Université Larbi Ben M'hidi
O-E-B

Département de Mathématiques - informatique.

Cours Master année 2019-2020

Théorie des distributions

Présenté par Pr. Ayadi Abdelhamid.

Table des matières

1. Introduction à la théorie des distribution.

1.1 Notion du Dirac.

Il est utile, dans la résolution de certains problèmes de physique, de considérer des objets, appelés par abus de langage "fonctions", mais mal définies comme présentation ponctuelle. L'exemple le plus célèbre en est la mesure de Dirac, qui, si elle est considérée comme une fonction, est " nulle en dehors de zéro, infini en zéro. Il est clair que cette définition n'est pas complète. En effet, considérons les deux fonctions :

$$\phi_1^{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |x| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon^2}(\varepsilon - |x|) & \text{pour } |x| \leq \varepsilon \end{cases}$$

et $\quad \phi_2^{\varepsilon}(x) = 2\,\phi_1^{\varepsilon}(x)$

$$\phi_2^\varepsilon(x) = 2\,\phi_1^\varepsilon(x)$$

qui sont bien définies sur $\mathbb{R}$ pour tout $\varepsilon > 0$.
Elles vérifient toutes les deux, à la limite, la relation "nulle en dehors de 0, infinie en 0". Il est impératif d'ajouter d'autre critère pour les différencier. Le premier critère auquel on pense est intégral : on calcule $\int_{\mathbb{R}} \phi_1^\varepsilon(x)\,dx = 1$ et $\int_{\mathbb{R}} \phi_2(x)\,dx = 2$. Ceci permet de les différencier.

Mais le critère n'est pas suffisant : en effet considérons la fonction :

$$\phi_3^\varepsilon(x) = \begin{cases} \phi_1^\varepsilon(x), & |x| \leq \varepsilon \\ -\phi_1^\varepsilon(x-2\varepsilon), & \text{pour } |x-2\varepsilon| \leq \varepsilon \end{cases}$$

son intégrale sur $\mathbb{R}$ est : $\int_{\mathbb{R}} \phi_3^\varepsilon(x)\,dx = 0$, ceci ne permet pas de différencier ϕ_3^ε de $2\phi_3^\varepsilon$.

Pour finir, considérons le dernier exemple :

$$\begin{cases} \phi_4^\varepsilon(x) = \phi_1^\varepsilon(x-\varepsilon) & \text{où} \quad |x-\varepsilon| \leq \varepsilon \\ \phi_1^\varepsilon(x) = 0 & \text{si } |x-\varepsilon| \geq \varepsilon \end{cases}$$

On constate que :

$$\phi_4^\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \lim_{\varepsilon \to 0} \phi_4^\varepsilon(x) = 0 & \text{pour } x \neq 0 \end{cases}$$

On ne peut pas identifier le point de singularité pour cette fonction en considérant uniquement sa limite et son intégrale.

Remarque : L'analyse de la distribution ϕ_1^ε, en l'intégrant sur $[a,b]$, où a, b sont deux réels distincts, indépendants de ε, nous conduit à

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b \phi_1^\varepsilon(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \notin [a,b] \\ 1 & \text{si } 0 \in [a,b] \\ \frac{1}{2} & \text{si } a=0 \text{ ou } b=0 \end{cases}$$

0 est le point singulier

i.e. sur $[0,b]$ ou sur $[a,0]$

c'est pour cela que l'on appelle souvent cette limite la mesure de Dirac.

1.2 Notion d'intégrale d'action.

Définitions $\forall i \in \{1,2,3\}$, $I_i^{\varepsilon}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} d_i^{\varepsilon}(x)\, \phi(x)\, dx$
où ϕ est une fonction suffisamment régulière, au moins continue et bornée. Un simple changement de variable $x = \varepsilon t$ sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$, $x - 1 = \varepsilon t$ sur $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$, $x = 2\varepsilon + \varepsilon t$ sur $[\varepsilon, 3\varepsilon]$ conduit aux égalités

$$\begin{cases} I_1^{\varepsilon}(\phi) = \displaystyle\int_{-1}^{+1} \phi(\varepsilon t)(1-|t|)\, dt \\ I_2^{\varepsilon}(\phi) = 2 I_1^{\varepsilon}(\phi) \\ I_3^{\varepsilon}(\phi) = \displaystyle\int^{1} [\phi(\varepsilon t) - \phi(2\varepsilon + \varepsilon t)](1-|t|)\, dt. \end{cases}$$

Pour passer à la limite quand ε tend vers zero nous rappelons le théorème de convergence dominée qui dit :

$\int \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n$ lorsque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite simplement convergente de fonctions intégrables dominée par une fonction positive intégrable g au sens suivant : $|f| \leq g$ $\forall n \in \mathbb{N}$

c'est à dire, $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions intégrables.
On suppose que :

(i) $\exists f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ telle que $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ p.p sur $\mathbb{R}^n$

(ii) $\exists g : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ integrable, telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p

alors la fonction f est integrable sur $\mathbb{R}^n$ et on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f - f_n| = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to\infty} f_n = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Maintenant si on applique ce Theorème sur $I_i^{\varepsilon}(\phi)$, on trouve :

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \to 0} I_1^{\varepsilon}(\phi) = \phi(0) & \text{avec } I_1^{\varepsilon}(\phi) \leq \max_{x \in [-1,1]} |\phi(x)| \\ \lim_{\varepsilon \to 0} I_2^{\varepsilon}(\phi) = 2\phi(0) & \text{avec } I_2^{\varepsilon}(\phi) \leq 2 \max_{x \in [-1,1]} |\phi(x)| \\ \lim_{\varepsilon \to 0} I_3^{\varepsilon}(\phi) = 0 & \text{avec } I_3^{\varepsilon}(\phi) \leq 2 \max_{x \in [-1,1]} |\phi(x)| \end{cases}$$

c'est à dire $\quad I_i^{\varepsilon}(\phi) \leq C \max_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x)|$ où C est une constante > 0

Alors cette notion d'intégrale d'action, permet de différencier entre les différentes limites.

1.3 Notion de dérivée.

prenons la fonction :

$$H_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\varepsilon \\ 1 - \dfrac{(\varepsilon - x)^2}{2\varepsilon^2} & \text{si } 0 \leq x \leq \varepsilon \\ \dfrac{(\varepsilon + x)^2}{2\varepsilon^2} & \text{si } -\varepsilon \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > \varepsilon \end{cases}$$

cette fonction admet pour dérivée la fonction $\phi_1^{\varepsilon}(x)$.
En plus H_{ε} est classe C^1 et $H_{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} H$ (fonction de Heaviside) au sens L^1 car $\int |H_{\varepsilon} - H| \, dx = \varepsilon/2$. On a une convergence simple mais on n'a pas la converge en norme car :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |H_{\varepsilon}(x) - H(x)| = 1/2 .$$

et d'après l'analyse précédente :

$$\int_{\mathbb{R}} H_{\varepsilon}'(x)\, \phi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \phi_1^{\varepsilon}(x)\, \phi(x)\, dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \phi(0)$$

On peut donc considérer que la dérivée de H est l'impulsion de Dirac en 0.

Pour finir la partie de cours concernant l'introduction à la théorie de distributions, on va introduire un exemple qui prouve la necessité d'avoir plus de régularité sur la fonction d'action ϕ.

Soit la fonction $\phi_r^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3}(\varepsilon^2 - x^2)$ pour $|x| \leq \varepsilon$ et 0 ailleurs.

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_r^\varepsilon(x)\, \phi(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} \phi(\varepsilon t)\,(1-t^2)\,dt \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \frac{4}{3}\phi(0)$$

et $\phi_r^{\varepsilon\,\prime}(x) = \phi_6^\varepsilon(x) = -\frac{2x}{\varepsilon^3}$ pour $x \in [\varepsilon, \varepsilon]$ et 0 ailleurs

de plus : $\int_{\mathbb{R}} \phi_6(x)\,\phi(x)\,dx = -\frac{2}{\varepsilon}\int_{-1}^{+1} \phi(\varepsilon t)\, t\, dt$

Si on choisit $\phi(x) = \frac{x}{|x|}(|x|)^{1/2}$ alors on a,

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_6(x)\,\phi(x)\,dx = -\frac{2}{\varepsilon}\int_{1}^{+1} \phi(\varepsilon t)\, t\, dt = -\frac{8}{3}\,\frac{1}{\varepsilon^{1/2}}$$

il est clair que $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} = +\infty$, cette intégrale est donc divergente d'où la nécéssité de prendre ϕ dans un espace suffisamment régulier appelé espace des fonctions tests.