# GEOMETRIE DES MASSES

## Objectifs du chapitre

Afin de comprendre et de pouvoir décrire les mouvements des systèmes matériels, il est important de connaître la répartition géométrique afin de se préparer aux concepts de cinétiques et dynamiques des solides.

L'intérêt de cette partie est de nous permettre de connaître un certain nombre de données sur la répartition des masses des systèmes. Nous, nous intéresserons à la détermination :

- des centres de masse du solide
- des moments d'inertie, des produits d'inertie par rapport à des axes et aux tenseurs d'inertie des solides quelconques dans différents repères.

L'opérateur d'inertie sert à caractériser la répartition des masses d'un solide, afin d'étudier par la suite, un mouvement quelconque de celui-ci.

## 1. Notions de masse d'un système matériel

A chaque système matériel (S) est associé, une quantité scalaire positive invariable en mécanique classique, appelée : **masse du système**

La masse d'un solide fait référence à la quantité de matière contenue dans le volume de ce solide.

Cet invariant scalaire obéit aux propriétés mathématiques suivantes :

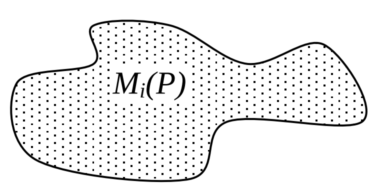
### Aditivité des masses

La masse d'un système matériel (S) est égale à la somme des masses qui le composent.

Exemple : masse d'un livre = somme des masses des feuilles qu'il contient.

La masse d'un système matériel est définie par la grandeur scalaire suivante :

$$M = \int_{P \in (S)} dm(P)$$



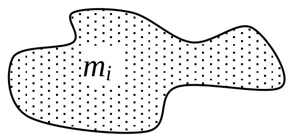

L'élément $dm(P)$ est la mesure de la masse au voisinage du point (P).

Un système matériel est un ensemble discret ou continu des points matériels ou encore une réunion d'ensembles continus ou discrets de points matériels.

### 1.1. Systèmes discrets

La masse d'un système discret est la somme des n points matériels discrets de masses $m_i$ :

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$




### 1.2. Systèmes continus

Si le système est constitué d'un ensemble continu de masses, la masse du système s'écrirait sous la forme d'une intégrale continue : $m = \int_{(S)} dm(P)$

- **Le système (S) est un volume**

La masse s'écrirait : $m = \int_V \rho(P)dv$

$\rho(P)$ est la masse volumique au point $P$ et $dv$ un élément de volume du solide (S)

- **Le système (S) est une surface :** (cas des plaques fines) l'épaisseur est négligeable devant les deux autres dimensions.

La masse s'écrirait : $m = \int_S \sigma(P)ds$

$\sigma(P)$ est la densité surfacique au point $P$ et $ds$ un élément de surface du solide (S)

- **Le système (S) est linaire :** (cas des tiges fines) les deux dimensions sont négligeables devant la longueur de la tige.

La masse s'écrirait : $m = \int_L \lambda(P)dl$

$\lambda(P)$ est la densité linéique au point $P$ et -un élément de longueur du solide (S)

Dans les systèmes homogènes (solides homogènes) la densité des solides est constante.

## 2. Centre d'inertie (centre de masse) des solides

On appelle centre d'inertie d'un système matériel (S) le point G défini par la relation :

$$\int_{P\in(S)} \overrightarrow{GP}\, dm = \vec{0}$$

où $P$ est un point du solide avec $\overrightarrow{OP} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ et $\overrightarrow{OG} = x_G\,\vec{i} + y_G\,\vec{j} + z_G\,\vec{k}$

Soit O le centre d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ nous pouvons écrire dans ce repère : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}$ $\displaystyle\int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP}\, dm = \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OG}\, dm + \underbrace{\int_{P\in(S)} \overrightarrow{GP}\, dm}_{=0}$ alors nous obtenons :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\displaystyle\int_{P\in(S)} dm} \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP}\, dm \quad ; \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP}\, dm$$

Les coordonnées du centre d'inertie G d'un système homogène sont déterminées par des calculs utilisant les éléments infinitésimaux tel que : *dl* pour les éléments linéaires, *ds* pour les éléments surfaciques et *dv* pour les éléments volumiques. Ainsi nous pouvons écrire :

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_{P\in(S)} x\ dm}{\displaystyle\int_{P\in(S)} dm} = \frac{1}{m}\int_{P\in(S)} x\ dm\,, \quad y_G = \frac{\displaystyle\int_{P\in(S)} y\ dm}{\displaystyle\int_{P\in(S)} dm} = \frac{1}{m}\int_{P\in(S)} y\ dm \quad , \quad z_G = \frac{\displaystyle\int_{P\in(S)} z\ dm}{\displaystyle\int_{P\in(S)} dm} = \frac{1}{m}\int_{P\in(S)} z\ dm$$

**Remarques :**

- Le centre d'inertie des masses homogènes coïncide avec le centre d'inertie de leurs volumes s'ils sont volumiques ou de leurs surfaces s'ils sont surfaciques.
- Si le solide présente des éléments de symétrie (axes ou plans) son centre d'inertie est nécessairement situé sur ces éléments de symétrie.

## 3. Centre d'inertie d'un système composé

Dans la réalité c'est le cas le plus souvent rencontré, les calculs sont élémentaires en résonnant sur chacun des éléments qui composent les systèmes.

On détermine d'abord le centre d'inertie de chaque élément $\Delta_i$ du système au point $G_i$ , puis on détermine le centre d'inertie $G$ du système comme barycentre des points $G_i$ .

Soient les éléments d'un système composé : $\Delta_1, \Delta_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \Delta_n$ ayant pour centres d'inertie respectifs : $G_1, G_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, G_n$ ayant pour vecteurs positions dans un repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ : $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \vec{r}_n$ :

Le centre d'inertie de ce système est donné par : $\vec{r}_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \ \Delta_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i}$ ; où $\Delta_i$ est la i[ième] quantité.

Elle peut être un élément de longueur, de surface, de volume ou de masse.

Le centre d'inertie du système aura pour coordonnées :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \ \Delta_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i} \quad , \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \ \Delta_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i} \quad , \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \ \Delta_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i}$$

où : $x_i$, $y_i$, $z_i$ sont les coordonnées des points $G_i$ où l'élément $\Delta_i$ est concentré.

Si les $\Delta_i$ sont des éléments de masses alors on peut écrire :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \ \mathrm{m}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad , \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \ \mathrm{m}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad , \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \ \mathrm{m}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

## 4. Théorème de Guldin

Une seconde méthode pour la détermination des centres d'inertie des solides linéaires ou surfaciques homogènes fut trouvée par Guldin. Elle consiste à faire tourner ces solides autour des axes qu'ils n'interceptent pas. Les solides linéaires décriront des surfaces et les solides surfaciques décriront des volumes.

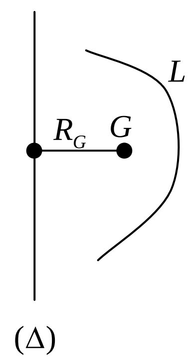
### 4.1. 1er Théorème de Guldin

La surface S engendrée par la rotation d'un arc de courbe de longueur L autour d'un axe $(\Delta)$ sans l'intercepter dans son plan est égale au produit de la longueur L de l'arc par la longueur de la circonférence $2\pi R_G$ décrite par le centre d'inertie $G$ de l'arc de courbe.

Soit L la longueur de l'arc et $R_G$ sont centre d'inertie.

La longueur (périmètre) décrite par la rotation du centre d'inertie $G$ par rapport à l'axe $(\Delta)$ est donnée par : $2\pi R_G$ , alors la surface décrite par cet élément est égale à :

$$S_{/\Delta} = 2\pi \; R_G \; L \qquad \text{d'où} \qquad R_G = \frac{S_{/\Delta}}{2\pi L}$$




Dans le cas d'un système homogène de plusieurs éléments on aura : $R_G = \dfrac{S_{totale/\Delta}}{2\pi L_{totale}}$

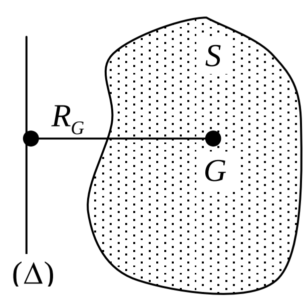
si l'axe $(\Delta)$ représente l'axe $(O,\vec{y})$ nous aurons : $x_G = \dfrac{S_{/oy}}{2\pi L}$

si l'axe $(\Delta)$ représente l'axe $(O,\vec{x})$ nous aurons : $y_G = \dfrac{S_{/ox}}{2\pi L}$

### 4.2. 2ième Théorème de Guldin

Une surface plane homogène $S$ , limitée par une courbe fermée simple et tournant autour d'un axe $(\Delta)$ sans le rencontrer engendre un volume $V$.

Le volume $V$ engendré est égal au produit de la surface $S$ par la longueur du périmètre $2\pi R_G$ décrit par le centre d'inertie $G$ de cette surface autour de l'axe $(\Delta)$ .



Soit $S$ la surface et $R_G$ la distance de son centre d'inertie à $(\Delta)$.

La longueur (périmètre) décrite par la rotation du centre d'inertie $G$ par rapport à l'axe $(\Delta)$ est donnée par : $2\pi R_G$ , alors le volume décrit par cette surface est égal à :

$V_{/\Delta} = 2\pi\ R_G\ \mathrm{S}$ d'où $R_G = \dfrac{V_{/\Delta}}{2\pi S}$

Dans le cas d'un système homogène composé de plusieurs surfaces on aura :

$$R_G = \frac{V_{totale/\Delta}}{2\pi\ \mathrm{S}_{totale}}$$

si l'axe $(\Delta)$ représente l'axe $(O,\vec{y})$ nous aurons : $x_G = \dfrac{V_{total/oy}}{2\pi\ S_{totale}}$

si l'axe $(\Delta)$ représente l'axe $(O,\vec{x})$ nous aurons : $y_G = \dfrac{V_{total/ox}}{2\pi S_{totale}}$