}$ إذا كانت المدة بالأشهر أو $\frac{m}{360}$ إذا كانت بالأيام، ثم تضاف النتيجة إلى الجملة الخاصة بالسنة n:

$$\boxed{C_{n+\frac{m}{12}} = C_n + \frac{m}{12}\ (C_{n+1} - C_n)}$$

$$C_n = C_7 = 20000\ (1,11)^7 = 41523,20$$

$$C_{n+1} = C_8 = 20000\ (1,11)^8 = 46090,76$$

$$C_{7+\frac{3}{12}} = C_7 + \frac{3}{12}\,(C_8 - C_7)$$

$$= 41523,20 + \frac{3}{12}\,(46090,76 - 41523,20)$$

$$= 41523,20 + 1141,89$$

$$C_{7+\frac{3}{12}} = 42665,09 \text{ DA.}$$

ملاحظة: الجملة المحصلة (القيمة المكتسبة) في الطريقة الأولى والثالثة أكبر من الجملة المحصلة في الطريقة الثانية.

4.1. المعدلات المتكافئة والمعدلات المتناسبة: تكون معدلات الفائدة في العادة سنوية، كما أن مدة التوظيف في الفائدة المركبة تكون غالبا أكثر من سنة، لكن في بعض الحالات قد تكون الفترة أقل من سنة، على سبيل المثال: سداسي، ثلاثي، شهر...الخ، وبالتالي فالرسملة يمكن أن تكون كذلك سنوية، سداسية، ثلاثية، شهرية...الخ، وهنا ينبغي البحث عن معدلات الفائدة التي تتوافق مع الفترة ومدة الرسملة.

أ. المعدلات المتكافئة:

المعدلات المتكافئة هي المعدلات التي تؤدي إلى نفس الجملة لنفس المدة، فنقول عن معدلين أنهما متكافئان إذا اختلفا في قيمتها، وفي فترة رسملتها، لكنهما يعطيان نفس القيمة المكتسبة لأي فترة زمنية مشتركة.

المبلغ C وظف بفائدة مركبة بمعدل سنوي قدره t، وبرسملة سنوية يعطى جملة قيمتها $C = C\ (1+t)^n$، في حين إذا افترضنا أنه وظف بمعدل سداسي t_2 ، وبرسملة نصف سنوية لمدة سداسيين $2n$ (نفس مدة التوظيف في الحالة الأولى)، فالجملة المحققة في هذه الحالة هي: $C_{2n} = C\ (1+t_2)^{2n}$

وعليه فالمعدل السنوي t الخاص برسملة سنوية يكون مكافئا لمعدل سداسي t_2 برسملة نصف سنوية إذا أنتجا نفس الجملة لنفس المدة، بعبارة أخرى:

$$(1+t)^n = (1+t_2)^{2n} \quad \text{أو} \quad C\ (1+t)^n = C\ (1+t_2)^{2n}$$

ويمكن استنتاج الصيغة العامة للمعدل المكافئ كما يلي:

t: معدل الفائدة السنوي.

t_k: معدل الفائدة للفترة k الأقل من سنة.

n_k: عدد فترات الرسملة.

يكون المعدل t مكافئا للمعدل t_k إذا حققنا نفس الجملة لنفس المدة.

$$C\,(1+t)^n = C\,(1+t_k)^{nk}$$

$$(1+t)^n = (1+t_k)^{nk}$$

ومنه: $$\boxed{(1+t) = (1+t_k)^{\,k}}$$

مثال 01: أحسب المعدل السداسي المكافئ للمعدل السنوي 9,5 % .

نكتب: $$(1+t) = (1+t_2)^2$$

$$1.095 = (1+t_2)^2 \Longrightarrow (1+t_2)=1.095^{\frac{1}{2}}$$

$$t_2=1,095^{\frac{1}{2}} -1$$

$$t_2= 1,04642 -1$$

$$t_2= 0,04642$$

$$t_2 = 4,642\%$$

مثال 02: أحسب المعدل الشهري المكافئ للمعدل الثلاثي 7%.

- نرمز للمعدل الشهري t_{12} (يوجد 12 شهر في السنة).
- نرمز للمعدل الثلاثي t_4 (يوجد 4 ثلاثيات في السنة).

المعدل t_{12} يكون مكافئ للمعدل t_4 إذا حققنا نفس الجملة لنفس المدة.

يمكننا أن نكتب: $$(1+t_{12})^{12} = (1+t_4)^4 =(1+t)$$

ومنه: $$(1+t_{12})^{12}= (1,07)^4$$

$$1+t_{12} = 1,07^{\frac{4}{12}}$$

$$t_{12} = 1,07^{\frac{4}{12}} - 1$$

$$t_{12} = 1,02281 - 1$$

$t_{12} = 0,02281 = 2,281\%$

مثال 03: أحسب المعدل السداسي المكافئ للمعدل الشهري 1,5%.

$$(1+t) = (1+t_{12})^{12} = (1+t_2)^2$$

$$1+t_2 = (1+t_{12})^{\frac{12}{2}}$$

$$t_2 = 1,015^6 - 1$$

$$t_2 = 1,093443 - 1$$

$$t_2 = 0,093443$$

$$t_2 = 9,3443\ \%.$$

ب. المعدلات المتناسبة: الفكرة الأساسية لحساب المعدل المتناسب هي قسمة المعدل السنوي على عدد مرات الرسملة خلال السنة.

ويحسب وفق العلاقة التالية: $\boxed{t_k = \frac{t}{k}}$

t: المعدل السنوي.

k: عدد مرات الرسملة خلال السنة الواحدة.

t_k: المعدل المتناسب.

المعدل الشهري المتناسب مع المعدل السنوي: $t_{12} = \frac{t}{12}$

المعدل السداسي المتناسب مع المعدل السنوي: $t_2 = \frac{t}{2}$

المعدل الثلاثي المتناسب مع المعدل السنوي: $t_4 = \frac{t}{4}$

مثلا: المعدل السنوي 10 % تقابله المعدلات المتناسبة التالية:

المعدل السداسي: $t_k = t_2 = \frac{10\%}{2} = 5\%$

المعدل الثلاثي: $t_k = t_4 = \frac{10\%}{4} = 2,5\%$

المعدل الشهري: $t_k = t_{12} = \frac{10\%}{12} = 0,833\ \%$

الفصل الثاني

تكافؤ (استبدال الديون طويلة الأجل

Intérêt composé

هدف الفصل	✓ معرفة علاقة القيمة الحالية. ✓ معرفة كيفية استبدال دين جديد بدين قديم. ✓ معرفة كيفية استبدال عدة ديون بدين واحد. ✓ معرفة كيفية استبدال دين أو عدة ديون قديمة بدين جديد بعد دفع جزء منها نقدا.
خطة الفصل	1.2.القيمة الحالية لرأسمال (دين). 2.2.استبدال دين قديم بدين جديد. 3.2.استبدال عدة ديون قديمة بدين واحد جديد. 4.2.استبدال دين أو عدة ديون قديمة بدفع جزء من أصل الدين أو الديون القديمة نقدا والباقي يكون دين جديد.

المقصود باستبدال (تكافؤ) الديون هو سداد الديون في غير موعد استحقاقها، أو استبدال الديون بديون أخرى بحيث تستحق هذه الديون الجديدة قبل تاريخ استحقاق الديون القديمة أو بعد تاريخ استحقاق الديون القديمة.

قد يعجز المدين عن تسديد الديون التي حان آجال تسديدها، فيلجأ (بالاتفاق مع الدائن) إلى تأجيلها، كما قد يعجل بتسديدها قبل حلول تاريخ استحقاقها، ويتم استبدال الديون طويلة الأجل باستخدام الفائدة المركبة، أما إذا كانت مدة القرض سنة أو أقل فغالبا ما تستعمل الفائدة البسيطة.

1.3. القيمة الحالية لرأسمال (دين):

التحديث هو عملية عكسية للرسملة، ويقصد به قيمة مبلغ معين من المال قبل موعد استحقاقه بمدة زمنية معينة في حالة وجود معدل فائدة معين، فكلما ازدادت المدة بين تاريخ الاستحقاق وتاريخ حساب القيمة الحالية كلما كانت القيمة الحالية أقل، وكلما ارتفع معدل الفائدة بالنسبة لمدة معينة تقل القيمة الحالية.

وكما تمت الإشارة إليه سابقا يمكن إيجاد القيمة الحالية من علاقة جملة الفائدة المركبة:

$$C_n = C(1+t)^n$$

ومنه:

$$C = \frac{C_n}{(1+t)^n} = C(1+t)^{-n}$$

حيث:

C_n: الجملة بفائدة مركبة وتسمى كذلك القيمة الإسمية للدين (رأس المال) في تاريخ الإستحقاق.

C: القيمة الحالية (المبلغ الأصلي).

n: المدة قبل تاريخ الاستحقاق.

t: معدل الخصم.

مثال: مبلغ من المال قيمته 2000000دج، يستحق بتاريخ 2018/1/1،

- أوجد قيمته بتاريخ 2014/1/1 إذا كان معدل الخصم 6% سنويا.

الحل:

$C_4=200000$ DA ، سنوات $n=4$، $t=6\%$

$$C=C_4(1+t)^{-4}=200000(1,06)^{-4}$$

$$C=1584187,326476 \text{ DA.}$$

يمكن إيجاد القيمة $(1+t)^{-n}$ باستخدام الجدول المالي رقم 02.

2.2.استبدال دين قديم بدين جديد: حتى لا يكون هناك ضرر للمدين عند إجراء عملية الإستبدال لابد وأن تتخذ قاعدة التكافؤ أساسا للإسبدلال مهما كانت الظروف.

في حالة استبدال دين قديم بدين جديد فإن قاعدة التكافؤ تكون على الشكل التالي:

القيمة الحالية للدين الجديد= القيمة الحالية للدين القديم

$$\mathbf{V}a_1=\mathbf{V}a_2$$

$$\mathbf{V_1(1+t)^{-n_1}=V_2(1+t)^{-n_2}}$$

V_1: القيمة الإسمية للدين القديم.

V_2: القيمة الإسمية للدين الجديد.

n_1: عدد الفترات التي تفصل الدين القديم عن تاريخ الإستحقاق.

n_2: عدد الفترات التي تفصل الدين الجديد عن تاريخ الإستحقاق.

t: معدل الخصم.

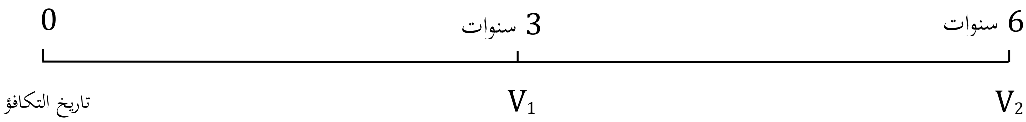
مثال01: شخص مدين بمبلغ يستحق بعد 3 سنوات القيمة الاسمية 60000دج، اتفق مع دائنه على استبدال هذا الدين بدين جديد يستحق بعد6 سنوات، فما هي القيمة الاسمية لهذا الدين، إذا علمت أن معدل الخصم هو 9% سنويا ؟

الحل:

لدينا: $V_1=60000$ DA ، $n_1=3$ سنوات , $t=9\%$

$V_2=?$ ، $n_2=6$ سنوات

حسب شرط التكافؤ: $V_2(1+t)^{-n_2}=V_1(1+t)^{-n_1}$



$$V_2(1{,}09)^{-6} = 60000(1{,}09)^{-3}$$

$$0.596267\ V_2 = 0{,}77218 \times 60000$$

$$0{,}596267\ V_2 = 46330{,}8 \longrightarrow V_2 = \frac{46330{,}8}{0{,}596267}$$

$$V_2 = 77701{,}1\ \text{DA}.$$

في هذه الحالة قد تم تأجيل التسديد، وعليه فالدين الجديد يكون أكبر.

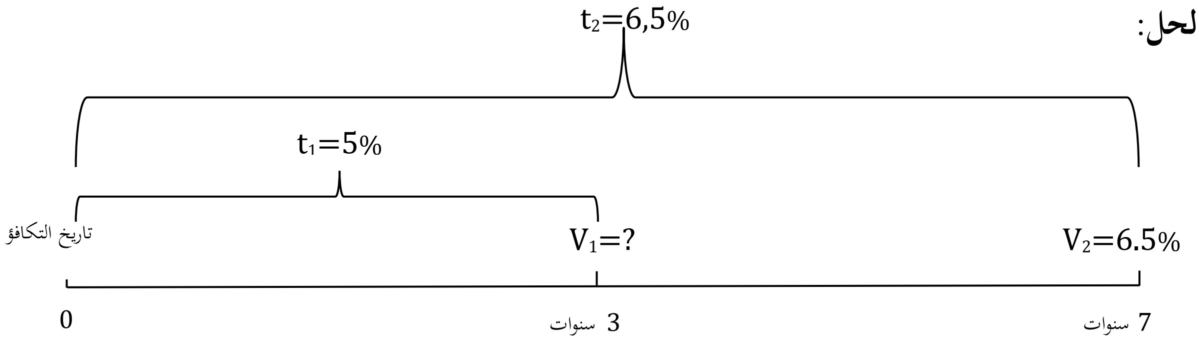
ملاحظة: إن تغيير تاريخ التكافؤ (الاستبدال) لن يؤثر على قيمة الدين الجديد، في حين أن تغيير تاريخ استحقاقه يؤثر على قيمته.

يمكن حل هذا المثال بطريقة ثانية، فبما أن الدين القديم قد تأجل سداده فإننا نحسب جملته لمدة التأجيل، وبناء على ذلك فالعلاقة هي:

$$V_2 = V_1(1+t)^3 = 60000\ (1{,}09)^3 = 77701{,}1\ \text{DA}.$$

مثال 02: تاجر مدين بدين يستحق السداد بعد ثلاث سنوات، بمعدل فائدة مركبة 5% سنويا، اتفق مع دائنه على استبداله بدين جديد قيمته الاسمية 50000دج، بشرط تغيير معدل الفائدة المركبة إلى 6.5% ويستحق السداد بعد سبعة سنوات، فما هي القيمة الاسمية للدين القديم؟

الحل:



حسب شرط التكافؤ: $Va_1 = Va_2$

$$V_1(1+t)^{-n_1} = V_2(1+t)^{-n_2}$$

$$V_1(1{,}05)^{-3} = V_2(1{,}065)^{-7}$$

$$0,863837\ V_1 = 50000 \times 0,643506$$

$$V_1 = \frac{32175.3}{0,863873} = 37245,404 \text{ DA.}$$

مثال 03: قرر مدين تسديد ديون قيمتها 20000دج مستحقة في ست سنوات بمبلغ 16528.93دج، حدد تاريخ التسديد إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة 10% .

الحل:

لدينا: $V_1 = 20000$ DA ، $n_1=6$ سنوات.

$V_2=16528,93$ DA , $t=10\%$.

حسب شرط التكافؤ: $V_1(1+t)^{-n_1} = V_2(1+t)^{-n_2}$

$$20000(1,1)^{-6} = 16528,93(1,1)^{-n_2}$$

$$2000 \times 0,564474 = 16528,93(1,1)^{-n_2}$$

$$11289,48 = 16528,93(1,1)^{-n_2}$$

$$\frac{11289,48}{16528,93} = (1,1)^{-n_2}$$

$$0,683013 = (1,1)^{-n_2} \Rightarrow \log 0,683013 = \log(1,1)^{-n_2}$$

$$\text{Log } 0,683013 = -n_2 \log 1,1$$

$$-n_2 = \frac{\log 0,683013}{\log 1,1}$$

$$-n_2 = \frac{-0,381241}{0,095331}$$

$n_2=4$ سنوات

3.2.استبدال عدة ديون قديمة بدين واحد جديد: في حالة استبدال عدة ديون قديمة بدين (أو عدة ديون) جديدة، فإن قاعدة التكافؤ تكون على الشكل التالي:

القيمة الحالية للديون القديمة= القيمة الحالية للدين(أو الديون) الجديدة

$$\mathbf{V(1+t)^{-n}=\sum_{i=1}^{n} Vi\ (1+t)^{-n_i}}$$

مثال01: شخص مدين بالمبالغ التالية:

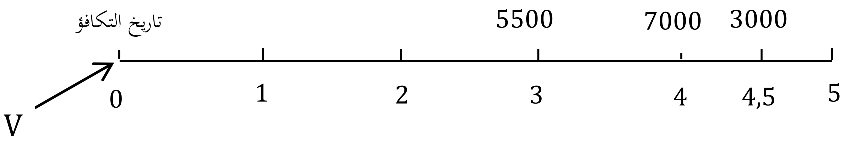
المبلغ الأول: 5500دج، يستحق بعد 3 سنوات.

المبلغ الثاني: 7000دج، يستحق بعد 4 سنوات.

المبلغ الثالث: 3000دج، يستحق بعد 4 سنوات ونصف.

فإذا أراد المدين تسديدهم حالا بدين وحيد، أوجد قيمة الدين الجديد إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة هو 6% سنويا؟

الحل:



لدينا: $V_1=5500DA$, $n_1=3$ سنوات , $t=6\%$

$V_2=7000DA$, $n_2=4$سنوات , $n=0$ سنة

$V_3=3000DA$, $n_3=4,5$ سنة

حسب شرط التكافؤ:

$$V(1+t)^{-n}= V_1(1+t)^{-n_1}+V_2(1+t)^{-n_2}+V_3(1+t)^{-n_3}$$

$$V(1,06)^{0}= 5500(1,06)^{-3}+7000(1,06)^{-4}+3000(1+t)^{-4,5}$$

$$V=(5500\times0,839619) + (7000\times0,792094) + (3000\times0,769349)$$

$$V= 4617,9045 + 5544,658 + 2308,047$$

$$V=12470,6095\ DA$$

مثال02: شخص مدين بالمبالغ التالية:

6000 دج تستحق بعد 5 سنوات.

2000 دج تستحق بعد 6 سنوات.

3000 دج تستحق بعد 8 سنوات.

وقد اتفق المدين مع الدائن على سداد جميع ما عليه بعد 10 سنوات

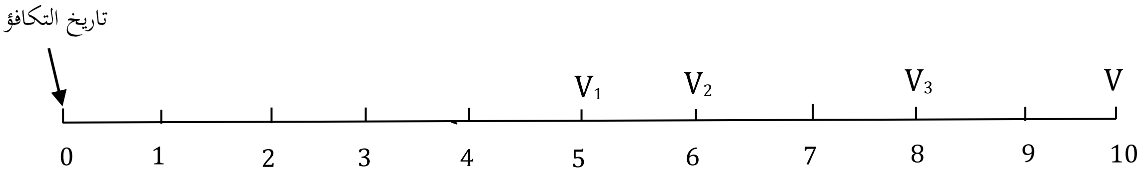
- أوجد ما يستحق على المدين في نهاية المدة إذا كان معدل الفائدة المركبة 9%.

الحل:

$V_1=6000$ DA ، $n_1=5$ سنوات ، $n=1$ سنوات

$V_2=2000$ DA ، $n_2=6$ سنوات ، $t=9\%$

$V_3=3000$ DA ، $n_3=8$ سنوات



شرط التكافؤ: $V(1+t)^{-n}= V_1(1+t)^{-n_1}+V_2(1+t)^{-n_2}+V_3(1+t)^{-n_3}$

بالتعويض نجد:

$$V(1,09)^{-10}= 6000(1,09)^{-5}+2000(1,09)^{-6}+3000(1,09)^{-8}$$

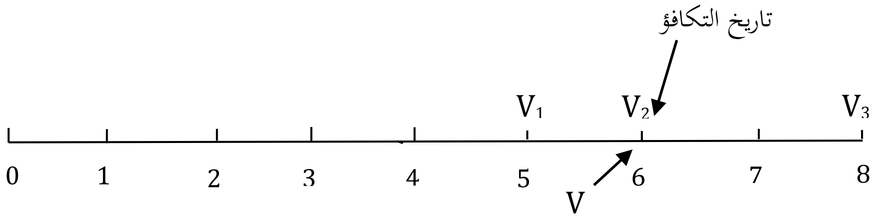
$$0,422411\times V= 3899,5883 + 1192,5346 +1505,5988$$

$$0,422411\times V=6597,7217 \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{6597,7217}{0,422411}$$

$$V=15619,2 \text{ DA.}$$

مثال03: نفس المثال السابق إذا اتفق المدين مع الدائن بدفع ما عليه في نهاية السنة السادسة

الحل:



شرط التكافؤ في هذه الحالة:

$$V(1+t)^{-n}= V_1(1+t)^{n_1}+V_2(1+t)^{-n_2}+V_3(1+t)^{-n_3}$$

$$V(1{,}09)^{0}= 6000(1{,}09)^{1}+2000(1{,}09)^{0}+V_3(1{,}09)^{-2}$$

$$V= 6540 + 2000 + 2525{,}01=11065{,}01 \text{ DA.}$$

مثال04: مؤسسة مدينة بالمبالغ التالية:

8500 دج يستحق بعد 7 سنوات.

3000 دج يستحق بعد 8 سنوات.

4400 دج يستحق بعد 10 سنوات.

أرادت استبدالهم بدينين جديدين متساويين في القيمة، الدين الأول يستحق بعد 9 سنوات، والثاني بعد 11 سنة.

- أوجد قيمة الدينين، إذا كان معدل الفائدة المركبة 4% سنويا.

الحل:

من شرط التكافؤ:

$$V(1{,}04)^{-9}+V(1{,}04)^{-11}=8500(1{,}04)^{-7}+3000(1{,}04)^{-8}+4400(1{,}04)^{-10}$$

$$0{,}702587\times V+ 0{,}649581\times V= 46459{,}303 + 2192{,}07 + 2972{,}4818$$

$$1{,}35218\times V=11623{,}85 \Rightarrow V= \frac{11623{,}8548}{1{,}352168}$$

$$V=8596{,}4575\text{DA.}$$

إذن قيمة كل دين هي: 8596,4575 دج.

4.2.استبدال دين أو عدة ديون قديمة بدفع جزء من أصل الدين أو الديون القديمة نقدا والباقي يكون دين جديد:

في هذه الحالة شرط التكافؤ يكتب كالآتي:

القيمة الحالية للدين أو الديون القديمة– الدفعة النقدية= القيمة الحالية للدين الجديد

$$\mathbf{V(1+t)^{-n} = \sum_{i=1}^{n} Vi\ (1+t)^{-n_i} - w}$$

w: قيمة الدفعة النقدية

مثال: تاجر مدين بالمبالغ التالية:

30000 دج يستحق بعد 4 سنوات.

60000 دج يستحق بعد 6 سنوات.

اتفق مع دائنه على تسوية هذه الديون وفقا للشروط التالية:

- يدفع نقدا مبلغ 36099,4دج.

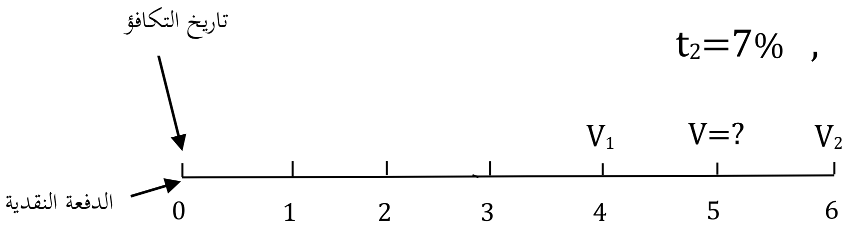
- يتم الخصم بمعدل فائدة مركبة 5 % سنويا.

- يحرر دين جديد بالباقي يستحق السداد بعد 5 سنوات، على أن تحسب الفوائد لهذا الدين الجديد بمعدل 7% سنويا.

✓ فما هي قيمة الدين الجديد عند تاريخ استحقاقه؟

الحل:

لدينا: $t_1=5\%$, $t_2=7\%$



شرط التكافؤ:

$$V(1+t_2)^{-n} = V_1(1+t_1)^{-n_1} + V_2(1+t_1)^{-n_2} - 36099,4$$

$$V(1,07)^{-5} = 30000(1,05)^{-4} + 60000(1,05)^{-6} - 36099,4$$

$$0,712986V = 24681,06 + 44772,9 - 36099,4$$

$$0{,}712986V + 33354{,}56 \Rightarrow V= \frac{33354{,}56}{0{,}712986}$$

$$V=46781{,}507 \text{ DA}$$

الفصل الثالث

الدفعات

Les Annuités

هدف الفصل	✓ فهم المقصود بالدفعات الثابتة لآخر المدة والدفعات الثابتة لأول المدة. ✓ معرفة علاقة حساب جملة دفعات ثابتة لآخر المدة وكيفية استعمالها لإيجاد: قيمة الدفعة، عدد الدفعات، والمعدل. ✓ معرفة علاقة حساب القيمة الحالية لدفعات ثابتة لآخر المدة وكيفية استعمالها لإيجاد: قيمة الدفعة، عدد الدفعات، والمعدل. ✓ استخلاص علاقة الجملة والقيمة الحالية للدفعات الثابتة لأول المدة. ✓ فهم المقصود بالدفعات ذات متوالية حسابية، ومعرفة علاقة حساب الجملة والقيمة الحالية لهذه الدفعات. ✓ فهم المقصود بالدفعات ذات متوالية هندسية، ومعرفة علاقة حساب الجملة والقيمة الحالية لهذه الدفعات.
خطة الفصل	1.3.الدفعات الثابتة لآخر المدة (العادية). 2.3.الدفعات الثابتة لأول المدة. 3.3.الدفعات ذات متوالية حسابية: Les Annuités en progression arithmétique 4.3. الدفعات ذات متوالية هندسية: Les Annuités en progression géométrique

يقصد بالدفعات سلسلة تسديدات من المال ذات قيم متساوية تودع أو تستحق أو تدفع على فترات زمنية متساوية.

وتحدد سلسلة الدفعات بالاعتماد على:

- تاريخ أول دفعة أو تسديد.

- الفترة: المدة التي تفصل بين دفعتين متتاليتين، وهذه الفترة قد تكون سنة (دفعات سنوية)، سداسي (دفعات سداسية)، ثلاثي (دفعات ثلاثية)، شهر (دفعات شهرية).

- عدد الدفعات

- مبلغ الدفعة الذي يدفع دوريا.

الدفعات عادة تكون بهدف:

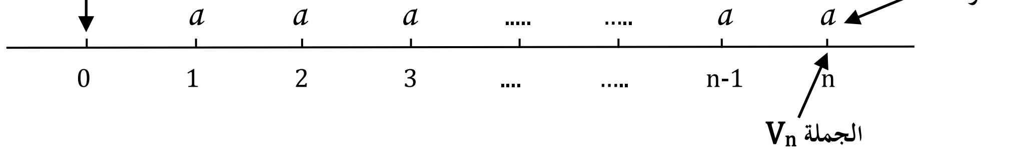
✓ تشكيل رأسمال.
✓ خدمة قرض (الفوائد والاستهلاك).

1.3.الدفعات الثابتة لآخر المدة (العادية):

1.1.3.الجملة المحصلة لسلسلة دفعات ثابتة لآخر المدة:

بافتراض أن شخص يسدد دينا بواسطة دفعات سنوية لنهاية المدة، قيمة كل دفعة a، وعدد الدفعات n، معدل الفائدة المفروض على كل دفعة t.

لحساب مجموع ما يسدده هذا الشخص أو الجملة، نقوم بحساب جملة كل دفعة مع الأخذ بعين الاعتبار أن الدفعة تسدد في نهاية المدة، ومجموع جملة هذه الدفعات هو عبارة عن مجموع هذه الدفعات وفوائدها حتى نهاية جميع الدفعات.



إن استخلاص العلاقة الأساسية لحساب جملة الدفعات لآخر المدة يتطلب حساب جملة كل دفعة:

الجملة المحصلة لكل دفعة	مدة الرسملة تنتهي عند آخر دفعة(n)	تاريخ التسديد	ترتيب الدفعة
$a(1+t)^{n-1}$	فترة (n-1)	1	1
$a(1+t)^{n-2}$	فترة (n-2)	2	2
$a(1+t)^{n-3}$	فترة (n-3)	3	3
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$a(1+t)^{2}$	فترة 2	n-2	n-2
$a(1+t)^{1}$	فترة 1	n-1	n-1
$a(1+t)^{0}= a$	فترة 0	n	n
Vn			

إن الجملة المحصلة لسلسلة الدفعات عند نهاية المدة يمكن كتابتها على الشكل:

$$V_n= a+ a(1+t) + a(1+t)^2+........+ a(1+t)^{n-3} + a(1+t)^{n-2} + a(1+t)^{n-1}$$

$$V_n= a[1+(1+t)+(1+t)^2+.......+(1+t)^{n-3}+(1+t)^{n-2}+(1+t)^{n-1}]$$

يلاحظ أن الجملة تمثل متوالية هندسية تصاعدية حدها الأول a، وعدد حدودها n، وأساسها (1+t).

ومجموع المتوالية الهندسية التصاعدية يعبر عنه بالعلاقة:

$$S=a\ \frac{R^n-1}{R-1}$$

حيث:

a : يمثل الحد الأول للمتوالية الهندسية.

R: هو أساس المتوالية الهندسية.

وعليه فجملة دفعات متساوية لآخر المدة يعبر عنها بالعلاقة:

$$V_n = a\ \frac{(1+t)^n - 1}{1+t-1}$$

$$\boxed{V_n = a\ \frac{(1+t)^n - 1}{t}}$$

ملاحظة: يمكن استخراج القيمة $\frac{(1+t)^n - 1}{t}$ من الجدول المالي رقم 03.

مثال: يسدد شخص دينا عليه بخمس دفعات متساوية لنهاية المدة، فإذا كانت قيمة كل دفعة هي 1000دج، أوجد الجملة المحصلة لما يسدده نهاية المدة إذا كان معدل الفائدة هو 5%؟

الحل:

$t=5\%\quad,\quad a=1000\text{DA}$

$V_5=?\quad,\quad n=5$ دفعات

$$V_5 = a\ \frac{(1+t)^5 - 1}{t} = 1000\ \frac{(1{,}05)^5 - 1}{0{,}05}$$

$$V_5 = 5525{,}231\ \text{DA}.$$

من خلال الجدول المالي رقم 03، بالبحث في السطر رقم 05، والعمود الذي يمثل معدل الفائدة 5%، نجد أن: $\frac{(1+t)^5 - 1}{t} = 5{,}525631$

2.1.3. حساب عناصر جملة دفعات ثابتة لآخر المدة:

أ.**حساب قيمة الدفعة**: من العلاقة السابقة لجملة دفعات المدة يمكن استخلاص علاقة حساب قيمة الدفعة:

$$V_n = a\ \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$\boxed{a = V_n\, \frac{t}{(1+t)^n - 1}}$$

مثال: بلغت جملة دفعات سنوية متساوية لآخر المدة 446140.168 دج، إذا علمت أن عدد الدفعات هو 7 دفعات سنوية، ومعدل الفائدة هو 8%.

- أوجد قيمة الدفعة الواحدة.

الحل:

$$t = 8\ \% \quad , \; V_7 = 446140,168 \text{ DA}$$

$$a = 446140,168 \frac{0.08}{(1.08)^7 - 1} \quad = 50000 \text{ DA.}$$

ب.حساب معدل الفائدة: لمعرفة معدل الفائدة المطبق عند توظيف دفعات متساوية لآخر المدة لا بد من الرجوع إلى الجدول المالي رقم 03، وبمقابلة القيمة الناتجة عن حاصل قسمة الجملة على قيمة الدفعة بعدد الدفعات نجد معدل الفائدة.

$$V_n = a \ \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$\boxed{\frac{V_n}{a} = \frac{(1+t)^n - 1}{t}}$$

مثال01: تمكن شخص من سداد ما عليه من ديون بواسطة 5 دفعات عادية لنهاية السنة، قيمة كل منها 800دج، ولقد بلغت جملة الدفعات نهاية المدة 4600.60دج، حدد معدل الفائدة المطبق.

الحل:

$$n = 5 \text{ دفعات} \quad , \; V_5 = 4600,60 \text{ DA}$$

$$t = ? \qquad , \qquad a = 800 \text{ DA}$$

$$\frac{(1+t)^5 - 1}{t} = \frac{4600,6}{800} \;= 5,75075$$

من الجدول المالي رقم 03، نبحث عن القيمة التي تقابل 5,75075 الموجودة في السطر رقم 5، والذي يشير إلى عدد الدفعات، وعند إيجادها نحدد المعدل الذي يوافق عمودها فنجده 7%.

مثال02: 18 دفعة متساوية لنهاية المدة، قيمة كل دفعة 5000دج، أعطت جملة قدرها 200000دج، حدد معدل الرسملة.

الحل:

$n=18 \quad , \; V_{18}=200000 \text{ DA}$

$t=? \quad , \; a=5000 \text{ DA}$

$$\frac{(1+t)^{18}-1}{t}=\frac{20000}{5000}=40$$

بالبحث في الجدول رقم 03، في السطر رقم 18، نجد أن القيمة 40 غير متوفرة في الجدول، ولكنها محصورة بين القيمتين 39.322995 التي تقابل المعدل 8.5% ، والقيمة 40.298600 التي تقابل المعدل 8.75%، وعليه سنقوم باستعمال طريقة التناسب لإيجاد معدل الرسملة t.

$$t = 8,5 + (8,75\text{-}8,5)\,\frac{40-39,322995}{40,298600-39,322995} = 8,67\%.$$

ج.**حساب عدد الدفعات**: يمكن إيجاد عدد الدفعات بنفس طريقة الجداول المالية المطبقة لحساب معدل الفائدة، كما يمكن اعتماد طريقة اللوغاريتمات، وذلك كما يلي:

$$V_n = a\,\frac{(1+t)^n-1}{t}$$

$$\frac{V_n}{a}=\frac{(1+t)^n-1}{t}$$

$$\frac{V_n\times t}{a}=(1+t)^n-1$$

$$\frac{V_n\times t}{a}+1=(1+t)^n$$

$$\text{Log}\left(\frac{V_n\times t}{a}+1\right)=\log(1+t)^n$$

$$\text{Log}\left(\frac{V_n\times t}{a}+1\right)=n\log(1+t)^n$$

$$\boxed{n=\frac{\log\left(\frac{V_n\times t}{a}+1\right)}{\log(1+t)}}$$

مثال: تحصيلا للقروض الممنوحة حصل البنك دفعات متساوية لنهاية المدة بقيمة 1000 دج، للواحدة، فإذا علمت أن جملة هذه الدفعات بلغت 5525.63 دج، وأن معدل الفائدة المطبق هو 5%، حدد عدد الدفعات؟

الحل:

$t=5\%$, $V_n=5525,63$ DA

$n=?$, $a=1000$ DA

$$5525,63 = 1000\,\frac{(1,05)^{n}-1}{0,05}$$

$$\frac{(1,05)^{n}-1}{0,05}=5,52563$$

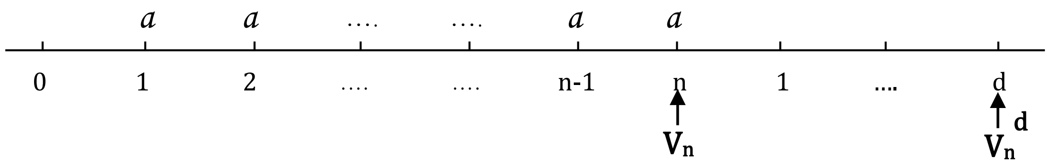
$$(1,05)^{n}-1= 0,2762815$$

$$(1,05)^{n}= 1,2762815$$

$$n= \frac{\log(1,2762815)}{\log(1,05)}=4,99 \approx 5 \text{ دفعات}$$

3.1.3. حالات خاصة بالجملة المحصلة لسلسلة دفعات متساوية لآخر المدة:

أ. الجملة المحصلة لسلسلة دفعات ثابتة d فترة بعد آخر دفعة:



يتم تشكل رأس مال V_n عن طريق n من التسديدات أو الدفعات، قيمة كل دفعة a، ففي بعض الأحيان الشخص أو الجهة التي تقوم بتسديد الدفعات لتشكيل رأس المال قد لا تحتاج مباشرة إليه عندما يكتمل، وعليه قد تتركه في البنك لكن مع التوقف عن تسديد الدفعات، وبالتالي يترتب عن ذلك فوائد تحسب بنفس طريقة حساب جملة الفائدة المركبة ولمدة d بعد أخذ دفعة.

وبالتالي علاقة جملة الدفعات المتساوية لنهاية المدة عند d فترة بعد آخر دفعة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\boxed{V_n^{\,d} = a\,\frac{(1+t)^{n}-1}{t}\,(1+t)^{d}}$$

مثال: أحسب الجملة المحصلة 6 سنوات بعد أخذ دفعة، قيمة كل دفعة 1000 دج، وعدد الدفعات هو 15 دفعة سنوية متساوية لنهاية المدة، معدل الرسملة السنوي 9%.

الحل:

$d=6$ سنوات , $a=1000$DA

$t=9\%$, $n=15$ دفعة

$$V_{15}^{6}=1000\times \frac{(1,09)^{15}-1}{0,09}(1,09)^{6}$$

$$=1000\times 30,540231\times 1,723$$

$$V_{15}^{6}=52644,98 \text{ DA.}$$

ملاحظات:

1- يمكن استخدام الجدول المالي رقم 03، لإيجاد القيمة $\frac{(1+t)^{n}-1}{t}$ ، والجدول المالي رقم 01 لإيجاد القيمة $(1+t)^{d}$.

2- يمكن كتابة العلاقة $V^{d}_{n}=a\frac{(1+t)^{n}-1}{t}(1+t)^{d}$ بالشكل: $V^{d}_{n}=a\frac{(1+t)^{n+d}-(1+t)^{d}}{t}$

بإضافة 1 وطرحه لبسط الكسر نجد:

$$V^{d}_{n}=a\ \frac{(1+t)^{n+d}-(1+t)^{d}+1-1}{t}=a[\underbrace{\frac{(1+t)^{n+d}-1}{t}}_{\text{الجدول المالي رقم 03 السطر } n+d}-\underbrace{\frac{(1+t)^{d}-1}{t}}_{\text{الجدول المالي رقم 03 السطر } d}]$$

من المثال السابق نجد: $V_{15}^{6}=1000\ [\frac{(1,09)^{15+6}-1}{0,09}-\frac{(1,09)^{6}-1}{0,09}]$

$$=1000(60,263845-7,618857)=52644,98 \text{ DA.}$$

3- في حالة $d=1$ (الحالة المعتادة)، أي في حالة ترك رأس المال في البنك لفترة واحدة بعد آخر دفعة لنهاية المدة، في هذه الحالة نكتب:

$$V_n^1 = a\left[\frac{(1+t)^{n+1}-1}{t} - \frac{(1+t)^1-1}{t}\right] = a\left[\frac{(1+t)^{n+1}-1}{t} - \frac{t}{t}\right]$$

$$= a\left[\underbrace{\frac{(1+t)^{n+1}-1}{t}}_{\substack{\text{الجدول المالي رقم}03 \\ n+1 \text{ سطر}}} - 1\right]$$

4- العلاقة بين الجملة المحصلة V_n والجملة الحالية V_a: يمكننا كتابة العلاقة كما يلي: $V_a=V_n(1+t)^{-n}$،

$V_n=V_a(1+t)^n$.

ب.الجملة المحصلة لدفعات ثابتة غير سنوية:

مثال01:أحسب الجملة المحصلة لسلسلة دفعات شهرية قدرها 84 دفعة، بمعدل رسملة سنوي 10%، وقيمة كل دفعة 2000 دج.

الحل: العلاقة العامة لحساب جملة دفعات نهاية المدة تبقى صالحة للإستعمال، بشرط استخدام المعدل الشهري المكافئ t_{12} للمعدل السنوي 10%.

أي:

$$(1+t)=(1+t_{12})^{12}$$

$$1{,}1=(1+t_{12})^{12} \longrightarrow t_{12}= 1{,}1^{\frac{1}{12}} - 1 = 1{,}007974 - 1$$

$$t_{12}=0{,}007974$$

$$V_{84}=2000\ \frac{(1{,}007974)^{84}-1}{0{,}007974} = 237949{,}63 \text{ DA}$$

مثال 02: أحسب الجملة المكتسبة لـ 40 دفعة ثلاثية، قيمة كل دفعة 2000 دج، معدل الفائدة الثلاثي 2%.

الحل:

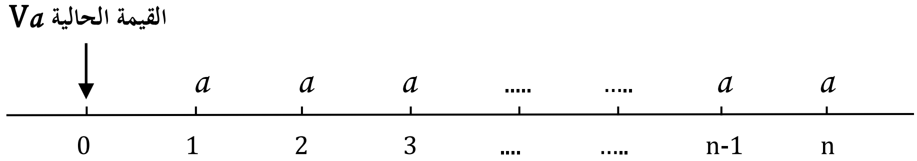
$40 = n$ دفعة ثلاثية , $t= 2\%$, $a = 2000$ DA.

$$V_{40}= a\ \frac{(1+t_{4)-1}}{t_4}\ =2000\,\frac{(1,02)^{40}-1}{0,02}$$

$$V_{40}=2000 \times 60,401983 = 120803,97 \text{ DA.}$$

4.1.3.القيمة الحالية لسلسلة دفعات ثابتة لآخر المدة: يقصد بالقيمة الحالية للدفعات الثابتة لآخر المدة قيمتها في بداية المدة على أساس معدل خصم معين، وعلى هذا يمكن الحصول على هذه القيمة بإيجاد القيمة الحالية لكل دفعة على حدا في بداية المدة، ثم جمعها فينتج لنا القيمة الحالية للدفعات.

بافتراض أن لدينا n دفعة لآخر المدة، و t معدل الفائدة المركبة، فالقيمة الحالية لكل دفعة تحسب كما يلي:



ترتيب الدفعة	تاريخ التسديد	عدد الفترات التي يشملها حساب القيمة الحالية	القيم الحالية للدفعات عند النقطة 0 (بداية المدة)
1	1	1	$a\,(1+t)^{-1}$
2	2	2	$a\,(1+t)^{-2}$
3	3	3	$a\,(1+t)^{-3}$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
(n-2)	(n-2)	(n-2)	$a\,(1+t)^{-(n-2)}$
(n-1)	(n-1)	(n-1)	$a\,(1+t)^{-(n-1)}$
n	n	n	$a\,(1+t)^{-n}$
			V_a

$$V_a=a\,[(1+t)^{-n}+(1+t)^{-(n-1)}+(1+t)^{-(n-1)}+......+ (1+t)^{-3}+(1+t)^{-2}+(1+t)^{-1}]$$

نلاحظ أن هذا المجموع يشكل متوالية هندسية تصاعدية أساسها (1+t) وحدها الأول $a\,(1+t)^{-n}$، وعدد حدودها n.

ومن علاقة متوالية هندسية تصاعدية مجموعها S، وحدها الأول a، وأساسها R:

$$S = a + \frac{R^n - 1}{R - 1}$$

وعليه نجد أن القيمة الحالية لمجموع دفعات ثابتة لآخر المدة تحسب وفق العلاقة التالية:

$$V_a = a\,(1 + t)^{-n} \times \frac{(1+t)^n - 1}{(1+t) - 1}$$

$$\boxed{V_a = a\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}}$$

قيمة العبارة الجبرية $\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$ يمكن الحصول عليها من الجدول المالي رقم 04.

مثال: أحسب القيمة الحالية لسلسلة 15 دفعة ثابتة سنوية لنهاية المدة، قيمة كل واحدة 1000دج، ومعدل الخصم8%.

الحل:

$n = 15$ دفعة , $V_a = ?$

$t = 8\%$, $a = 1000$ DA

$$V_a = 1000\,\frac{1-(1{,}08)^{-15}}{0{,}08}$$

$$V_a = 8559{,}48 \text{ DA.}$$

يمكن الحصول على القيمة 8559,48 من الجدول المالي رقم 04، في السطر رقم 15 والعمود الذي توجد به قيمة $t = 8\%$.

ملاحظة: علاقة القيمة الحالية $V_a = a\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$ تعطينا القيمة الحالية لسلسلة دفعات ثابتة لنهاية المدة في التاريخ الأصلي، بعبارة أخرى فترة قبل سداد أول دفعة، وليس بتاريخ سداد أول دفعة.

5.1.3.حساب عناصر علاقة القيمة الحالية لدفعات ثابتة لآخر المدة:

أ.حساب قيمة الدفعة:

مثال: 10 دفعات ثابتة لآخر المدة بلغت قيمتها الحالية 200000دج بمعدل خصم 10.5%، أحسب قيمة الدفعة.

$$200000 = a\,\frac{1-(1{,}105)^{-10}}{0{,}105} \;\Rightarrow\; a = \frac{200000}{\frac{1-(1{,}105)^{-10}}{0{,}105}}$$

$$a = \frac{20000}{6{,}014773} = 33251{,}40 \text{ DA.}$$

ب.حساب معدل الخصم:

مثال01: بلغت القيمة الحالية لسلسلة دفعات سنوية لآخر المدة 11582.60 دج، عددها 10 دفعات وقيمة كل منها 15020دج، حدد معدل الخصم.

$$V_a = 11582{,}60 = 1500\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

$$\frac{1-(1+t)^{-10}}{t} = \frac{11582{,}60}{1500} = 7{,}721733$$

باستعمال الجدول المالي رقم 04، نبحث في السطر n=10 عن القيمة 7,721733 ،ثم نبحث عن المعدل t (العمود) الذي يقابل هذه القيمة، فنجد المعدل t= 5%.

مثال02: 12 دفعة لآخر المدة قيمة كل منها 12500دج، بلغت قيمتها الحالية 90000دج، أحسب المعدل الذي خصمت به هذه الدفعات.

نكتب:

$$\frac{Va}{a} = \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = \frac{90000}{12500} = 7{,}2.$$

باستعمال الجدول رقم 04 نجد أن القيمة 7,2 غير موجودة في الجدول، ولكنها محصورة بين القيمتين 7.251800 التي تقابل المعدل 8.75% في السطر رقم 12، والقيمة 7.160725 التي تقابل المعدل 9%.

أي:

$$t = 8{,}75\ \% : \quad \frac{1-(1{,}0875)^{-12}}{0{,}0875} = 7{,}251800$$

$$t = 9\ \% : \quad \frac{1-(1{,}09)^{-12}}{0{,}09} = 7{,}160725$$

وبالتالي معدل الخصم الذي نبحث عنه يقع بين هذين المعدلين، ويمكن إيجاده بالطريقة التالية:

$$t = 9-(9-8{,}75)\ \frac{7{,}2-7{,}160725}{7{,}251800-7{,}160725} = 8{,}89\%.$$

ج.حساب عدد الدفعات:

مثال: بلغت القيمة الحالية لسلسلة دفعات ثابتة عادية 16987.81 دج، قيمة كل منها 2200دج، معدل الخصم المطبق هو 5%، حدد عدد الدفعات المسددة.

$$Va = 16987{,}81 = 2200\,\frac{1-(1{,}05)^{-n}}{0{,}05}$$

$$\frac{16987{,}81}{2200} = \frac{1-(1{,}05)^{-n}}{5}$$

$$\frac{1-(1{,}05)^{-n}}{5} = 7{,}721733$$

$$1-(1{,}05)^{-n} = 0{,}38608666$$

$$(1{,}05)^{-n} = 0{,}613913333 \quad \Rightarrow \quad \log(1{,}05)^{-n} = \log\ 0{,}613913333$$

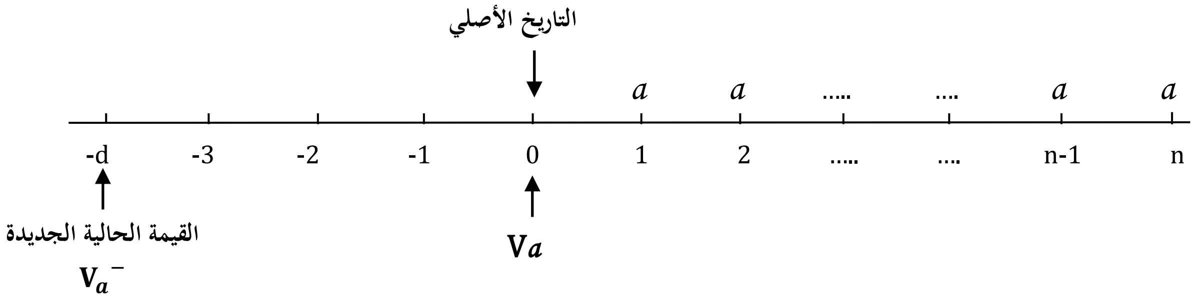
$$-n\log 1{,}05 = \log 0{,}613913333$$

$$-n(0{,}021189299) = -0{,}211892934 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{0{,}211892934}{0{,}021189299}$$

$n=10$ دفعات

6.1.3. حالات خاصة بالقيمة الحالية لسلسلة دفعات ثابتة:

أ.القيمة الحالية لسلسلة دفعات ثابتة d فترة قبل التاريخ الأصلي:



يمكن إيجاد القيمة الحالية في التاريخ d- بإرجاع القيمة الحالية لسلسلة الدفعات الثابتة لنهاية المدة إلى التاريخ d- قبل التاريخ الأصلي ويمكن أن نكتب:

$$V_a^{-d} = V_a(1+t)^{-d} = a\,\frac{1-(1+t)^{-d}}{t}\,(1+t)^{-d}$$

مثال: أحسب القيمة الحالية لسلسلة دفعات، قيمة كل واحدة3000دج، وعددها 12 دفعة، 5فترات قبل التاريخ الأصلي معدل الخصم 11%.

الحل:

a=3000 DA , n= 12 دفعات

V_a^{-5} =? , d= 5 فترات

$$V_a^{-5}= a\,\frac{1-(1+t)^{-d}}{t}\,(1+t)^{-d}$$

$$V_a^{-5}= 3000\,\frac{1-(1.11)^{-12}}{0.11}\,(1.11)^{-5}$$

$$V_a^{-5}= 3000\times6,492356\times0,5934513=11558,69 \text{ DA.}$$

يمكن استخدام الجدولين الماليين رقم 04 ورقم 02.

ملاحظة: يمكن كتابة العلاقة السابقة بالشكل:

$$V_a^{-d}= a\ \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}(1+t)^{-d} = a\left[\frac{(1+t)^{-d}-(1+t)^{-n-d}}{t}\right]$$

$$V_a^{-d}= a\left[\frac{-(1+t)^{-n-d}-(1+t)^{-d}}{t}\right]= a\left[\frac{-(1+t)^{-n-d}}{t}-\frac{-(1+t)^{-d}}{t}\right]$$

$$V_a^{-d}= a\left[\frac{1-(1+t)^{-(n+d)}}{t}-\frac{1-(1+t)^{-d}}{t}\right]$$

ووفقا لهذه العلاقة يمكن استعمال الجدول المالي رقم04 فقط.

من المثال السابق نجد:

$$V_a^{-d}=3000\left[\frac{1-(1.11)^{-(12+5)}}{0.11}-\frac{-1(1.11)^{-5}}{0.11}\right]$$

$$= 3000\ (7,548794 - 3,695897)= 11558,69\ \text{DA.}$$

ب. القيمة الحالية (الأصلية) في حالة تسديدات ثابتة غير سنوية

مثال: أحسب القيمة الحالية (سداسي قبل تاريخ أول دفعة) لـ 30دفعة سداسية بقيمة 4000دج للواحدة، معدل الخصم السداسي4.5%.

الحل: المعدل السداسي يتوافق مع فترات تسديد الدفعات السداسية، وبالتالي حساب القيمة الحالية يكون وفق العلاقة الثابتة:

$$V_a= 4000\ \frac{1-(1,045)^{-30}}{0,045} = 4000 \times 16,288888 = 65155,55\ \text{DA.}$$

مثال: أحسب القيمة الأصلية لـ60دفعة ثلاثية بقيمة 5000دج للواحدة، ومعدل الخصم السنوي هو 10%.

الحل: لإيجاد القيمة الأصلية لهذه الدفعات سوف نستعمل t_4 وهو المعدل الثلاثي المكافئ للمعدل السنوي10%.

بإمكاننا أن نكتب:

$$V_a=5000\frac{1-(1,045)^{-60}}{t_4}$$

المعدل الثلاثي المكافئ:

$$(1+t)=(1+t_4)^4$$

$$1{,}10=(1+t_4)^4 \qquad t_4=1{,}10-1=0{,}024113$$

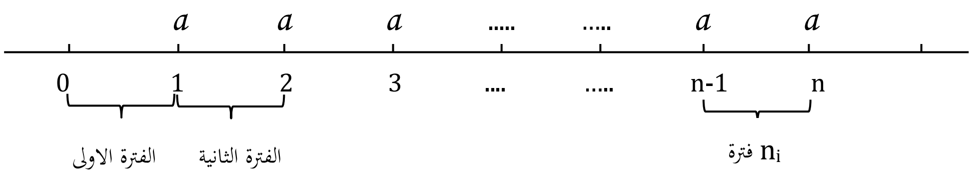
$$t_4= 2{,}4113\%$$

ومنه:

$$V_a=5000\frac{1-(1{,}024113)^{-60}}{0{,}024113} = \frac{0{,}760608}{0{,}024113}= 157737{,}03 \text{ DA.}$$

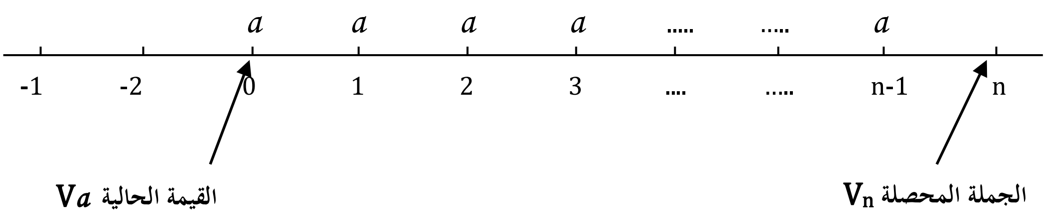
2.3.الدفعات الثابتة لأول المدة:

حتى الآن تمت دراسة دفعات آخر المدة، والتي عبرنا عنها بالمخطط الموالي:



فالدفعات في هذا المخطط هي دفعات تسدد آخر الفترة (نهاية الفترة الأول، نهاية الفترة الثانية،.......،نهاية الفترة n، ويطلق عليها دفعات آخر المدة (دفعات عادية)، حيث تعطى علاقة الجملة المحصلة لهذه الدفعات بالشكل: $V_n= a \frac{(1+t)^{-n}-1}{t}$، أما قيمتها الحالية عند النقطة 0 (التاريخ الأصلي) فتكتب بالشكل: $V_a= a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$.

أما الدفعات التي تسدد في أول كل فترة زمنية مثل: شهر، سنة....الخ (بداية الفترة الأولى، بداية الفترة الثانية.... بداية الفترة n-1) فجملتها تحسب فترة واحدة بعد آخر دفعة، في حين تحسب قيمتها الحالية عند تاريخ أول دفعة (وهو نفسه التاريخ الأصلي).



الجملة المحصلة لسلسلة دفعات ثابتة لأول المدة تحسب فترة واحدة بعد آخر دفعة، أي في نهاية الفترة $n-1$ وذلك عند التاريخ n وقد عرفنا في السابق كيف نكتب علاقة الجملة المحصلة لفترة واحدة بعد آخر دفعة:

$$\boxed{V_n = a\frac{(1+t)^{-n}-1}{t}(1+t)}$$

علاقة القيمة الحالية لدفعات أول المدة يمكن كتابتها بالشكل:

$$\boxed{V_a = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}(1+t)}$$

أي نقوم بحساب القيمة الحالية لسلسلة دفعات أول مدة فترة واحدة قبل أول دفعة (عند التاريخ−1)، ثم نحسب جملتها عند التاريخ الأصلي (تاريخ أول دفعة).

يمكن ملاحظة أنه لا يوجد فرق كبير بين دفعات آخر المدة ودفعات أول مدة، فنفس سلسلة الدفعات يمكن اعتبارها (كما رأينا سابقا) دفعات آخر المدة أو دفعات أول المدة، ومن أجل حساب الجملة المحصلة أو القيمة الحالية ما يهم في النهاية هو تحديد بشكل دقيق التاريخ الذي يتم على أساسه تقييم سلسلة الدفعات.

3.3.الدفعات ذات متوالية حسابية: Les Annuités en progression arithmétique

1.3.3.حساب الجملة المحصلة:

	a	$(a+r)$	$(a+2r)$	....	....	$a+(n-2)r$	$a+(n-1)r$
0	1	2	3	....	.....	n-1	n

الجملة المحصلة (المكتسبة) V_a لسلسلة دفعات لآخر المدة لمتوالية حسابية تساوي مجموع الجمل المحصلة لكل دفعة مباشرة بعد تسديد آخر دفعة، وعليه عند التاريخ n يمكننا حساب $_{(a)}V_n$ الجملة المحصلة لهذه الدفعات كما يلي:

$$_{(a)}V_n = a(1+t)^{n-1}+(a+r)(1+t)^{n-2}+(a+2r)(1+t)^{n-3}+\ldots\ldots\ldots\ldots+[a+(n-2)r](1+t)+a+(n-1)r$$

$$_{(a)}V_n = [a(1+t)^{n-1}+a(1+t)^{n-2}+a(1+t)^{n-3}+\ldots\ldots\ldots\ldots+a(1+t)+a]+[r(1+t)^{n-2}+2r(1+t)^{n-3}+\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots+(n-2)r(1+t)+(n-1)r] .$$

يمثل الجزء الأول للعبارة مجموع متوالية هندسية حدها الأول a، وأساسها $(1+t)$ وعدد حدودها هو n،

وبالتالي يمكن كتابتها بالشكل $a\frac{(1+t)^n-1}{t}$ وهي نفسها الجملة المحصلة لسلسلة دفعات ثابتة لآخر المدة.

الجزء الثاني للعبارة نرمز له S وبالتالي نكتب:

$$S= r(1+t)^{n-2}+2r(1+t)^{n-3}+.......+(n-2)r(1+t)+(n-1)r.........................(1)$$

بضرب طرفي المساواة في $(1+t)$ نجد:

$$S(1+t)=r(1+t)^{n-1}+2r(1+t)^{n-2}+.......+(n-2)r(1+t)^2+(n-1)r(1+t)........(2)$$

بطرح المساواة (2) من المساواة (1) ومقارنة الحدود التي لها نفس الأسس مع بعضها البعض نجد:

$$S(1+t)-S=\underbrace{r(1+t)^{n-1}+r(1+t)^{n-2}+......r(1+t)^2+r(1+t)+r}_{\text{يمثل الجملة المحصلة لسلسلة دفعات ثابتة عددها n وقيمة كل منها r}} - nr$$

ومنه:

$$S(1+t)-S= r\,\frac{(1+t)^n-1}{t} -nr$$

$$\cancel{S}+St-\cancel{S}= r\,\frac{(1+t)^n-1}{t} -nr$$

$$S=\frac{r}{t}\times \frac{(1+t)^n-1}{t} - \frac{nr}{t}$$

وعليه نكتب الجملة $_{(a)}V_n$ بالشكل:

$$_{(a)}V_n = a\frac{(1+t)^n-1}{t} + S$$

$$_{(a)}V_n = a\frac{(1+t)^n-1}{t} + \frac{r}{t} \times \frac{(1+t)^n-1}{t} - \frac{nr}{t}$$

إذن:

$$\boxed{_{(a)}V_n = \frac{(1+t)^n-1}{t}\left(a+\frac{r}{t}\right) - \frac{nr}{t}}$$

مثال: أحسب الجملة المحصلة لسلسلة دفعات ذات متوالية حسابية، قيمة الدفعة الأولى DA 20000 = a الأساسR=1100، عدد الدفعات 15 دفعة والمعدل السنوي هو 11%.

الحل:

$$_{(a)}V_{15} = \frac{(1,11)^{15}-1}{0,11}\left(20000+\frac{1100}{0,11}\right) - \frac{15\times1100}{0,11}$$

$$= 33,725318\ (20000\text{-}1000)\ \text{-}150000 = 861759,54\ \text{DA}.$$

مثال02: أوجد الجملة المحصلة لسلسلة دفعات ذات متوالية حسابية حيث:

$$a=10000\ ,\quad r=-1000\ ,\quad n=8\ ,\quad t=10\%.$$

الحل:

$$_{(a)}V_{8} = \frac{(1,1)^{8}-1}{0,1}\left(10000+\frac{1000}{0,1}\right) + \frac{8\times1000}{0,1}$$

$$= 11,43588(10000-10000)+80000 = 80000\ \text{DA}.$$

2.3.3.حساب القيمة الحالية:

يمكننا استعمال العلاقة:

القيمة الحالية= الجملة المحصلة ×$(1+t)^{-n}$

$$V_a = V_n(1+t)^{-n}$$

ومنه:

$$_{(a)}V_a = \left[\frac{(1+t)^{n}-1}{t}\left(a+\frac{r}{t}\right) - \frac{nr}{t}\right](1+t)^{-n}$$

$$_{(a)}V_a = \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\left(a+\frac{r}{t}\right) - \frac{nr}{t}(1+t)^{-n}$$

يمكن استعمال الجدولين الماليين رقم 02 ورقم 04 .

كما يمكن استعمال العلاقة السابقة للقيمة الحالية بعد إضافة وطرح القيمة $\frac{nr}{t}$ بالشكل:

$$_{(a)}V_a = \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\left(a+\frac{r}{t}\right)+\frac{nr}{t}-\frac{nr}{t}(1+t)^{-n}-\frac{nr}{t}$$

$$=\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\left(a+\frac{r}{t}\right)+nr\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}-\frac{nr}{t}$$

العلاقة النهائية تكتب بالصيغة التالية:

$$\boxed{_{(a)}V_a = \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\left(a+\frac{r}{t}+nr\right)-\frac{nr}{t}}$$

مثال: أحسب القيمة الحالية لسلسلة دفعات ذات متوالية حسابية حيث:

$$.t= 10\% \quad ,\ n= 15 \quad ,\ r = 1000 \quad ,\ a = 20000$$

الحل:

$$_{(a)}V_a = \frac{1-(1,1)^{-15}}{0,1}\left(20000+\frac{1000}{0,1}+(15\times1000)\right)-\frac{15\times1000}{0,1}$$

$$= 7,60608(20000+10000+15000)-150000= 192273,60\text{DA}.$$

4.4. الدفعات ذات متوالية هندسية: Les Annuités en progression géométrique

1.4.3. حساب الجملة المحصلة:

	a	aq	aq^2	…	…	aq^{n-2}	aq^{n-1}
0	1	2	3	…	…	n-1	n

نحسب الجملة المحصلة لهذه الدفعات مباشرة بعد سداد آخر دفعة أي عند التاريخ n (تاريخ آخر دفعة).

ومنه:

$$_{(g)}V_n = a(1+t)^{n-1}+a\,q(1+t)^{n-2}+a\,q^2(1+t)^{n-3}+......+a\,q^{n-2}(1+t)^1+a\,q^{n-1}$$

نلاحظ أن هذا المجموع يمثل من اليسار إلى اليمن حدود متتالية هندسية حدها الأول $a\,(1+t)^{n-1}$، وأساسها $q(1+t)^{-1}$ أو نكتب كذلك $\frac{q}{1+t}$ ، وعدد حدودها n.

ومنه نكتب:

$$_{(g)}V_n = a\,(1+t)^{n-1}\frac{\left(\frac{q}{1+t}\right)-1}{\left(\frac{q}{1+t}\right)-1}$$

$$_{(g)}V_n = a\,(1+t)^{n-1}\frac{\frac{q^n-(1+t)^n}{(1+t)^n}}{\frac{q-(1+t)}{(1+t)}} = a\,(1+t)^{n-1}\frac{q^n-(1+t)^n}{(1+t)^n}\times\frac{1+t}{q-(1+t)}$$

وبالتالي نصل إلى:

$$\boxed{_{(g)}V_n = a\,\frac{q^n-(1+t)^n}{q-(1+t)}}$$

مثال: أحسب الجملة المحصلة لسلسلة دفعات ذات متوالية هندسية حيث:

$a=1000$, $n=20$, $q=1{,}10$, $t=9\%$.

$$_{(g)}V_{20} = 10000\frac{1{,}1^{20}-1{,}9^{20}}{1{,}1-1{,}09}$$

$$_{(g)}V_{20} = 10000\frac{6{,}7275-5{,}604411}{0{,}01} = 1123089 \text{ DA.}$$

- **حالة خاصة**: إذا كان $q=(1+t)$.

في هذه الحالة وعند التعويض في العلاقة السابقة نجد أن:

$$_{(g)}V_{20} = a\,\frac{0}{0}$$

ومن أجل تجاوز هذا الإشكال نرجع إلى العلاقة الأولية التي انطلقنا منها لإيجاد جملة الدفعات ذات متوالية هندسية.

$$_{(g)}V_n = a(1+t)^{n-1}+a\,q(1+t)^{n-2}+a\,q^2(1+t)^{n-3}+\ldots\ldots+a\,q^{n-2}(1+t)^1+a\,q^{n-1}$$

وبتعويض q بـ (1+t) نجد:

$$_{(g)}V_n = a(1+t)^{n-1}+a(1+t)^{n-1}+\dots\dots\dots+a(1+t)^{n-1}+a(1+t)^{n-1}$$

$$\boxed{_{(g)}V_n = na(1+t)^{n-1}}$$

مثال: انطلاقا من المثال السابق، وليكن q=1.09 ، نجد:

$$_{(g)}V_{20} = 20\times10000\ (1{,}09)^{19} = 200000\times5{,}141661$$

$$_{(g)}V_{20} = 1028332{,}20\ \text{DA.}$$

2.4.3. حساب القيمة الحالية:

يمكننا أن نكتب:

$$_{(g)}V_a = {}_{(g)}V_n\,(1+t)^{-n}$$

$$_{(g)}V_a = a\frac{q^n-(1+t)^n}{q-(1+t)}(1+t)^{-n}$$

$$\boxed{_{(g)}V_a = \frac{a}{(1+t)^n}\times\frac{q^n-(1+t)^n}{q-(1+t)}}$$

- **حالة خاصة:** إذا كان $q=(1+t)$:

في هذه الحالة تصبح العلاقة من الشكل:

$$_{(g)}V_a = {}_{(g)}V_n\,(1+t)^{-n}$$

$$= na(1+t)^{n-1}(1+t)^{-n}$$

$$\boxed{_{(g)}V_a = na(1+t)^{-1}}$$

مثال: أحسب القيمة الحالية لسلسلة دفعات ذات متوالية هندسية إذا علمت أن:

$t = 8\%$, $n=10$, $q=1{,}05$, $a = 6000$

الحل:

$$_{(g)}V_a = \frac{6000}{1{,}08^{10}} \times \frac{1{,}05^{10} - 1{,}08^{10}}{1{,}05 - 1{,}08}$$

$$= 2779{,}16221 \times \frac{0{,}53}{0{,}03} = 49101{,}32 \text{ DA}$$

- نفس السؤال في حالة $q = 1{,}08$

$$_{(g)}V_a = 10 \times 6000(1{,}08)^{-1}$$

$$_{(g)}V_a = 60000 \times 0{,}925926 = 55555{,}56 \text{ DA.}$$

استهلاك القروض طويلة الأجل

Amortissement des emprunts à long terme

الفصل الرابع

هدف الفصل	✓ معرفة مختلف الطرق المستخدمة في استهلاك القروض. ✓ معرفة كيفية حساب قسط استهلاك القرض A. ✓ تشكيل جدول استهلاك القرض. ✓ تحديد العلاقات الموجودة بين القرض، الإستهلاكات، و القسط.
خطة الفصل	1.2. طريقة القسط المتناقض (القسط الثابت من الأصل). 2.4.طريقة استهلاك القرض بدفعات متساوية من الأصل والفوائد (طريقة التقسيط المتساوي). 3.4.العلاقة بين الاستهلاكات. 4.3.بعض العلاقات بين القرض والاستهلاك والقسط.

يتم استهلاك القروض بطرق مختلفة يتفق عليها بين المتعاقدين، فمنها ما يوفى بتاريخ محدد فيكون القرض محدود الأجل، ومنها ما يوفى على مدار مدة معينة، هي مدة القرض، وبدفعات متتالية آخرها في نهاية المدة المتفق عليها، ويمكن أن نعرض الطرق الآتية كنماذج لبعض الطرق العلمية التي جرى التعامل بها:

1- تسديد القرض مع فوائده دفعة واحدة في نهاية مدة القرض (أي الجملة).

2- تسديد الفوائد بصورة دورية وقيمة الأصل (القرض) في نهاية المدة.

3- تسديد القرض على أقساط غير متساوية، وفترات غير منتظمة كما هو الحال في استبدال الديون.

4- تسديد القرض على أقساط متساوية من أصل قرض فقط، ويضاف إلى كل منها فوائد الأرصدة بصورة دورية، حيث تتألف الدفعة الواحدة من جزأين، جزء من أصل القرض هو القسط المتساوي، وآخر يمثل الفوائد البسيطة على الأرصدة المتناقصة للقرض من دورة إلى أخرى.

5- تسديد القرض على أقساط متساوية من أصل القرض والفوائد معا، إذ تكون الدفعات متساوية فيما بينها وكل منها تتألف من جزء من أصل القرض وآخر من الفوائد المترتبة عليه.

ومن المتعارف عليه أن طريقة سداد القرض وفوائده مرة واحدة عند تاريخ استحقاقه لا يتلاءم ومحصلة كل من طرفي العلاقة، لذا نجد أن أغلب المتعاقدين على القروض طويلة الأجل يتفقون على استهلاكها وتسويتها خلال فترات زمنية بواسطة أقساط متساوية، سواء من الأصل فقط دون الفائدة (طريقة القسط الثابت من الأصل أو طريقة القسط المتناقص)، أو أقساط متساوية من الفوائد والأصل معا (طريقة استهلاك القروض بدفعات متساوية).

الرموز والعلاقات المستخدمة:

C_0: أصل القرض

t: معدل الفائدة

n: عدد الفترات الزمنية المخصصة لاستهلاك القرض.

A_i: القسط الواجب سداده في نهاية كل فترة زمنية (الدفعة).

M_i: قسط الاستهلاك من أصل القرض.

1.3. طريقة القسط المتناقص (القسط الثابت من الأصل):

بمقتضى هذه الطريقة يتم استهلاك أصل القرض فقط، على أساس أقساط متساوية خلال مدة استهلاك القرض، مع سداد الفائدة على الرصيد.

1– حساب قسط الإستهلاك الثابت:

يحسب قسط الإستهلاك الثابت بقسمة أصل القرض على عدد أقساط التي تتوافق مع الفترات الزمنية التي تسدد فيها، ويعبر عنها بالعلاقة:

$$\text{القسط المتساوي من الأصل} = \frac{\text{قيمة أصل القرض}}{\text{عدد الفترات الزمنية لإستهلاك القرض}}$$

ونكتب بالرموز:

$$M = \frac{C_o}{n}$$

2– جدول استهلاك القرض:

يشمل جدول استهلاك القرض على رصيد أصل القرض في بداية الفترات وفي نهايتها، وأيضا الفوائد المستحقة كل فترة، كما يشتمل على قيمة الاستهلاكات الثابتة، والأقساط الواجب سدادها كل فترة.

تستحق أقساط الاستهلاك الثابتة في نهاية كل فترة زمنية من فترات استهلاك القرض، أما الفائدة المستحقة في نهاية كل فترة زمنية فيتم حسابها على الرصيد المتبقي من القرض في كل فترة زمنية، أي بعد خصم قسط الاستهلاك الثابت، ويكون حساب الفوائد المستحقة (باقتراض أن الفترات الزمنية متساوية تعادل سنة واحدة) كما يلي:

$$I_1 = C_o \times t \times n_1$$

$$I_2 = (C_o - M) \times t \times n_2$$

$$I_3 = (C_o - 2M) \times t \times n_3$$

$$I_4=(C_o-3M)\times t\times n_4$$

إلى غاية آخر فترة من فترات استهلاك القرض

$$I_n = M\times t\times n_n$$

وبالنظر إلى الفائدة المستحقة عن الرصيد المتبقي في نهاية كل فترة زمنية سنجدها تتناقص بمقدار ثابت من فترة زمنية لأخرى، ويرجع ذلك إلى تناقص الرصيد المتبقي المحسوبة على أساسه من فترة زمنية لأخرى بمقدار M، ومن تم نجد أن حدود (المبالغ) الفوائد المستحقة خلال مدة استهلاك القرض تكون متوالية عددية.

ويتكون القسط الواجب سداده A في نهاية كل فترة زمنية من جزئين هما:

قسط الاستهلاك الثابت (M) + الفائدة المستحقة عن كل فترة زمنية (I_i):

أي: $$\boxed{A_i = M+I_i}$$

ومنه نجد أن الأقساط الواجب سدادها لكل فترة تحسب كما يلي:

الدفعة الأولى $A_1= M+I_1$

الدفعة الثانية $A_2= M+I_2$

الدفعة الثالثة $A_3= M+I_3$

الدفعة الرابعة $A_4= M+I_4$

وهكذا حتى القسط الأخير (الدفعة الأخيرة)

$$A_n =M+I_n$$

ونظرا لأن قسط الاستهلاك من أصل القرض الثابت خلال كل الفترات وأن الفائدة تتناقص بمقدار ثابت، فالنتيجة هي تناقص قيمة الدفعة A بالمقدار الثابت المتناقص من الفائدة، ولهذا تسمى هذه الطريقة لاستهلاك القروض بطريقة القسط المتناقص.

كما نلاحظ مما سبق أن قيم الدفعات A (الأقساط الواجب سدادها) تشكل فيما بينها متوالية عددية متناقصة أساسها يساوي الفرق الثابت بين كل دفعتين متتاليتين، أي أن:

وهكذا $R= A_2-A_1= A_3-A_2.......$

حيث أن R هو أساس المتوالية العددية (الحسابية).

ويساعد جدول استهلاك القرض على تسجيل جميع البيانات الهامة الخاصة بتسديد القرض، ويعرض جدول استهلاك القرض كالآتي:

الفترةn	الرصيد في بداية الفترة	الفائدة المستحقة كل سنة I_i	القسط السنوي الواجب سداده A_i	قسط الاستهلاك الثابتM	الرصيد في نهاية كل سنة

مثال01: اقترض أحد الأشخاص مبلغ 50000دج من أحد البنوك، وتم الاتفاق على سداد الأصل على خمسة أقساط سنوية متساوية على أن تسدد الفائدة على الرصيد في نهاية كل سنة بمعدل 7% سنويا.

المطلوب:

1- حساب بنود استهلاك هذا القرض خلال فترة الاستهلاك.

2- إعداد جدول استهلاك هذا القرض.

الحل:

1- حساب بنود استهلاك هذا القرض خلال فترة الاستهلاك.

- قسط الاستهلاك السنوي الثابت M:

$$M= \frac{C_o}{n} = \frac{50000}{5} = 10000 \text{ DA.}$$

- **الفوائد السنوية**:

$$I_1 = C_o \times t \times n_1 = 50000 \times 0{,}07 \times 1 = 3500 \text{ DA.}$$

$$I_2 = (C_o - M) \times t \times n_2 = (50000-1000) \times 0{,}07 \times 1 = 2800 \text{ DA.}$$

$I_3 = (C_o-2M)\times t\times n_3 = (50000-2000)\times 0{,}07\times 1 = 2100$ DA.

$I_4 = (C_o-3M)\times t\times n_4 = (50000-3000)\times 0{,}07\times 1 = 1400$ DA.

$I_5 = (C_o-4M)\times t\times n_5 = (50000-4000)\times 0{,}07\times 1 = 700$ DA.

- **الأقساط الواجب سدادها سنويا (الدفعات) A_i:**

$A_1 = M+I_1 = 10000+3500 = 13500$ DA.

$A_2 = M+I_2 = 10000+2800 = 12800$ DA.

$A_3 = M+I_3 = 10000+2100 = 12100$ DA.

$A_4 = M+I_4 = 10000+1400 = 11400$ DA.

$A_5 = M+I_5 = 10000+700 = 10700$ DA.

2- إعداد جدول استهلاك القرض:

الفترة n	الرصيد بداية السنة	الفائدة المستحقة كل سنة I_i	القسط السنوي الواجب سداده A_i	القسط السنوي الثابت M	الرصيد في نهاية كل فترة
1	50000	3500	135000	10000	40000
2	40000	2800	12800	10000	30000
3	30000	2100	12100	10000	20000
4	20000	1400	11400	10000	10000
5	10000	700	10700	10000	0
المجموع	-	10500	60500	50000	-

مثال02: اقترض تاجر مبلغا ما بمعدل فائدة 8% سنويا، واتفق مع الدائن على تسديد قيمة القرض على 5 أقساط سنوية متساوية من الأصل فقط يضاف إلى كل منها الفوائد المترتبة على الرصيد في نهاية كل سنة، فإذا كان مجموع الفوائد التي حصل عليها الدائن خلال مدة القرض هي 180000 دج، وكانت قيمة الفائدة المدفوعة مع القسط الخامس هي 12000دج.

المطلوب:

1- إيجاد قيمة القرض وقيم الأقساط الواجب سدادها.

2- إعداد جدول استهلاك هذا القرض.

الحل:

1- إيجاد قيمة القرض وقيم الأقساط

- قيمة القرض:

لدينا: $I_5 = 12000$ DA

ومنه: $I_5 = M \times t$

$$M+\frac{I_5}{t}=\frac{12000}{0,08}=150000 \text{ DA}$$

قيمة القسط الثابت السنوي هو: 150000دج

إذن: $C_o = M \times 5 = 150000$

$C_o = 750000$ DA.

قيمة القرض: 750000دج.

- **الفوائد السنوية:**

$I_1 = C_o \times t \times n_1 = 750000 \times 0,08 = 60000$ DA.

$I_2 = (750000 - 150000) \times 0,08 = 48000$ DA.

$I_3 = (750000 - (2 \times 150000)) \times 0,08 = 36000$ DA.

$I_4 = (750000 - (3 \times 150000)) \times 0,08 = 24000$ DA.

$I_5 = 12000$ DA.

- **الأقساط الواجب سدادها سنويا A_i:**

$A_1 = M + I_1 = 150000 + 60000 = 210000$ DA.
$A_2 = 150000 + 48000 = 198000$ DA.

$A_3 = 150000 + 36000 = 186000$ DA.

$A_4 = 150000 + 24000 = 174000$ DA.

$A_5 = 150000 + 12000 = 162000$ DA.

2– جدول استهلاك القرض:

الفترة n	الرصيد بداية السنة	الفائدة المستحقة كل سنة I_i	القسط السنوي الواجب سداده A_i	القسط السنوي الثابت M	الرصيد في نهاية كل فترة
1	750000	60000	210000	150000	600000
2	600000	48000	198000	150000	450000
3	450000	36000	186000	150000	300000
4	300000	24000	174000	150000	150000
5	15000	120000	162000	150000	0
المجموع	-	180000	60500	750000	-

2.4. طريقة استهلاك القرض بدفعات متساوية من الأصل والفوائد (طريقة التقسيط المتساوي):

تعتبر من أهم الطرق السائدة، وبمقتضى هذه الطريقة يؤدي المدين ما عليه من قرض وفوائد معا على شكل دفعات متساوية ودورية منتظمة، كل منها يتألف من جزأين: جزء يمثل القرض وجزء يمثل الفائدة، والأقساط في هذه الحالة تعتبر دفعات عادية تسدد في نهاية كل فترة زمنية، وبالتالي يعد أصل القرض في هذه الحالة مساويا للقيمة الحالية للدفعات العادية محسوبة بمعدل معين.

- **حساب القسط المتساوي (الدفعة المتساوية):**

إذا رمزنا إلى:

- ✓ أصل القرض بــ: C_0.
- ✓ مدة استهلاك القرض (عدد الدفعات أو الأقساط الدورية المتساوية): n.
- ✓ معدل الفائدة: t.
- ✓ القسط الدوري المتساوي أو قيمة الدفعة: A.

يمكن إيجاد أصل القرض (قيمة القرض) بالعلاقة التالية:

$$C_0 = A\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

كما يمكن إيجاد قيمة كل دفعة (القسط الدوري المتساوي) بالعلاقة التالية:

$$A = C_0\,\frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

مثال 01: قرض قيمته 10000000دج يسدد على 5 سنوات بواسطة أقساط (دفعات) سنوية متساوية من الأصل و الفائدة معا تسدد في نهاية كل فترة زمنية بمعدل فائدة مركبة 10% سنويا، المطلوب:

- إيجاد قيمة كل قسط (دفعة).
- إيجاد قيمة الفائدة المستحقة في نهاية مدة القرض.

الحل:

- إيجاد قيمة كل قسط:

$$A = C_0\,\frac{t}{1-(1+t)^{-n}} = 10000000\,\frac{0{,}1}{1-(1{,}1)^{-5}}$$

$$= 10000000 \times 0{,}263797448$$

$A = 2637974{,}80$ DA.

- إيجاد قيمة الفائدة المستحقة في نهاية مدة القرض:

نحسب أولا قيمة المبلغ الذي سيتم دفعه في نهاية مدة القرض وذلك كما يلي:

قيمة المبلغ الذي سيتم دفعه في نهاية مدة القرض $= 2637974{,}80 \times 5 = 13189874$ DA

إذن:

$$I = 13189874 - 10000000 = 3189874 \text{ DA.}$$

- **جدول استهلاك القرض**: يشمل جدول استهلاك القرض وفق هذه الطريقة على البيانات التالية:
  1- رصيد أصل القرض في أول كل فترة زمنية.
  2- مقدار الفائدة المستحقة لكل فترة زمنية، وتكون عادة في نهاية كل فترة زمنية.

3- القسط الدوري المتساوي، وهو عبارة عن جزء من القسط أو أصل القرض، وقيمة الفائدة المستحقة لكل فترة زمنية.

4- الباقي من أصل القرض في آخر كل فترة زمنية، أو بعبارة أخرى الرصيد في نهاية كل فترة زمنية.

5- قيمة الاستهلاك من أصل القرض.

6- الوحدة الزمنية أو الفترات.

إن الفوائد المستحقة في نهاية كل فترة زمنية متفق عليها لاستهلاك أي قرض تتناقص قيمتها بصفة مستمرة في كل فترة زمنية عن سابقتها خلال مدة استهلاك هذا القرض، في حين تزداد قيمة الجزء المخصص لاستهلاك أصل القرض بصفة مستمرة في كل فترة عن سابقتها خلال نفس مدة استهلاك هذا القرض.

مثال 01: اقترض شخص مبلغ مالي قدره 25000دج من بنك لبناء سكن سنة 2018، وتم الإتفاق مع

البنك على تسوية القرض والفوائد معا على أقساط سنوية متساوية من أصل القرض والفوائد معا، وقد تم تحديد عشرة أقساط لتسديد هذا القرض، فإذا كان معدل الفائدة 8% سنويا:

المطلوب:

1- حساب قيمة القسط السنوي المتساوي لاستهلاك القرض والفوائد معا.

2- حساب عناصر استهلاك القرض للعشر سنوات.

3- إعداد جدول استهلاك هذا القرض.

الحل:

1- حساب قيمة القسط السنوي المتساوي لاستهلاك القرض والفوائد معا:

لحساب القسط السنوي المتساوي لابد من تساوي أصل القرض مع القيمة الحالية لمجموع الاقساط:

$$C_0 = A\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \quad \Longrightarrow \quad A = C_0\,\frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

و منه:

$$A = 25000\,\frac{0,08}{1-(1,08)^{-10}}$$

$$= 25000 \times 0,14902949$$

$A = 3725,7372$ DA.

2- حساب عناصر استهلاك القرض عن كل سنة من سنوات استهلاك القرض:

السنة الأولى:

- رصيد القرض أول مدة: أصل القرض: $C_o = 25000$ DA.
- القسط المتساوي: $A = 3725,7372$ DA.
- الفائدة المستحقة على القرض خلال السنة الأولى:

$$I_1 = C_o \times t = 25000 \times 0,08 = 2000 \text{ DA.}$$

- الجزء المستهلك من أصل القرض (استهلاك السنة الأولى M_1):

$$M_1 = A - I_1 = 3725,7372 - 2000 = 1725,737 \text{ DA.}$$

- رصيد القرض في نهاية السنة الأولى من سنوات استهلاك القرض:

$$C_1 = C_o - M_1 = 25000 - 1725,737 = 23274,263 \text{ DA.}$$

نلاحظ أن القسط السنوي المتساوي (A) يقسم إلى قسمين:

- ✓ الفائدة خلال السنة وهي: $I_1 = 2000$ DA.
- ✓ والجزء الذي يخص استهلاك القرض وهو: $M_1 = 1725,737$

السنة الثانية:

- الرصيد في بداية السنة الثانية = الرصيد المتبقي في نهاية السنة الأولى:

$C_1 = 23274,263$ DA.

- القسط السنوي المتساوي:

$A = 3725,7372$ DA.

- الفائدة المستحقة خلال السنة الثانية:

$$I_2 = 23274,263 \times 0,08 = 1861,94104 \text{ DA.}$$

- استهلاك السنة الثانية: M_2:

$$M_2 = A - I_2 = 3725,7372 - 1861,94104 = 1863,796 \text{ DA}$$

- الرصيد المتبقي في نهاية السنة الثانية:

$$C_2 = C_1 - M_2 = 23274,263 - 1863,796 = 21410,467 \text{ DA.}$$

السنة الثالثة:

- الرصيد في بداية السنة الثالثة = الرصيد المتبقي في نهاية السنة الثانية:

$$C_2 = 21410,467 \text{ DA.}$$

- القسط السنوي المتساوي:

$$A = 3725,7372 \text{ DA.}$$

- الفائدة المستحقة خلال السنة الثالثة:

$$I_3 = 21410,467 \times 0,08 = 1712,837 \text{ DA.}$$

- استهلاك السنة الثالثة: M_3 :

$$M_3 = A - I_3 = 3725,7372 - 1712,837 = 2012,98 \text{ DA.}$$

- الرصيد المتبقي في نهاية السنة الثالثة:

$$C_3 = C_2 - M_3 = 21410,467 - 2012,98 = 19397,567 \text{ DA.}$$

السنة الرابعة:

- الرصيد في بداية السنة الرابعة = الرصيد المتبقي في نهاية السنة الثالثة:

$$C_3 = 19397,567 \text{ DA.}$$

- القسط السنوي المتساوي:

$$A = 3725,7372 \text{ DA.}$$

- الفائدة المستحقة خلال السنة الرابعة:

$$I_4 = 19397,98 \times 0,08 = 1551,81 \text{ DA.}$$

- استهلاك السنة الرابعة: M_4 :

$$M_4 = A - I_4 = 3725,7372 - 1551,81 = 2173,923 \text{ DA.}$$

- الرصيد المتبقي في نهاية السنة الرابعة:

$$C_4 = C_3 - M_4 = 19397,567- 2173,923 = 17223,64 \text{ DA.}$$

السنة الخامسة:

- الرصيد في بداية السنة الخامسة = الرصيد المتبقي في نهاية السنة الرابعة:

$$C_4 = 17223{,}64 \text{ DA.}$$

.

- القسط السنوي المتساوي: $A = 3725{,}7372$ DA
- الفائدة المستحقة خلال السنة الخامسة:

$$I_5 = 17223{,}64 \times 0{,}08 = 1377{,}89 \text{ DA.}$$

- استهلاك السنة الخامسة: M_5 :

$$M_5 = A - I_5 = 3725{,}7372 - 1377{,}89 = 2347{,}847 \text{ DA.}$$

- الرصيد المتبقي في نهاية السنة الخامسة:

$$C_5 = C_4 - M_5 = 19397{,}567\text{- } 2347{,}847 = 14875{,}793 \text{ DA.}$$

السنة السادسة:

- الرصيد في بداية السنة الخامسة: $C_5 = 14875{,}793$ DA.
- القسط السنوي المتساوي: $A = 3725{,}7372$ DA.
- الفائدة المستحقة خلال السنة السادسة:

$$I_6 = 14875{,}793 \times 0{,}08 = 1190{,}063 \text{ DA.}$$

- استهلاك السنة السادسة: M_6 :

$$M_6 = A - I_6 = 3725{,}7372 - 1190{,}063 = 2535{,}674 \text{ DA.}$$

- الرصيد المتبقي في نهاية السنة السادسة:

$$C_6 = C_5 - M_6 = 14875{,}793 - 2535{,}674 = 12340{,}119 \text{ DA.}$$

السنة السابعة:

- الرصيد في بداية السنة السابعة: $C_6 = 12340{,}119$ DA.
- القسط السنوي المتساوي: $A = 3725{,}7372$ DA.
- الفائدة المستحقة خلال السنة السابعة:

$$I_7 = 12340{,}119 \times 0{,}08 = 987{,}209 \text{ DA.}$$

- استهلاك السنة السابعة: M_7 :

$$M_7 = A - I_7 = 3725{,}7372 - 12340{,}119 = 2738{,}528 \text{ DA.}$$

- الرصيد المتبقي في نهاية السنة السابعة:

$$C_7 = C_6 - M_7 = 12340{,}119 - 2738{,}528 = 9601{,}591 \text{ DA.}$$

السنة الثامنة:

- الرصيد في بداية السنة السابعة: $C_7 = 9601{,}591$ DA.
- القسط السنوي المتساوي: $A = 3725{,}7372$ DA.
- الفائدة المستحقة خلال السنة الثامنة:

$$I_8 = 9601{,}591 \times 0{,}08 = 768{,}127 \text{ DA.}$$

- استهلاك السنة الثامنة: M_8 :

$$M_8 = A - I_8 = 3725{,}7372 - 768{,}127 = 2957{,}981 \text{ DA.}$$

- الرصيد المتبقي في نهاية السنة الثامنة:

$$C_8 = C_7 - M_8 = 9601{,}591 - 2957{,}981 = 6643{,}981 \text{ DA.}$$

السنة التاسعة:

- الرصيد في بداية السنة التاسعة: $C_8 = 6643{,}981$ DA.
- القسط السنوي المتساوي: $A = 3725{,}7372$ DA.
- الفائدة المستحقة خلال السنة التاسعة:

$$I_9 = 6643{,}981 \times 0{,}08 = 531{,}518 \text{ DA.}$$

- استهلاك السنة التاسعة: M_9 :

$$M_9 = A - I_9 = 3725{,}7372 - 531{,}518 = 3194{,}219 \text{ DA.}$$

- الرصيد المتبقي في نهاية السنة التاسعة:

$$C_9 = C_8 - M_9 = 6643{,}981 - 3194{,}219 = 3449{,}762 \text{ DA.}$$

السنة العاشرة:

- الرصيد في بداية السنة العاشرة: $C_9 = 3449{,}762$ DA.

- القسط السنوي المتساوي: $A = 3725{,}7372$ DA.
- الفائدة المستحقة خلال السنة العاشرة:

$$I_{10} = 3449{,}762 \times 0{,}08 = 275{,}98 \text{ DA.}$$

- استهلاك السنة العاشرة: M_{10} :

$$M_{10} = A - I_{10} = 3725{,}7372 - 275{,}98 = 3449{,}757 \text{ DA.}$$

- الرصيد المتبقي في نهاية السنة العاشرة:

$$C_{10} = C_9 - M_{10} = 3449{,}762 - 3449{,}7572 = 0{,}0048 \text{ DA.}$$

وهذا الفرق البسيط ناتج عن عمليات التقريب خلال السنوات العشرة.

3- إعداد جدول استهلاك القرض:

الفترة	الرصيد بداية السنة	الفائدة كل سنة	القسط السنوي المتساوي	الاستهلاك من أصل القرض	الرصيد في نهاية كل سنة
1	25000	2000	3725,7372	1725,737	23274
2	23274,263	1861,941	3725,7372	1863,796	21410
3	21410,467	1712,837	3725,7372	2012,98	19397
4	19397,567	1551,81	3725,7372	2173,923	17223
5	17223,64	1377,89	3725,7372	2347,847	14875
6	14875,793	1190,063	3725,7372	2535,674	12340
7	12340,119	987,209	3725,7372	2738,528	9601
8	9601,591	768,127	3725,7372	2957,611	6643
9	6643,981	531,518	3725,7372	3194,219	3449
10	3449,762	275,98	3725,7372	3449,7572	0,0048

مثال 02: تحصلت مؤسسة على قرض يسدد بواسطة 05 دفعات ثابتة من أصل القرض والفوائد معا، بمعدل فائدة قدره 4%، قيمة الدفعة 475255,04دج، أولها تستحق بعد سنة من الإقتراض.

✓ قم بإعداد جدول استهلاك هذا القرض.

الحل:

إيجاد قيمة القرض:

$$C_0 = A\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = 475255{,}04\ \frac{1-(1{,}04)^{-5}}{0{,}04}$$

$C_o = 2115751$ DA.

✓ جدول استهلاك القرض:

الفترة	الرصيد في بداية الفترة	الفائدة I	القسط السنوي المتساوي (الدفعة) A	الاستهلاك أصل القرض M	الرصيد في نهاية كل فترة
1	2115751	84630,04	390625	475255,04	1725126
2	1725126	69005,04	406250	475255,04	1318876
3	1318876	52755,04	422500	475255,04	896376
4	896376	35855,04	439400	475255,04	456976
5	456976	18279,04	456976	475255,04	0

3.4.العلاقة بين الاستهلاكات:

من خلال المثالين السابقين (طريقة استهلاك القرض بدفعات متساويةمن الأصل والفوائد معا)، وعند إيجاد قيمة الاستهلاك من قيمة القرض لكل فترة، قمنا كخطوة أولى بحساب قيمة الفائدة عن الرصيد في بداية كل فترة، وبطرحها من قيمة القسط الدوري المتساوي (الدفعة) حصلنا على قيمة الاستهلاك من أصل القرض الخاص بتلك الفترة، فإذا أردنا إيجاد استهلاك السنة الأولى، نجد أولا قيمة الفائدة للسنة الأولى ونطرحها من القسط الدوري المتساوي، والذي يحتوي على جزء من الفائدة والجزء الآخر هو الجزء المستهلك من قيمة القرض، وتكرر هذه العملية في كل فترة لنجد الاستهلاك لكل فترة من الفترات اللاحقة، وواضح أن تكرار هذه العملية خلال مدة استهلاك القرض يحتاج لوقت وجهد وعمليات حسابية كثيرة مما قد يعرضنا للوقوع في الأخطاء.

وتسهيلا للعمليات الحسابية، يمكن إيجاد العلاقات بين الاستهلاكات عن السنوات المختلفة للقرض كما يلي:

يتكون أصل القرض (C_o) من مجموع الاستهلاكات، أي:

$$C_o = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + M_n$$

من بنود السنة الأولى لدينا:

$$I_1 = C_o \times t$$

$$M_1 = A - I_1$$

بتعويض علاقة M_1 نجد:

$$M_1 = A - (C_o \times t) \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

باستكمال حساب بنود السطر الثاني من جدول استهلاك القرض نجد:

$$C_1 = C_o - M_1$$

$$I_2 = (C_o - M_1) \times t$$

$$M_2 = A - I_2 = A - (C_o - M_1) \times t$$

$$M_2 = A - \overbrace{(C_o \times t)}^{I_1} + M_1 \times t$$

$$M_2 = A - I_1 + M_1 \times t$$

$$M_2 = M_1 + M_1 \times t$$

$$M_2 = M_1 (1 + t) \;..................(2)$$

من العلاقة (2) نستنتج أن: قيمة الاستهلاك الثاني = قيمة الاستهلاك الأول×(1+t)، أي هي جملة الاستهلاك الأول لفترة زمنية واحدة.

وكذلك يمكن إيجاد:

$$M_3 = M_2 (1 + t)$$

$$M_3 = M_1 (1 + t) (1 + t)$$

$$M_3 = M_1 (1 + t)^2 \;..................(3)$$

ونفس الشيء بالنسبة لاستهلاكات السنوات اللاحقة:

$$M_4 = M_3 (1 + t)$$

$$M_4 = M_1 (1 + t) (1 + t)$$

$$M_4 = M_1 (1 + t)^2 (1 + t)$$

$$M_4 = M_1 (1 + t)^3 \;..................(4)$$

من خلال ما سبق يمكن إيجاد قيمة أي استهلاك للفترات الزمنية اللاحقة حتى الفترة الأخيرة n، إما بدلالة الاستهلاك السابق مباشرة، فإذا رمزنا بـ M_i للاستهلاك المقابل لأي فترة زمنية، فإيجاده يتم باستخدام إحدى العلاقتين التاليتين:

$$M_i = M_{i-1}\,(1 + t)$$

- ✓ استهلاك فترة بدلالة الاستهلاك الأول:

$$M_i = M_1\,(1 + t)^{i-1}$$

ويمكن ايجاد جميع عناصر جدول الاستهلاك لأي قرض إذا عرفنا مقدار أي استهلاكين متتاليين وعدد الفترات الزمنية لهذا القرض.

وبالرجوع كذلك إلى العلاقة الخاصة بمجموع الاستهلاكات وأصل القرض $(C_o = \sum_{i=1}^{n} M_i)$ وربطها بالعلاقة التي توضح ارتباط استهلاك فترة معينة بالاستهلاك الأول، نجد كذلك أن للاستهلاك الأول علاقة بأصل القرض، ويمكن توضيح ذلك كما يلي:

$$C_o = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + M_n$$

$$C_o = M_1 + M_1\,(1 + t) + M_1\,(1 + t)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + M_1\,(1 + t)^{n-1}$$

وعليه فقيمة أصل القرض تمثل جملة دفعات لنهاية المدة للاستهلاك الأول، وبالتالي يمكن كتابتها بالشكل:

$$C_o = M_1\,\frac{(1 + t)^n - 1}{t}$$

مثال: اقترض شخص مبلغ ما من أحد البنوك على أن يسدد هذا القرض بخمسة أقساط متساوية من الأصل والفائدة معا، بدفعة أولى بعد سنة، فإذا علمت أن قيمة الاستهلاك الأول 864,807دج، والاستهلاك الثاني لنفس القرض هو 916,965دج.

المطلوب: إيجاد المعدل، قيمة القرض، والقسط السنوي المتساوي.

الحل:

- ✓ حساب معدل الفائدة:

$$M_2 = M_1\,(1 + t)$$

$$\frac{M_2}{M_1} = 1 + t$$

بالتعويض نجد:

$$\frac{916,965}{864,807} = 1 + t$$

$$1 + t = 1,06$$

$$t = 0,06 = 6\%$$

✓ حساب قيمة القرض:

- الطريقة 01:

$$C_o = M_1 \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

$$= 864,807 \frac{1,06^5 - 1}{0,06}$$

$$C_o = 864,807 \times 5,63709296 = 4875 \text{ DA.}$$

- الطريقة 02:

$$C_o = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5$$

ومنه:

$$M_3 = M_1 (1,06)^2 = 864,807 \times 1,06^2 = 971,983 \text{ DA.}$$

$$M_4 = M_1 (1,06)^3 = 864,807 \times 1,06^3 = 1030,30 \text{ DA.}$$

$$M_5 = M_1 (1,06)^4 = 864,807 \times 1,06^4 = 1092,118 \text{ DA.}$$

$$C_o = 864,807 + 914965 + 971,983 + 1030,30 + 1092,118$$

$$C_o = 4876 \text{ DA.}$$

✓ حساب قيمة القسط السنوي المتساوي:

$$A = C_o \frac{t}{1-(1+t)^{-n}} = 4876 \frac{0,06}{1-1,06^{-5}}$$

$$= 4876 \times 0,2373964$$

$$A = 1157,54 \text{ DA.}$$

4.4. بعض العلاقات بين القرض والاستهلاك والقسط:

- ✓ الفرق بين فائدتين = الفرق استهلاكين

وهذا راجع لكون الفوائد المستحقة في نهاية كل فترة زمنية تتناقص قيمتها بصفة مستمرة في كل فترة زمنية عن سابقتها، في حين تزداد قيمة الجزء المخصص لاستهلاك أصل القرض بصفة مستمرة في كل فترة عن سابقتها خلال نفس مدة استهلاك هذا القرض.

- يمكن ايجاد قيمة معدل الفائدة إذا علمنا فائدة الفترة الأخيرة وفائدة الفترة ما قبل الأخيرة، وذلك كما يلي:

$$\boxed{(1+t) = \frac{I_n}{I_{n-1} - I_n}}$$

- في الفترة الأخيرة من جدول استهلاك القرض، يتساوى الاستهلاك مع الرصيد المتبقي في بداية الفترة الأخيرة، وبالتالي يمكن حساب فائدة الفترة الأخيرة بضرب الاستهلاك الأخير في المعدل:

$$\boxed{I_n = M_n \times t}$$

من جهة أخرى:

القسط المتساوي (الدفعة) A= الاستهلاك (الفترة الأخيرة) + الفائدة (الفترة الأخيرة)

$$A = M_n + I_n$$

بتعويض I_n بقيمتها نجد:

$$A = M_n + M_n \times t$$

$$\boxed{A = M_n\,(1+t)}$$

من جهة أخرى كذلك فقد سبق وتم ايضاح العلاقة بين الاستهلاك الأول والاستهلاك الأخير:

$$M_n = M_1\,(1+t)^{n-1}$$

بتعويض M_n بقيمتها في العلاقة $A = M_n\,(1+t)$ نجد:

$$A = [M_1\,(1+t)^{n-1}]\,(1+t)$$

$$A = M_1 (1 + t)^n$$

مثال: بمعاينة جدول استهلاك قرض على 04 أقساط متساوي من الأصل والفوائد معا، بمعدل فائدة 6%، وجد أن قيمة الاستهلاك الأول هي: 125000دج.

المطلوب:

1- ايجاد قيمة الدفعة.

2- ايجاد الفائدة الأولى.

3- ايجاد قيمة القرض.

الحل:

1- قيمة الدفعة (القسط المتساوي):

$$A = M_1 (1 + t)^n = 125000(1,06)^4$$

$$A = 157809,62 \text{ DA.}$$

2- قيمة الفائدة الأولى:

$$I_1 = A - M_1 = 157809,62 - 125000$$

$$I_1 = 32809,62 \text{ DA.}$$

3- قيمة القرض:

$$C_o = A \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = 157809,62 \frac{1-(1,06)^{-4}}{0,06}$$

$$C_o = 546827 \text{ DA.}$$

ملاحظة: فائدة السنة الأولى تحسب بالعلاقة:

$$I_1 = C_o \times t$$

ومنه:

$$\boxed{C_o = \frac{I_1}{t}}$$

بالتعويض في المثال نجد:

$$C_o = \frac{32809,62}{0,06} = 546827 \text{ DA.}$$

مثال 02: بمعاينة جدول استهلاك قرض يسدد على n دفعات سنوية متساوية من الأصل والفائدة معا بمعدل فائدة مركبة 8%، وجد أن : الفائدة الأولى هي: 90122,24دج، الفائدة الثانية هي: 70122,25دج.

المطلوب:

1- إيجاد قيمة الاستهلاك الأول.
2- إيجاد قيمة القسط المتساوي.
3- إيجاد عدد الأقساط.

الحل:

1- قيمة الاستهلاك الأول:

$$I_1 - I_2 = M_2 - M_1$$

$$90122,24 - 70122,24 = M_1 (1 + t) - M_1$$

$$2000 = M_1 [1 + t - 1]$$

$$M_1 = \frac{2000}{0,08} = 250000 \text{ DA.}$$

2- القسط المتساوي (الدفعة):

$$A = M_1 + I_1$$

$$= 250000 + 90122,24$$

$$A = 340122,24 \text{ DA.}$$

3- عدد الأقساط:

$$A = M_1 (1 + t)^n$$

$$\frac{A}{M_1} = (1 + t)^n$$

$$\text{Log}\left(\frac{A}{M_1}\right) = n \log (1 + t)$$

$$\text{Log}\left(\frac{A}{M_1}\right) = n \log(1+t)$$

$$n = \frac{\log(\frac{A}{M_1})}{\log(1+t)} = \frac{\log(\frac{340122,24}{250000})}{\log(1,08)}$$

$n = 4$ أقساط.

معايير اختيار الإستثمارات:

الفصل الخامس

هدف الفصل	✓ معرفة المقصود بالتدفقات النقدية الداخلة والخارجة للمشروع. ✓ تقييم واختيار المشاريع الاستثمارية باستخدام معيار صافي القيمة الحالية VAN. ✓ تقييم واختيار المشاريع الاستثمارية باستخدام معيار معدل العائد الداخلي TRI. ✓ حساب وفهم مؤشر الربحية IP. ✓ معرفة معايير المقارنة بين مشروعين استثماريين. ✓ المقارنة بين مشروعين استثماريين باستخدام مختلف معايير اختيار الاستثمارات.
خطة الفصل	1.5.مفهوم التدفق النقدي و مكوناته: 4.5.معيار القيمة الحالية: La Valeur Actuelle Nette (VAN 3.5. معيار العائد الداخلي: (Le Taux de Rentabilité Interne (TRI 4.5.الاختيار بين مشروعين استثماريين متبادلين: 5.5.معيار مؤشر الربحية (IP) L'Indice de Profitabilité:

1.5. مفهوم التدفق النقدي و مكوناته:

1.1.5. مفهوم التدفق النقدي:

يعرف التدفق النقدي بأنه حركة النقود من وإلى المشروع، فالتدفقات النقدية من المشروع تسمى بالتدفقات النقدية الخارجة، أما التدفقات النقدية إلى المشروع فتسمى بالتدفقات النقدية الداخلة، ومن أجل القيام بعملية التقييم المالي للمشاريع الاستثمارية يتم الإعتماد على جدول التدفقات القائم على المقارنة بين المدفوعات النقدية و المقبوضات النقدية بدلا من الاعتماد على المنظور المحاسبي القائم على فكرة مبدأ الاستحقاق من خلال المقارنة بين الإيرادات والتكاليف، ويهتم جدول التدفقات النقدية بالحركة النقدية التي تتكون من التدفقات النقدية الخارجة (المدفوعات) والتدفقات النقدية الداخلة (المقبوضات) و المقارنة بين هذين النوعين من التدفقات يقودنا إلى مفهوم أساسي وهو صافي التدفقات النقدية والذي يعبر عن الفرق بين المدخلات والمخرجات النقدية للمشروع سواء خلال فترة الإنشاء و التجهيز أو خلال العمر الإنتاجي المتوقع.

2.1.5. مكونات التدفقات النقدية:

أ. **التدفقات النقدية الداخلة:** وتتكون من العناصر التالية :

الإيرادات السنوية المحصلة : وتتمثل خاصة في المبيعات السنوية المتوقعة للمشروع خلال عمره الإنتاجي، والتي تكون محل تحصيل.

قيمة رأس المال العامل في نهاية العمر الإنتاجي المتوقع: ويتضمن قيمة المخزون المتبقي.

قيمة المتبقي من الأصول : ويشمل قيمة الأصول المتبقية في نهاية العمر الإنتاجي المتوقع.

القروض والإعانات: من الهيئات المختصة أو الدولة.

ب. التدفقات النقدية الخارجة:

- **التكاليف الاستثمارية**

يمكن تحديد نطاق التكاليف الاستثمارية في دراسات الجدوى بتلك التكاليف اللازمة لإقامة وتجهيز المشروع حتى يصبح معدًا للبدء في التشغيل، وبالتالي تمثل عناصر التكاليف الاستثمارية في تلك العناصر التي تنفق خلال الفترة من لحظة ظهور فكرة المشروع وإعداد الدراسات الخاصة به حتى إجراء تجارب تشغيله، وتشمل هذه التكاليف ما يلي:

- تكاليف شراء والحصول على الأصول الثابتة وتركيبها، ومن أمثلتها تكاليف شراء الآلات والمعدات ونقلها وتركيبها في الموقع، وشراء أرض المشروع وإقامة المباني عليها وتجهيزها...الخ.

– رأس المال العامل، ويشمل:

- ✓ المخزون من المواد الخام اللازمة لدورة إنتاجية كاملة، ويتضمن مخزون المواد الأولية الرئيسية والمساعدة والوقود وقطع الغيار والمهمات ومواد الصيانة ومواد التعبئة والتغليف.
- ✓ النقدية السائلة التي تكفي لمقابلة مصروفات مثل الأجور والمرتبات والعناصر الأخرى للمصروفات الصناعية والتسويقية والإدارية والمالية الأخرى.

– مصروفات التأسيس وتتضمن :تكلفة تكوين الشركة، وتكلفة الدراسات التمهيدية والتفصيلية والأتعاب القانونية، ومصروفات انتقال وسفر وتدريب العاملين الذين سيوكل إليهم تشغيل المشروع بعد إقامته، بالإضافة إلى مصروفات تجارب تحت التشغيل...الخ.

- **تكاليف التشغيل السنوية**

تعتبر عملية تحديد عناصر التكاليف الخاصة بالتشغيل خلال السنة الأولى التي يصل فيها النشاط الإنتاجي إلى مستوى الطاقة الكاملة أساسًا لقياس مدى ربحية المشروع، وتتمثل تكاليف التشغيل السنوية في التكلفة الصناعية للإنتاج وأيضًا التكلفة التسويقية والإدارية، ويتعين على القائمين بدراسة وتحليل هذا الجزء أن يبرزوا ويوضحوا الأنواع التالية من التكاليف في إطار تحليلهم:

– التكاليف الثابتة والتكاليف المتغيرة: إن أساس هذا التمييز الذي يفصل بين التكاليف الثابتة والمتغيرة هو أنه ليس لها علاقة بتغيير حجم الإنتاج وبين التكاليف التي تغير ذلك الحجم.

– التكاليف التي تكون ثابتة طالما أن النشاط الإنتاجي مستمر ولكن يمكن تجنبها لو أن هذا النشاط توقف، مثل ذلك مرتبات الموظفين الذين يقومون بعملية الإشراف.

– التكاليف التي تستمر حتى لو توقف الإنتاج ولكن يمكن تجنبها لو تم تصفية المشروع، مثال ذلك مرتبات الحراس.

– التكاليف التي لا يمكن تجنبها حتى لو تم تصفية المشروع وتم بيع أصوله، مثال ذلك استهلاك الآلات والمعدات خصوصًا التي لا يكون لها قيمة سوقية.

– التكاليف التي لا تكون مترتبة على الإنتاج ولكنها تكون خاضعة لتصرف الإدارة، مثال ذلك مصاريف الإعلان والأبحاث وأتعاب المستشارين والقانونين.

– التكاليف المضافة، وهي تلك التكاليف المترتبة على قرار معين، مثل القرار الخاص باستخدام آلة عدد من الساعات الإضافية، يترتب عليه تكاليف إضافية تتمثل في الوقود اللازم لإدارة هذه الآلة وتكاليف إهلاكها نتيجة لتشغيلها هذا العدد الإضافي من الساعات.

إن الفرق بين التدفقات النقدية الداخلة للمشروع و التدفقات النقدية الخارجة من المشروع خلال كل سنة من سنوات العمر المتوقع لحياة المشروع يعرف بصافي التدفقات النقدية.

2.5. معيار القيمة الحالية: La Valeur Actuelle Nette (VAN)

يعرف معيار صافي القيمة الحالية بأنه عبارة عن الفرق بين القيمة الحالية للدفعات النقدية التي ستحقق على مدى عمر المشروع، وبين قيمة الاستثمار للمشروع، وهذا يعني أن كل التدفقات النقدية السنوية تخصم إلى النقطة صفر (بدء تنفيد المشروع)، أو بعبارة أخرى الفرق بين القيمة الحالية للتدفقات النقدية الداخلة والتدفقات النقدية الخارجة للمشروع.

لحساب صافي القيمة الحالية لابد من وجود معدل خصم (تكلفة رأس المال) يتم على أساسه خصم التدفقات النقدية المرتبطة بالاستثمار، أو يجب أن يعكس هذا المعدل ما يلي:

- ✓ معدل تكلفة الحصول على الأموال المستثمرة.
- ✓ الحد الأدنى لمعدل العائد الذي يرغب المستثمر في الحصول عليه.

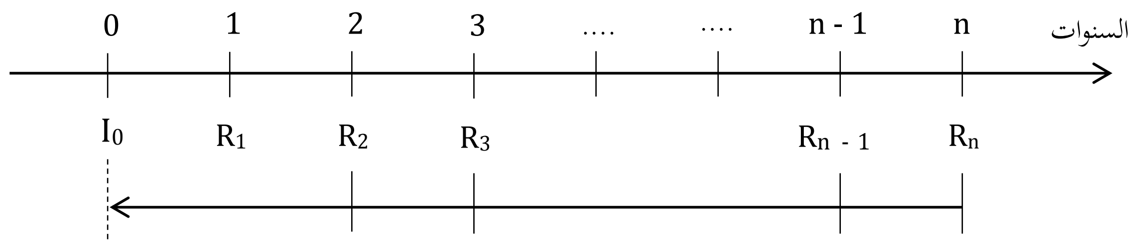
إذا رمزنا إلى:

- ✓ التكاليف الاستثمارية في السنة صفر: I_0.
- ✓ صافي التدفق النقدي السنوي الخاص بالسنة i: R_i.
- ✓ معدل الإنتاجي للمشروع: n.

ومنه لحساب صافي القيمة الحالية لأي مشروع استثماري يتم ضرب صافي التدفق النقدي السنوي في معامل الخصم السنوي المقابل له، لنحصل على القيم الحالية للتدفقات النقدية السنوية، ثم نطرح مجموعها من قيمة الاستثمار المبدئي (التكاليف الاستثمارية في السنة صفر) لنحصل على صافي القيمة الحالية للمشروع الاستثماري.

أي:

صافي القيمة الحالية = القيمة الحالية للتدفقات النقدية الداخلة – القيمة الحالية للتدفقات النقدية الخارجة



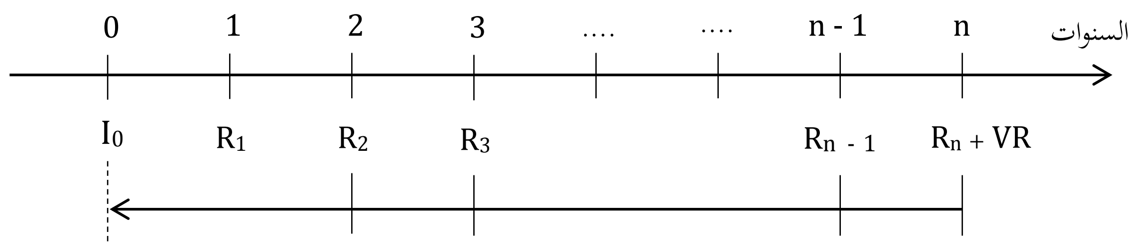
ولحساب صافي القيمة الحالية رياضيا:

$$VAN = \left(\frac{R_1}{1+t} + \frac{R_2}{(1+t)^2} + \frac{R_3}{(1+t)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{R_{n-1}}{(1+t)^{n-1}} + \frac{R_n}{(1+t)^n}\right) - I_o$$

ونكتب:

$$\boxed{VAN = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{(1+t)^i} - I_o}$$

في حالة وجود القيمة المتبقية للقيمة المتبقية للاستثمار عند نهاية الفترة يمكن حساب صافي القيمة الحالية كما يلي:



$$VAN = \left(\frac{R_1}{1+t} + \frac{R_2}{(1+t)^2} + \frac{R_3}{(1+t)^3} + \ldots\ldots \frac{R_{n-1}}{(1+t)^{n-1}} + \frac{R_n}{(1+t)^n} + \frac{VR}{(1+t)^n}\right) - I_o$$

$$\boxed{VAN = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{(1+t)^i} + \frac{VR}{(1+t)^n} - I_o}$$

حيث: VR هي القيمة المتبقية للاستثمار*.

* القيمة المتبقية للاستثمار تعتبر كإيراد يضاف في السنة الأخيرة من سنوات عمر المشروع الاستثماري و بالتالي فهي تؤثر على التدفقات النقدية

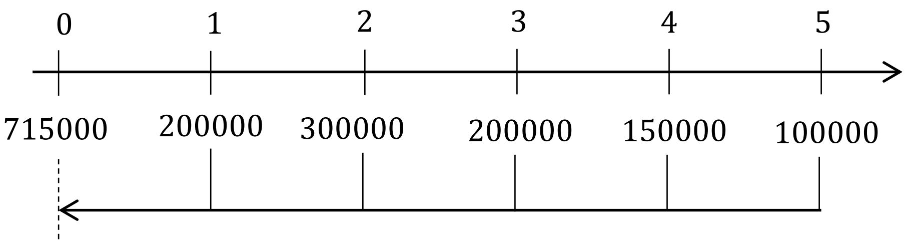
3. قاعدة القرار:

- ✓ إذا كانت صافي القيمة الحالية أكبر من الصفر $(VAN > 0)$، فذلك يعني أن التدفقات النقدية الداخلة أكبر من التكلفة الاستثمارية، وعليه يقبل المشروع.
- ✓ إذا كانت صافي القيمة الحالية أصغر من الصفر $(VAN < 0)$، فذلك يعني أن التدفقات النقدية الداخلة أصغر من التكلفة الاستثمارية، وعليه يرفض المشروع.
- ✓ إذا كانت صافي القيمة الحالية تساوي الصفر $(VAN = 0)$، فذلك يعني أن التدفقات النقدية الداخلة تساوي التكلفة الاستثمارية، وهذا يمثل الحد الأدنى لقبول المشروع.

يمكن المفاضلة بين عدة مشاريع مقبولة بإيجاد صافي القيمة الحالية لكل مشروع، ثم ترتيب المشروعات تنازليا وفق القيم المحتسبة، ثم اختيار المشروع ذو القيمة الأكبر (أعلى قيمة موجبة لصافي القيمة الحالية) وهذا في حالة المشروعات التبادلية، أما في حالة المشروعات الاستثمارية المستقلة فتكون القاعدة قبول جميع المشروعات التي تكون صافي قيمتها الحالية موجبة ورفض المشروعات الأخرى.

مثال: قدرت تكلفة مشروع استثماري (شراء آلة) 715000دج، و قد قدرت ايراداته السنوية المتوقعة خلال 5 سنوات على التوالي: 200000دج، 300000دج، 200000دج، 150000دج، 100000دج. فهل يقبل المستثمر هذا الاستثمار أو يرفضه إذا علمت أن معدل الفائدة السائد في السوق هو 12% سنويا؟

الحل:



$I_0 = 715000$ DA.

$R_1 = 200000$ DA.

$R_2 = 300000$ DA.

$R_3 = 400000$ DA.

$R_4 = 150000$ DA.

$R_5 = 100000$ DA.

$$VAN = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{(1+t)^i} - I_0$$

$$= \left(\frac{200000}{1,12} + \frac{300000}{1,12^2} + \frac{200000}{1,12^3} + \frac{150000}{1,12^4} + \frac{100000}{1,12^5}\right) - 715000$$

$$VAN = -2844,51 \text{ DA.}$$

كما يمكن استعمال الجدول التالي لحل المثال:

السنوات	0	1	2	3	4	5
التدفقات النقدية	(715000)	200000	300000	200000	150000	100000
معامل الخصم $(1+t)^{-i}$	1	0,892857	0,797193	0,711780	0,635518	0,567427
القيم الحالية للتدفقات النقدية	(715000)	178571,4	239157,9	142356	95327,7	56742,7
VAN	2844,51 - دج					

القرار: رفض المشروع لأنه يحقق صافي قيمة حالية سالبة.

- **صافي القيمة الحالية في حالة التدفقات النقدية المتساوية:** في هذه الحالة تكون أمام مشروع استثماري تدفقاته النقدية منتظمة ومتكافئة أي أن:

$$R_1 = R_2 = R_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots R_{n-1} = R_n = R$$

يمكن كتابة العلاقة الرياضية لصافي القيمة الحالية بالشكل:

$$VAN = \left(\frac{R}{1+t} + \frac{R}{(1+t)^2} + \frac{R}{(1+t)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{R}{(1+t)^{n-1}} + \frac{R}{(1+t)^n}\right) - I_o$$

بالاستناد إلى فكرة القيمة الحالية للدفعات، حيث يتم خصم صافي التدفقات النقدية السنوية المتساوية للسنة صفر، وعليه تحسب صافي القيمة الحالية بالإعتماد على الصيغة التالية:

$$VAN = R\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} - I_o$$

في حالة وجود القيمة المتبقية للاستثمار عند نهاية الفترة، فالعلاقة تصبح بالشكل:

$$VAN = \left(\frac{R}{1+t} + \frac{R}{(1+t)^2} + \frac{R}{(1+t)^3} + \ldots\ldots \frac{R}{(1+t)^{n-1}} + \frac{R}{(1+t)^n} + \frac{VR}{(1+t)^n}\right) - I_o$$

$$VAN = R\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t} + \frac{VR}{(1+t)^n} - I_o$$

مثال: قدرت تكلفة مشروع استثماري مبلغ 200000دج، في حين أنه سيحقق ايرادات متوقعة قدرها 30000دج سنويا على مدار 25 سنة من حياته المقدرة، كما أن القيمة الباقية لأصول المشروع في نهاية مدة حياته تساوي صفر. فهل يقبل المستثمر المشروع أو يرفضه إذا علمت أن معدل الفائدة السائد في السوق هو 10% سنويا.

الحل:

- القيمة الحالية للتدفقات النقدية الداخلة:

$$VA = R\ \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} = 3000\ \frac{1-(1,1)^{-25}}{0,1}$$

$$VA = 3000 \times 9,07704 = 272311,2 \text{ DA.}$$

- القيمة الحالية للتدفقات النقدية الخارجة = 200000 دج.

صافي القيمة الحالية = صافي القيمة الحالية للتدفقات النقدية الداخلة — القيمة الحالية للتدفقات النقدية الخارجة.

$$VAN = R\ \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} - I_o$$

$$VAN = 272311,2 - 200000 = 72311,2 \text{ DA.}$$

القرار: قبول المشروع لأنه يحقق صافي قيمة حالية موجبة.

3.5. معيار العائد الداخلي: Le Taux de Rentabilité Interne (TRI)

يعرف معدل العائد الداخلي بأنه سعر الخصم الذي تكون عنده نسبة العوائد الحالية إلى التكاليف الحالية للمشروع مساوية للواحد الصحيح، أو بمعنى آخر هو سعر الخصم الذي يجعل القيمة الحالية الصافية للمشروع مساويا للصفر.

كما يعرف بأنه المعدل الذي تتساوى عنده القيمة الحالية للتدفقات النقدية الداخلة مع القيمة الحالية للتدفقات النقدية الخارجة للمشروع الاستثماري.

يختلف هذا المعيار عن المعيار السابق في أن معدل الخصم هنا يكون مجهولا، والمطلوب معرفة قيمة ذلك المعدل الذي يجعل القيمة الحالية الصافية تساوي الصفر.

من خلال التعريف السابق لمعدل العائد الداخلي، يمكن التعبير عنه من خلال المعادلة التالية:

$$VAN = 0$$

$$VAN = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{(1+t)^i} - I_o$$

$$VAN = \frac{R_1}{(1+TRI)} + \frac{R_2}{(1+TRI)^2} + \frac{R_3}{(1+TRI)^3} + \dots \frac{R_{n-1}}{(1+TRI)^{n-1}} + \frac{R_n}{(1+TRI)^n} - I_o = 0$$

حيث:

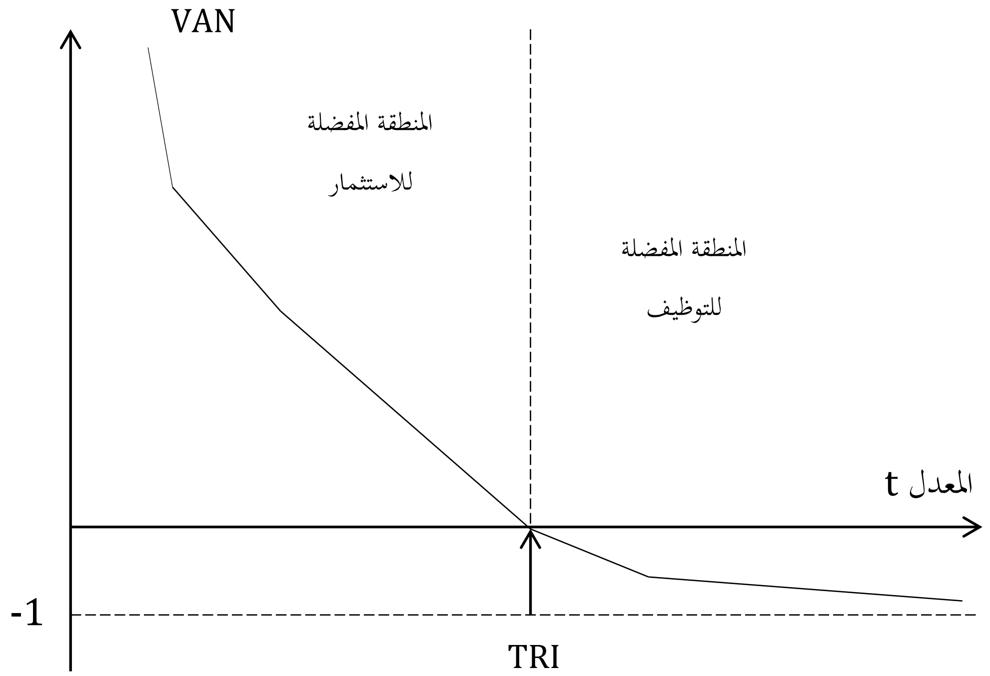
R_i: صافي التدفقات النقدية.

I_o: قيمة الاستثمار المبدئي.

n: عمر المشروع.

TRI: معدل العائد الداخلي.

إذا كانت القيم R_1، R_2 .... ،. R_n موجبة، فالمنحنى الذي يمثل صافي القيمة الحالية بمعدل فائدة t، يرسم كما يلي:



ملاحظة: كلما ارتفع معدل الفائدة t، كلما أصبح من الأفضل توظيف المبلغ المالي بدلا من استثماره.

من خلال المعادلة السابقة يتم البحث عن قيمة معدل العائد الداخلي ثم مقارنته مع معدل تكلفة الأموال (t) كما يلي:

- ✓ إذا كان $t < TRI$: يتم قبول المشروع، لأن $0 < VAN$.
- ✓ إذا كان $t > TRI$: يتم رفض المشروع، لأن $0 > VAN$.

يمكن تحديد معدل العائد باستخدام أسلوب التجربة والخطأ، والذي يقوم باستخدام معدلات خصم مقترحة وتطبيقها على الصيغة السابقة، فإذا تحقق شرط المعادلة – أي القيمة الحالية للتدفقات النقدية مطروحا منها التكاليف الاستثمارية تساوي الصفر– كان هذا هو معدل العائد الداخلي، وإذا كانت القيمة موجبة (أي $VAN > 0$) نحسب صافي القيمة الحالية مرة أخرى عند معدل خصم أعلى، وهكذا حتى نحصل على معدل الخصم الذي يحقق أقل قيمة موجبة لـ VAN، ومعدل الخصم الذي يحقق أقل قيمة سالبة لـ VAN، وبذلك يمكن الحصول على معدل العائد الداخلي الذي يقع بين هذين المعدلين، ولتحديد قيمة معدل العائد الداخلي نستعمل المعادلة التالية:

$$TRI = t_1 + \frac{(t_1 - t_2)\ VAN_1}{VAN_1 - VAN_2}$$

t_1: معدل الخصم الأصغر.

t_2: معدل الخصم الأكبر.

VAN_1: صافي القيمة الحالية عند معدل الخصم الأصغر.

VAN_2: صافي القيمة الحالية عند معدل الخصم الأكبر.

ووفقا لهذه الطريقة، وبعد الوصول إلى معدل العائد الداخلي، فالمشروع يعتبر مقبولا إذا كان معدل العائد الداخلي أعلى من معدل العائد المطلوب (معدل الفائدة أوتكلفة التمويل) وبالتالي:

- ✓ قبول جميع المشاريع الاستثمارية المستقلة التي تكون ذات معدل عائد داخلي أكبر من معدل المقارنة.
- ✓ إذا كانت المشروعات الاستثمارية تبادلية، فإنه يجب قبول المشروع ذو معدل العائد الداخلي الأعلى.

مثال 01: بافتراض أنه عند معدل الخصم 14,7% تكون صافي القيمة الحالية للمشروع 1,04، في حين إذا كان معدل الخصم 14,8%، فصافي القيمة الحالية لنفس المشروع هي 0,121-.

المطلوب: إيجاد معدل العائد الداخلي.

الحل:

$$TRI = t_1 + \frac{(t_1 - t_2)\ VAN_1}{VAN_1 - VAN_2} = 14{,}7 + \frac{(14{,}8 - 14{,}7) \times 1{,}04}{1{,}04 + 0{,}121}$$

$TRI = 14{,}79\ \%.$

مثال 02: توافرت لدينا البيانات التالية عند أحد المشروعات الاستثمارية:

السنوات	صافي التدفقات النقدية
1	60000
2	50000
3	40000
4	30000
5	20000

المطلوب:

- إيجاد معدل العائد الداخلي لهذا المشروع إذا علمت أن قيمة الاستثمار المبدئي هي: 130000دج، وأن سعر الفائدة السائد في السوق هو: 10%.
- هل يقبل المشروع من وجهة نظر المستثمر.

الحل:

نفترض عدة معدلات، ونوضح ذلك في الجدول الموالي:

السنوات	التدفقات النقدية	معدل العائد عند 15% $(1+0,15)^{-n}$	القيمة الحالية الصافية للتدفقات النقدية	معدل العائد عند 20% $(1+0,2)^{-n}$	القيمة الحالية الصافية للتدفقات النقدية	معدل العائد عند 25% $(1+0,25)^{-n}$	القيمة الحالية الصافية للتدفقات النقدية
1	60000	0,870	52200	0,833	49980	0,800	48000
2	50000	0,756	37800	0,694	43700	0,640	32000
3	40000	0,658	26300	0,576	23100	0,512	20500
4	30000	0,572	17200	0,483	14500	0,410	12300
5	20000	0,497	12400	0,392	7800	0,328	65600
صافي التدفقات النقدية VAN		/	13400	/	00	/	8500

يتضح من الجدول أن معدل العائد الداخلي (TRI) يبلغ 20%، حيث يتساوى مجموع القيم الحالية لصافي التدفقات النقدية مع قيمة الاستثمار المبدئي.

- بما أن $t < TRI$ ($20\% > 10\%$) فالمشروع له جدوي وربحية اقتصادية، وبالتالي القرار هو قبول المشروع.

مثال 03: مشروع قدرت تكلفته الأولية بـ 1000000دج، بحيث يتوقع أن يحقق تدفقات نقدية سنوية متساوية طيلة 8 سنوات قدرها 190000دج في السنة.

المطلوب:

1- أحسب معدل العائد الداخلي، إذا علمت أن سعر الفائدة السائد في السوق هو 10%.

2- هل يقبل المشروع من طرف المستثمر أم يرفض؟

الحل:

التدفقات النقدية السنوية متساوية، أي:

$$R_1 = R_2 = R_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots = R_8 = 190000 \text{ DA.}$$

1- معدل العائد الداخلي هو المعدل الذي يجعل صافي القيمة الحالية تساوي صفر، أي:

$$VAN = 0$$

$$R\ \frac{1-(1+t)^{-n}}{TRI} - I_o = 0$$

$$190000\ \frac{1-(1+TRI)^{-8}}{TRI} - 1000000 = 0$$

$$\frac{1-(1+TRI)^{-8}}{TRI} = \frac{1000000}{190000} = 5{,}263158$$ (نستعمل الجدول المالي رقم 04)

أو نكتب كذلك:

$$\frac{TRI}{1-(1+TRI)^{-8}} = \frac{190000}{1000000} = 0{,}19$$ (نستعمل الجدول المالي رقم 05)

باستخدام الجدول المالي رقم05، ومن السطر الثامن (08) نجد أن القيمة 0,19 محصورة بين القيمة 0,189153 التي تقابل معدل خصم 10,25%، أو القيمة 0,190869، التي تقابل معدل خصم 10,5 %، أي :

$$\frac{0{,}1025}{1-(1{,}1025)^{-8}} = 0{,}189153 \longrightarrow t = 10{,}25\ \%.$$

$$\frac{0{,}1025}{1-(1{,}1025)^{-8}} = 0{,}190869 \longrightarrow t = 10{,}5\ \%.$$

إذن معدل العائد الداخلي محصور بين المعدلين 10,25%، و10,5 %، و باستخدام طريقة الحصر نجد:

$$TRI = 10{,}25 + (10{,}5 - 10{,}25)\ \frac{0{,}19-0{,}189153}{0{,}190869-0{,}189153}$$

$$TRI = 10{,}25 + 0{,}12 = 10{,}37\%.$$

2- بما أن $TRI > t$ فالقرار هو قبول المشروع.

✓ **المقارنة بين معياري VANو TRI:**

يعتمد كل من المعيارين على مبدأ أساسي و هو خصم التدفقات النقدية الصافية للمشروع الاستثماري، و عند القيام بالمقارنة بين المعيارين نجد:

1- يتم تفضيل معيار VAN على معيار TRI في المشروعات التي تشهد تقلبات في الفوائد النقدية الصافية المتوقعة، حيث ينتج عن ذلك تعدد في معدلات العائد الداخلي يصعب الاختيار بينها.

2-عند تباين الانفاق الاستثماري فيما بين الفرص الاستثمارية المتاحة، فالاعتماد على معيار معدل العائد الداخلي يتطلب المزيد من العمليات الحسابية والتي يمكن الاستغناء عنها باتباع معيار صافي القيمة الحالية.

3-إذا م يحدد معدل الخصم أو معدل العائد المرغوب فيه، يفصل باستخدام معيار معدل العائد الداخلي.

ويمكن القول أن المعيارين مكملين لبعضهما البعض، فـ TRI يحدد معدل كفاءة الاستثمار في مشروع ما، و VAN يحدد حجم المكاسب الصافية المتوقع تحقيقها منه.

4.5. الاختيار بين مشروعين استثماريين متبادلين:

مثال: مؤسسة مترددة بين مشروعين استثماريين:

المشروع الأول تكلفته الاستثمارية المبدئية 800000دج، وتم تقدير التدفقات النقدية الداخلة المتولدة من المشروع سنويا خلال حياته المقدرة بـ 6 سنوات بمبلغ 192000دج.

المشروع الثاني تكلفته الاستثمارية المبدئية 1200000دج، وتم تقدير التدفقات النقدية الداخلة المتولدة من المشروع خلال حياته المقدرة بـ 6 سنوات بمبلغ 320000دج للثلاث سنوات الأولى، و 250000دج للثلاث سنوات المتبقية.

القيمة المتبقية للاستثمار في المشروعين تساوي صفر.

المطلوب:

1- تحديد المشروع الذي يحقق أكبر عائد باستخدام معيار صافي القيمة الحالية، معدل الخصم 11,25%.

2- المقارنة بين المشروعين باستخدام معيار المعدل الداخلي.

الحل:

1- باستخدام معيار صافي القيمة الحالية:

✓ صافي القيمة الحالية للمشروع الأول:

$$VAN_1 = R\ \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} - I_o$$

$$= 192000\ \frac{1-(1{,}1125)^{-6}}{0{,}1125} - 800000$$

$$VAN_1 = (192000 \times 4{,}200244) - 800000 = 6446{,}84 \text{ DA.}$$

✓ صافي القيمة الحالية للمشروع الثاني:

$$VAN_2 = 320000 \ \frac{1-(1{,}1125)^{-3}}{0{,}1125} + 250000 \frac{1-(1{,}1125)^{-3}}{0{,}1125} (1{,}1125)^{-3} - 1200000$$

$$= (320000 \times 2{,}433128) + (250000 \times 2{,}433128 \times 0{,}726273) - 1200000$$

$$VAN_2 = 20379{,}70 \text{ DA.}$$

إذن فالمشروعين يحققان صافي قيمة حالية موجبة، لكن المشروع الثاني صافي قيمته الحالية أكبر من صافي القيمة الحالية للمشروع الأول، وبالتالي فالقرار هو اختيار المشروع الثاني.

2- باستخدام معيار معدل العائد الداخلي:

✓ نرمز بـ: TRI_1 لمعدل العائد الداخلي للمشروع الأول (نعلم أن TRI_1 يكون أكبر من 11,25%، لأن صافي القيمة الحالية التي تم حسابها كانت موجبة).

$$R \ \frac{1-(1+TRI_1)^{-n}}{TRI_1} - I_o = 0$$

$$192000 \ \frac{1-(1+TRI_1)^{-6}}{TRI_1} - 800000 = 0$$

$$\frac{1-(1+TRI_1)^{-6}}{TRI_1} = \frac{800000}{192000} = 4{,}166666$$ الجدول المالي رقم 04

أو نكتب كذلك:

$$\frac{TRI_1}{1-(1+TRI_1)^{-6}} = \frac{192000}{800000} = 0{,}24$$ الجدول المالي رقم 05

من الجدول المالي رقم 05، في السطر رقم 06 نجد أن القيمة 0,24 محصورة بين القيمة 0,239791 التي تقابل معدل خصم 11,5%، والقيمة 0,241506 التي تقابل معدل خصم 11,75%، أي:

$$\frac{0{,}115}{1-(1{,}115)^{-6}} = 0{,}239791$$

$$\frac{0{,}1175}{1-(1{,}1175)^{-6}} = 0{,}241506$$

وبالتالي معدل العائد الداخلي للمشروع الأول محصور بين المعدلين 11,5%، و 11,75%، وباستخدام طريقة الحصر نجد:

$$TRI_1 = 11,5 + (11,75 - 11,5)\,\frac{0,24-0,239791}{0,241506-0,239791}$$

$$TRI_1 = 11,5 + 0,03 = 11,53\%.$$

✓ نرمز بـ : TRI_2 لمعدل العائد الداخلي للمشروع الثاني (هذا المعدل أكبر من 11,75%، ومن المحتمل كذلك أن يكون أكبر من TRI_1 ، لأن صافي القيمة الحالية للمشروع الثاني أكبر من صافي القيمة الحالية للمشروع الأول).

$$R_1\,\frac{1-(1+TRI_2)^{-3}}{TRI_2} + R_2\,\frac{1-(1+TRI_2)^{-3}}{TRI_2}\,(1+TRI_2)^{-3} - I_o = 0$$

$$\frac{1-(1+TRI_2)^{-3}}{TRI_2}\,[320000 + 250000\,(1+TRI_2)^{-3}] - 1200000 = 0$$

لإيجاد TRI_2 نفترض عدة معدلات:

- الافتراض الأول: معدل الخصم 11,5%:

$$VAN_2 = \frac{1-(1,115)^{-3}}{0,115}\,[320000 + 250000\,(1,115)^{-3}] - 1200000$$

$$= 12156,865 \text{ DA.}$$

- الافتراض الثاني: معدل الخصم 11,75%:

$$VAN_2 = \frac{1-(1,1175)^{-3}}{0,1175}\,[320000 + 250000\,(1,1175)^{-3}] - 1200000$$

$$= 4023,8 \text{ DA.}$$

- الافتراض الثالث: معدل الخصم 12%:

$$VAN_2 = \frac{1-(1,12)^{-3}}{0,12}\,[320000 + 250000\,(1,12)^{-3}] - 1200000$$

$$= -4020,10 \text{ DA.}$$

بما أن القيمة الحالية الصافية موجبة عند معدل 11,75% (أقل قيمة موجبة)، وسالبة عند معدل 12% (أقل قيمة سالبة)، فهذا يشير إلى أن معدل العائد الداخلي الذي يساوي بين قيمة الاستثمار المبدئي والتدفقات النقدية السنوية الداخلة يقع بين المعدلين 11,75% و 12%.

$$\mathrm{TRI_2} = \mathrm{t_1} + \frac{(\mathrm{t_2} - \mathrm{t_1})\ \mathrm{VAN_1}}{\mathrm{VAN_1} - \mathrm{VAN_2}} = 11{,}75 + \frac{(12 - 11{,}75) \times 4023{,}8}{4023{,}8 - 4020{,}10}$$

$$\mathrm{TRI_2} = 11{,}75 + \frac{1005{,}95}{8043{,}9}$$

$$\mathrm{TRI_2} = 11{,}75 + 0{,}125 = 11{,}87\%.$$

إذن هذه المرة كذلك تختار المؤسسة المشروع الثاني لأن: $\mathrm{TRI_2} > \mathrm{TRI_1}$.

5.5. معيار مؤشر الربحية (IP) L’Indice de Profitabilité:

يسمى كذلك معيار العائد/التكلفة، وهو أحد المعايير المستخدمة في دراسة قرارات اختيار وتقييم المشروعات الاستثمارية، حيث يعرف بأنه المعيار الذي يقيس قدرة المشروع الاستثماري على تحقيق الأرباح، فهو عبارة عن نسبة صافي القيمة الحالية للتدفقات النقدية إلى التكاليف الاستثمارية، ويعبر عنه بالعلاقة:

$$\mathbf{IP} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_i\ (1+\mathbf{t})^{-i} - \mathbf{I_0}}{\mathbf{I_0}}$$

$$\boxed{\mathbf{IP} = \frac{\mathbf{VAN}}{\mathbf{I_0}}}$$

يستخدم هذا المعيار كمكمل لمعيار صافي القيمة الحالية، ويتم وفق هذه الطريقة قبول المشروع الذي يكون مؤشر ربحيته أكبر من الصفر، فيما يتم رفضه إذا كان مؤشر ربحيته أقل من الصفر، وعند المفاضلة بين المشاريع، يتم اختيار المشروع الذي يكون مؤشر ربحيته أكبر من مؤشرات باقي المشاريع.

مثال: انطلاقا من المثال السابق يمكن عكس حساب مؤشر الربحية للمشروعين كما يلي:

- ✓ المشروع الأول:

$$\mathrm{IP_1} = \frac{\mathrm{VAN_1}}{\mathrm{I_0}} = \frac{6446{,}84}{800000} = 0{,}008$$

✓ المشروع الثاني:

$$IP_2 = \frac{VAN_2}{I_0} = \frac{20379,7}{1200000} = 0,017$$

بما أن: $IP_2 > IP_1$ فالقرار سيكون باختيار المشروع الثاني.

ملاحظة: القيمة المحققة من حساب مؤشر الربحية تعبر عن ما تحققه الوحدة النقدية المستثمرة عن عائد صافي أو قيمة حالية.

✓ **حساب مؤشر الربحية بطريقة العائد الإجمالي/التكلفة:** تعتبر هذه الطريقة الأوسع انتشارا عند حساب مؤشر الربحية، فهو عبارة عن نسبة القيمة الحالية للتدفقات النقدية إلى التكاليف الإستثمارية، والفرق بين الطريقة السابقة لحساب مؤشر الربحية وهذه الطريقة يتمثل في أن هذه الأخيرة تحدد العائد الإجمالي للوحدة النقدية المستثمرة، في حين تحدد الطريقة الأولى العائد الصافي للوحدة النقدية المستثمرة، ويتم حساب دليل الربحية وفق هذه الطريقة كالآتي:

$$\boxed{\mathbf{IP} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_{\boldsymbol{i}}(\mathbf{1}+\boldsymbol{t})^{-\boldsymbol{i}}}{\mathbf{I_o}}}$$

ويتم قبول المشروع وفقا لهذه النسبة إذا كانت أكبر أو تساوي الواحد، في حين يتم رفض المشروع إذا كانت هذه النسبة أقل من الواحد.

مثال: انطلاقا من المثال السابق يمكن حساب مؤشر دليل الربحية بطريقة العائد الإجمالي/التكلفة كما يلي:

✓ المشروع الأول:

$$IP_1 = \frac{R\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}}{I_o} = \frac{192000\,\frac{1-1.1125^{-6}}{0.1125}}{800000} = \frac{806446.848}{800000}$$

$$IP_1 = 1,008.$$

✓ المشروع الثاني:

$$IP_2 = \frac{320000\,\frac{1-1,1125^{-3}}{0,1125} + 250000\frac{1-1,1125^{-3}}{0,1125}(1,1125)^{-3}}{1200000}$$

$$= \frac{778600,96 + 441778,792986}{1200000} = \frac{1220379,752986}{1200000}$$

$IP_2 = 1,017.$

القرار: بما أن $IP_2 > IP_1$ وقيمته أكبر من الواحد، فالقرار هو قبول المشروع الثاني.

ملاحظة: تطبيق معيار دليل الربحية في حالة تساوي التكاليف الإستثمارية للمشروعات الإستثمارية سوف يؤدي إلى نفس النتائج المحسوبة وفق معيار صافي القيمة الحالية، لذى يفضل استخدام هذا المعيار في حالات اختلاف التكاليف الإستثمارية للمشاريع محل المقارنة، وهذا حتى يتسنى تجنب النتائج الغير دقيقة لمعيار صافي القيمة الحالية.

قائمة المراجع

1. باديس بوغرة، المدخل إلى الرياضيات المالية وتطبيقاتها، دار الهدى للطباعة والنشر والتوزيع، عين مليلة، 2013.
2. بولعيد بعلوج، مدخل إلى الرياضيات المالية، منشورات جامعة منتوري قسنطينة، الجزائر، 2003.
3. حمود رابحي، الرياضيات المالية، نوميديا للطباعة والنشر والتوزيع، قسنطينة، 2010.
4. خالد أحمد المشهداني؛ عباس خضير الحنابي، الرياضيات المالية، دار الأيام للنشر والتوزيع، عمان، 2013.
5. شقيري نوري موسى؛ وليد أحمد صافي؛ محمود إبراهيم نور، الرياضيات المالية، الطبعة الأولى، دار المسير للنشر والتوزيع والطباعة، عمان، 2009.
6. صالح محمد الحناوي: دراسات جدوى المشروع الأساسيات والمفاهيم، دار الجامعة، الإسكندرية،2001.
7. غازي فلاح المومني، الرياضيات المالية المعاصرة، الطبعة الأولى، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان، 2006.
8. ناصر دادي عدون، الرياضيات المالية، دار المحمدية العامة، الجزائر، 1997.
9. يحي عبد الغاني أبو الفتوح: أسس وإجراءات دراسات جدوى المشروعات، دار الجامعة الجديدة، الإسكندرية، 2003.
10. Benjamin Lergos, Mini Manuel de Mathématiques Financières, Dunod, Paris, 2011.
11. Walder Masiéri, Mathématiques Financières, Dalloz, Paris, 2001.