Série 02

Solution d'exercice 01 :

$$u(x,y)=X(x)Y(y)\Rightarrow X^{''}Y+XY^{''}=0\Rightarrow X^{''}Y=-XY^{''}\Rightarrow \frac{X^{''}}{X}=-\frac{Y^{''}}{Y}=\lambda$$

on obtient les 2 problèmes

$$(P_1)\left\{\begin{array}{l} X^{''}-\lambda X=0,\quad 0<x<L \\ X(L)=0 \end{array}\right. ,(P_2)\left\{\begin{array}{l} Y^{''}+\lambda Y=0,\quad 0<y<H \\ Y(0)=0,Y(H)=0 \end{array}\right.$$

La résolution du problème de Sturm-Liouville (P_2) nous donne :

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{H^2},\quad Y_n(y)=c_n\sin\left(\frac{n\pi}{H}y\right)$$

car :

$$Y^{''}+\lambda Y=0\Rightarrow Y(y)=d\cos\left(\sqrt{\lambda}y\right)+c\sin\left(\sqrt{\lambda}y\right)$$

$$Y(0)=0\Rightarrow d=0,Y(H)=0\Rightarrow c\sin\left(\sqrt{\lambda}H\right)=0,c\neq 0\Rightarrow \sin\left(\sqrt{\lambda}H\right)=0$$

$$\Rightarrow \sin\left(\sqrt{\lambda}H\right)=0\Rightarrow \lambda=\frac{n^2\pi^2}{H^2},n\in\mathbb{Z}^*$$

donc

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{H^2}\text{ et }Y_n(y)=c_n\sin\left(\frac{n\pi}{H}y\right),n\in\mathbb{N}^*$$

donc la solution du (P_1) est :

$$X_n(x)=a_n\cosh\left(\frac{n\pi}{H}(L-x)\right)+b_n\sinh\left(\frac{n\pi}{H}(L-x)\right)\text{ pour }n\geq 1$$

$$X_n(L)=0\Rightarrow a_n=0,n\geq 1$$

d'après le principe de superposition, n écrivant

$$u(x,y)=\sum_{n\geq 1}b_n\sinh\left(\frac{n\pi}{H}(L-x)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{H}y\right)$$

$u(0,y)=g(y)$, nous avons :

$$g(y)=\sum_{n\geq 1} b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{H}L\right)\sin\left(\frac{n\pi}{H}y\right)$$

$$b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{H}L\right)=\frac{2}{H}\int_0^H g(y)\sin\left(\frac{n\pi}{H}y\right)dy$$

car $g(y)\sin\left(\frac{n\pi}{H}y\right)$ fonction paire
donc :

$$u(x,y)=\frac{2}{H}\sum_{n\geq 1}\left\{\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{H}y\right)}{\sin\left(\frac{n\pi}{H}y\right)}\int_0^H g(y)\sin\left(\frac{n\pi}{H}y\right)dy\right\}\sinh\left(\frac{n\pi}{H}(L-x)\right)$$

Solution d'exercice 02 :

$$\begin{aligned}\text{a) } u(x,y) &= X(x)Y(y)\Rightarrow X''Y+XY''=0\\ &\Rightarrow X''Y=-XY''\Rightarrow \frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=\lambda\end{aligned}$$

(λ : constant) ; Nous obtenons les deux E.D.O suivantes :

$$(P_1)\begin{cases} X''-\lambda X=0, & 0<x<L\\ X'(L)=0\end{cases} \quad \text{et} \quad (P_2)\begin{cases} Y''+\lambda Y=0, & 0<y<H\\ Y(0)=Y(H)=0\end{cases}.$$

En travaillant sur (P_2), on obtient :

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2,\quad Y_n(y)=C_n\sin\left(\frac{n\pi}{H}y\right), n\geq 1$$

on retourne à l'équation en X, en utilisant les résultats précédents, il vient :

$$X_n(x)=A_n\cosh\left(\frac{n\pi}{H}(L-x)\right)+A_n\sin\left(\frac{n\pi}{H}(L-x)\right).$$

La condition $X_n'(L)=0$ implique $B_n=0$

$$\Rightarrow X_n(x)=A_n\cosh\left(\frac{n\pi}{H}(L-x)\right), 0<x<L, n\geq 1$$

car :

$$\begin{aligned}X_n'(x) &= \frac{-n\pi}{H}A_n\sinh\left(\frac{n\pi}{H}(L-x)\right)-\frac{n\pi}{H}B_n\cosh\left(\frac{n\pi}{H}(L-x)\right)\\ X_n'(x) &= \frac{-n\pi}{H}B_n=0\Rightarrow B_n=0.\end{aligned}$$

d'après le principe de superposition nous donne

$$u(x,y)=\sum_{n\geq 1}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{H}y\right)\cosh\left(\frac{n\pi}{H}(L-x)\right) \ldots\ldots (*)$$

Dérivons $(*)$ par rapport à x et posons $x=0$, il vient :

$$g(y)=\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=-\sum_{n\geq 1}\frac{n\pi}{H}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{H}y\right)\cosh\left(\frac{n\pi}{H}L\right)$$

développons $g(y)$ en séries de Fourier en sinus, il vient :

$$g(y)=\sum_{n\geq 1}\alpha_n\sin\left(\frac{n\pi}{H}y\right),\ \alpha_n=\frac{2}{H}\int_0^H g(y)\sin\left(\frac{n\pi}{H}y\right)dy$$

donc on a :

$$A_n=\sum_{n\geq 1}\left(\frac{-2}{n\pi\sinh\left(\frac{n\pi L}{H}\right)}\int_0^H g(y)\sin\left(\frac{n\pi}{H}y\right)dy\right)\sin\left(\frac{n\pi}{H}y\right)\cosh\left(\frac{n\pi}{H}(L-x)\right)$$

donc la solution générale est :
b) un raisonnement analogue donne :

$$\left(P_1^{'}\right)\begin{cases}X^{''}+\lambda X=0, & 0<x<L\\ X^{'}(0)=0, X^{'}(L)=0\end{cases}\quad\text{et}\quad\left(P_2^{'}\right)\begin{cases}Y^{''}-\lambda Y=0, & 0<y<H\\ Y^{'}(H)=0\end{cases}.$$

On travaille sur le problème de Neumann $\left(P_1^{'}\right)$, on obtient les valeurs propres

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \text{ et les fonctions propres } X_n(x)=d_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), n\geq 0$$

car :

$$X^{''}+\lambda X=0\Rightarrow X(x)=d\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)+c\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$
$$\Rightarrow X^{'}(x)=-d\sqrt{\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)+c\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

$$\begin{aligned}X^{'}(0)&=0\Rightarrow c\sqrt{\lambda}=0\Rightarrow c=0\Rightarrow X(x)=d\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)\\ X^{'}(L)&=0\Rightarrow -d\sqrt{\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}L\right)=0\Rightarrow\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, n\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow X_n(x)=d_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), n\in\mathbb{N}$$

on déduit la forme de la solution de $\left(P_2^{'}\right)$ comme suit :

$$Y_n(y)=A_n\cosh\left(\frac{n\pi}{L}(H-y)\right)+B_n\sinh\left(\frac{n\pi}{L}(H-y)\right)$$

$Y_n^{'}(H)=0\Rightarrow B_n=0$, alors :

$$Y_n(y)=A_n\cosh\left(\frac{n\pi}{L}(H-y)\right),\quad 0<y<H,\ n\geq 0$$

de principe de superposition donne :

$$u(x,y)=\sum_{n\geq 0}A_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cosh\left(\frac{n\pi}{L}(H-y)\right)$$

la condition

$$u(x,0)=\begin{cases}1 & 0<x<\dfrac{L}{2}\\ 0 & \dfrac{L}{2}<x<0\end{cases}$$

donne

$$\begin{aligned}u(x,0) &= \sum_{n\geq 0} A_n\cosh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\\ &= A_0+\sum_{n\geq 1} A_n\cosh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\end{aligned}$$

développons $u(x,0)$ en séries de Fourier en cosinus, on obtient :

$$A_0=\frac{1}{2},\ A_n=\frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi\cosh\left(\frac{n\pi H}{L}\right)}, n\geq 1$$

car :

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{2}{L}\int_0^L u(x,0)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=\frac{2}{L}\int_0^{\frac{L}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\\ &= \frac{2}{L}\times\frac{L}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\Big]_0^{\frac{L}{2}}=\frac{2}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\sin(0)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_n &= A_n\cosh\left(\frac{n\pi}{L}H\right)=\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\\ &\Rightarrow A_n=\frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi\cosh\left(\frac{n\pi H}{L}\right)}, n\geq 1\end{aligned}$$

$$\alpha_0=\frac{1}{L}\int_0^L u(x,0)\,dx=\frac{1}{L}\int_0^{\frac{L}{2}}dx=\frac{1}{2}$$

Solution d'exercice 03 :

Nous allons couper ce problème en deux problèmes ayant chaun une seule condition non-homogène
tq $(u=v+w)$ où v est la solution du problème

$$(P_1)\begin{cases}\Delta v=0, \quad 0<x<1,\ 0<y<1\\ v(x,0)=0, v(x,1)=100, v(0,y)=0, v(1,y)=0\end{cases}$$

w est la solution du problème

$$(P_2)\begin{cases}\Delta w=0, \quad 0<x<1,\ 0<y<1\\ w(x,0)=0, w(x,1)=0, w(0,y)=0, w(1,y)=100\end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v(x,0) = 0, v(x,1) = 100, v(0,y) = 0, v(1,y) = 0 \end{cases}$$

$$v(x,y) = X(x)Y(y) \Rightarrow X''Y + XY'' = 0 \Rightarrow X''Y = -XY'' \Rightarrow -\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda$$

on obtient les 2 problèmes

$$(p_1) \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}, (p_2) \begin{cases} Y'' - \lambda Y = 0 \\ Y(0) = 0 \end{cases}$$

La résolution du problème de Sturm-Liouville (p_1) nous donne :

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n(x) = c_n \sin(n\pi x)$$

car :

$$X'' + \lambda X = 0 \Rightarrow X(x) = d\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + c\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 \Rightarrow d = 0, X(1) = 0 \Rightarrow c\sin\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0, c \neq 0 \\ &\Rightarrow \sin\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0 \Rightarrow \lambda = (n\pi)^2, n \in \mathbb{Z}^*. \end{aligned}$$

donc

$$\lambda_n = (n\pi)^2 \text{ et } X_n(x) = c_n \sin(n\pi x), n \in \mathbb{N}^*$$

la solution du (p_2) est :

$$Y_n(y) = a_n \cosh(n\pi y) + b_n \sinh(n\pi y)$$

$$Y_n(0) = 0 \Rightarrow a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

d'après le principe de superposition, en écrivant :

$$v(x,y) = \sum_{n\geq 1} c_n \sin(n\pi x)\sinh(n\pi y)$$

$$v(x,1) = 100 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} c_n \sin(n\pi x)\sinh(n\pi) = 100$$

on pose $\alpha_n = c_n \sinh(n\pi), n \in \mathbb{N}^*$.
Alors

$$\sum_{n\geq 1} c_n \sin(n\pi x)\sinh(n\pi) = \sum_{n\geq 1} \alpha_n \sin(n\pi x) = 100$$

$$\alpha_n = \frac{2}{1}\int_0^1 100\sin(n\pi x)\,dx = \frac{-200}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big]_0^1 = \frac{200}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$$

$$\Rightarrow c_n \sinh(n\pi) = \frac{200}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right) \Rightarrow c_n = \frac{200}{n\pi\sinh(n\pi)}\left(1 - (-1)^n\right), n \geq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_{2n-1} = \dfrac{400}{(2n-1)\,\pi \sinh\left((2n-1)\,\pi\right)}\left(1-(-1)^n\right), n \geq 1 \\ c_{2n} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v\left(x,y\right) = \frac{400}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left((2n-1)\,\pi x\right)\sinh\left((2n-1)\,\pi y\right)}{(2n-1)\sinh\left((2n-1)\,\pi\right)} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \\ w\left(x,0\right) = 0, w\left(x,1\right) = 0, w\left(0,y\right) = 0, w\left(1,y\right) = 100 \end{cases}$$

$$w\left(x,y\right) = X\left(x\right)Y\left(y\right) \Rightarrow X''Y + XY'' = 0 \Rightarrow X''Y = -XY'' \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$$

on obtient les deux problèmes suivants :

$$(p_1)\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X\left(0\right) = 0 \end{cases}, (p_2)\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y\left(0\right) = 0, Y\left(1\right) = 0 \end{cases}$$

La résolution du problème de Sturm-Liouville (p_2) nous donne :

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \quad Y_n\left(y\right) = c_n \sin\left(n\pi y\right)$$

car :

$$Y'' + \lambda Y = 0 \Rightarrow Y\left(y\right) = d\cos\left(\sqrt{\lambda}y\right) + c\sin\left(\sqrt{\lambda}y\right)$$

$$\begin{aligned} Y\left(0\right) &= 0 \Rightarrow d = 0, Y\left(1\right) = 0 \Rightarrow c\sin\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0, c \neq 0 \\ &\Rightarrow \sin\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0 \Rightarrow \lambda = (n\pi)^2, n \in \mathbb{Z}^*. \end{aligned}$$

donc

$$\lambda_n = (n\pi)^2 \text{ et } Y_n\left(y\right) = c_n \sin\left(n\pi y\right), n \in \mathbb{N}^*$$

la solution du (p_1) est :

$$X_n\left(x\right) = a_n \cosh\left(n\pi x\right) + b_n \sinh\left(n\pi x\right)$$

$$X_n\left(0\right) = 0 \Rightarrow a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow X_n\left(x\right) = b_n \sinh\left(n\pi x\right)$$

d'après le principe de superposition, en écrivant :

$$w\left(x,y\right) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin\left(n\pi y\right)\sinh\left(n\pi x\right)$$

$$w\left(1,y\right) = 100 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} b_n \sin\left(n\pi y\right)\sinh\left(n\pi\right) = 100$$

on pose

$$\gamma_n = b_n \sinh\left(n\pi\right)$$

Alors

$$\gamma_n = \frac{2}{1}\int_0^1 100\sin\left(n\pi y\right)dy = \frac{-200}{n\pi}\cos\left(n\pi y\right)\Big]_0^1 = \frac{200}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right), n \geq 1$$

$$\Rightarrow \gamma_{2n-1} = \frac{400}{(2n-1)\,\pi},\ \gamma_{2n} = 0$$

$$\Rightarrow b_{2n-1} = \frac{400}{(2n-1)\,\pi \sinh\left((2n-1)\,\pi\right)},\ b_{2n} = 0, n \geq 1$$

$$\Rightarrow w\,(x,y) = \frac{400}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left((2n-1)\,\pi y\right)\sinh\left((2n-1)\,\pi x\right)}{(2n-1)\sinh\left((2n-1)\,\pi\right)}. \tag{2}$$

En sommant (1) et (2) on a la solution $u\,(x,y)$.

SOLUTION D'Exercice 4:

Soit $\rho = e^{-t}$, $u(\rho(t), \theta)$

$$\begin{aligned}
u_t &= u_\rho \rho_t + u_\theta \theta_t = -e^{-t} u_\rho, \quad \theta_t = 0 \\
u_{tt} &= \left(-e^{-t} u_\rho\right)_t = e^{-t} u_\rho - e^{-t}(u_\rho)_t = e^{-t} u_\rho - e^{-t}(u_{\rho\rho}\rho_t + u_{\rho\theta}\theta_t) \\
&= e^{-t} u_\rho - e^{-t} u_{\rho\rho}\rho_t = e^{-t} u_\rho + e^{-2t} u_{\rho\rho} \\
&= \rho u_\rho + \rho^2 u_{\rho\rho}. \\
&\Rightarrow \frac{1}{\rho^2} u_{tt} = \frac{1}{\rho} u_\rho + u_{\rho\rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho^2} u_{tt} + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} = 0.
\end{aligned}$$

Nous avons alors

$$u_{tt} + u_{\theta\theta} = 0$$

soit

$$\begin{aligned}
u(t,\theta) &= X(t)Y(\theta) \Rightarrow X''(t)Y(\theta) + X(t)Y''(\theta) = 0 \\
&\Rightarrow \frac{X''(t)}{X(t)} = -\frac{Y''(\theta)}{Y(\theta)} = \lambda
\end{aligned}$$

on obtient : $Y''(\theta) + \lambda Y(\theta) = 0$,
Puisque la fonction au bord $f(\theta)$ est $2\pi-$périodique, on a donc

$$\begin{aligned}
Y_n(\theta) &= a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \\
\lambda_n &= n^2, \ n = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

avec cette valeur de λ_n on résout

$$X''(t) - n^2 X(t) = 0$$

si $n = 0$, $X_0(t) = c_0 t + d_0 \Rightarrow X_0(\rho) = -c_0 \ln\rho + d_0$
si $n \neq 0$, $X_n(t) = c_n e^{nt} + d_n e^{-nt} \Rightarrow X_\rho(t) = c_n \rho^{-n} + d_n \rho^n$
on obtient :

$$u_0(\rho,\theta) = X_0 Y_0 = (-c_0 \ln\rho + d_0)\, a_0$$

$$u_n(\rho,\theta) = X_n(\rho) Y_n(\theta) = \left(c_n \rho^{-n} + d_n \rho^n\right)(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

et comme u est fini (u est bornée lorsque $\rho = 0$) alors $c_n = 0$, $n = 0, 1, 2\ldots$

$$\Rightarrow u_0(\rho,\theta) = d_0 a_0, \ u_n(\rho,\theta) = d_n \rho^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

par le principe de superposition

$$u(\rho,\theta) = A_0 + \sum_{n\geq 1} \rho^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

$$u(1,\theta) = A_0 + \sum_{n\geq 1} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = f(\theta)$$

En développant $f(\theta)$ en série de Fourier

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\theta)\,d\theta, \ A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\theta)\cos n\theta\, d\theta, \ B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\theta)\sin n\theta\, d\theta$$

SOLUTION D'Exercice 5:

un raisonnement analogue donne

$$u_0(\rho,\theta) = X_0 Y_0 = (-c_0 \ln \rho + d_0)\, a_0$$

$$u_n(\rho,\theta) = X_n(\rho)\, Y_n(\theta) = \left(c_n \rho^{-n} + d_n \rho^{n}\right)(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

et comme u est fini (u est bornée lorsque $\rho = \infty$) alors $c_0 = 0$, $d_n = 0$, $n = 1, 2...$

$$\Rightarrow u_0(\rho,\theta) = d_0 a_0,\ \ u_n(\rho,\theta) = c_n \rho^{-n}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

par le principe de superposition

$$u(\rho,\theta) = A_0 + \sum_{n\geq 1} \rho^{-n}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

$$f(\theta) = u(1,\theta) = A_0 + \sum_{n\geq 1}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

En développant $f(\theta)$ en série de Fourier

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\, d\theta,\ \ A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta,\ \ B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta$$

SOLUTION D'Exercice 6:

On pose $\rho = e^{-t}$, $u(\rho(t), \theta)$

$$\begin{aligned} u_t &= u_\rho \rho_t + u_\theta \theta_t = -e^{-t} u_\rho, \quad \theta_t = 0 \\ u_{tt} &= \left(-e^{-t} u_\rho\right)_t = e^{-t} u_\rho - e^{-t} (u_\rho)_t = e^{-t} u_\rho - e^{-t} (u_{\rho\rho} \rho_t + u_{\rho\theta} \theta_t) \\ &= e^{-t} u_\rho - e^{-t} u_{\rho\rho} \rho_t = e^{-t} u_\rho + e^{-2t} u_{\rho\rho} \\ &= \rho u_\rho + \rho^2 u_{\rho\rho}. \\ &\Rightarrow \frac{1}{\rho^2} u_{tt} = \frac{1}{\rho} u_\rho + u_{\rho\rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho^2} u_{tt} + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} = 0. \end{aligned}$$

alors

$$u_{tt} + u_{\theta\theta} = 0$$

soit

$$\begin{aligned} u(t,\theta) &= X(t) Y(\theta) \Rightarrow X''(t) Y(\theta) + X(t) Y''(\theta) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{X''(t)}{X(t)} = -\frac{Y''(\theta)}{Y(\theta)} = \lambda \end{aligned}$$

de $Y''(\theta) + \lambda Y(\theta) = 0$, il vient

$$Y_n(\theta) = a_n \cos\left(\sqrt{\lambda}\theta\right) + b_n \sin\left(\sqrt{\lambda}\theta\right)$$

les conditions aux limites donnent

$$u_n(\rho, 0) = 0 = X_n(\rho) Y_n(0) = 0 \Rightarrow Y_n(0) = 0$$

$$u_n(\rho, \pi) = 0 = X_n(\rho) Y_n(\pi) = 0 \Rightarrow Y_n(\pi) = 0$$

d'où :

$$\begin{aligned} 0 &= Y_n(0) = a_n, \text{et } Y_n(\pi) = b_n \sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{\lambda} = n \Rightarrow \lambda_n = n^2 \end{aligned}$$

d'où

$$Y_n(\pi) = b_n \sin(n\theta), \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$X''(t) - n^2 X(t) = 0$$

si $n = 0$

$$X_0(t) = c_0 t + d_0 \Rightarrow X_0(\rho) = -c_0 \ln \rho + d_0$$

si $n > 0$

$$X_n(t) = c_n e^{nt} + d_n e^{-nt} \Rightarrow X_n(\rho) = c_n \rho^{-n} + d_n \rho^n$$

Nous avons :

$$u(\rho,\theta)=\sum_{n\geq 1}X_n(\rho)\,Y_n(\theta)=\sum_{n\geq 1}\left(C_n\rho^{-n}+D_n\rho^n\right)\sin n\theta$$

on a

$$\sin\theta=u(1,\theta)=\sum_{n\geq 1}(C_n+D_n)\sin n\theta$$

$$\Rightarrow\begin{cases}C_1+D_1=1\\ C_n+D_n=0,n=2,3,\ldots\end{cases}$$

$$0=u(2,\theta)=\sum_{n\geq 1}\left(C_n2^{-n}+D_n2^n\right)\sin n\theta$$

$$\Rightarrow C_n2^{-n}+D_n2^n=0,n=1,2,3,\ldots$$

pour $n=1\Rightarrow$

$$\frac{C_1}{2}+2D_1=0$$

donc

$$C_1=\frac{4}{3},D_1=-\frac{1}{3}\text{ et }C_0=0,D_1=0\text{ pour }n\geq 2$$

d'où

$$u(\rho,\theta)=\left(\frac{4}{3\rho}-\frac{\rho}{3}\right)\sin\theta$$