Fonctions test, Distribution

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On désigne par α le multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$. On appelle longueur de α $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$. Pour $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$, on pose :

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_N^{\alpha_N}$$

et si α et β sont deux multi-indices, on dit que $\alpha \leq \beta$ lorsque $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. On pose aussi

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!} \quad \text{où}$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_N! \,.$$

Enfin une fonction $\varphi \in C^k(\Omega)$ si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq k$, et la fonction $\partial^\alpha \varphi$ est dans $C^0(\Omega)$, où $C^0(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues sur Ω.

Soient $k \geq 1$, $\varphi, \psi \in C^k(\Omega)$, alors pour tout multi-indice α de longueur $|\alpha| \leq k$, la formule de Leibniz s'écrit :

$$\partial^\alpha(\varphi\psi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \varphi \cdot \partial^{\alpha-\beta} \psi \,.$$

et la formule de Taylor s'écrit, pour $k \geq 1$:

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(y)(x-y)^\alpha + \sum_{|\alpha| = k} \frac{k}{\alpha!} (x-y)^\alpha \int_0^1 (1-t)^{k-1} \partial^\alpha \varphi(\cancel{tx+}(1-t)y)^{\downarrow}$$

pour $k = 1$ on a :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{i=1}^N (x_i - y_i) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(tx + (1-t)y)\,dt \,; \quad [x,y] \subset \Omega.$$

Support d'une fonction continue.

Le support d'une fonction continue $\varphi \in C^0(\Omega)$ est l'ensemble.

$$\operatorname{Supp} \varphi = \overline{\{x \in \Omega ;\ \varphi(x) \neq 0\}}$$

on déduit les propriétés suivantes.

(a) $\operatorname{Supp} \varphi = \mathcal{O}^c$ où $\mathcal{O}$ est le plus grand ouvert de Ω sur lequel la fonction φ est nul, c désigne le complémentaire de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{R}^N$.

(b) $\operatorname{Supp}(\varphi\psi) \subset \operatorname{Supp} \varphi \cap \operatorname{Supp} \psi$

(c) Pour $\varphi \in C^k(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq k$, $\operatorname{Supp} \partial^\alpha \varphi \subset \operatorname{Supp} \varphi$.

On note par $C_0^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ à support compact. Cet espace est dit espace des fonctions test. On le note parfois $\mathcal{D}(\Omega)$.

On note par $C_K^\infty(\Omega) = \{ \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$ tel que $\operatorname{Supp} \varphi \subset K \}$

Remarque : l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ n'est pas reduit à zéro, En effet soit

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-|x|^2}{1-|x|^2}\right) & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^N$$

il est claire que $\varphi_0 \in C_0^\infty(\Omega)$; $\varphi \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,dx > 0$.

Topologie sur $C_0^\infty(\Omega)$.

Tout d'abord, on sait qu'il existe une suite des compacts K_i $i \in \mathbb{N}$ tels que 1) $K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$ 2) $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overset{\circ}{K}_i$ 3) $\forall K$ compact de Ω, $\exists$ $i_0 \geq 1$ tel que $K \subset K_{i_0}$.

pour prouver l'existence des Compacts K_i, il suffit de choisir

$$K_i = \{ x \in \Omega \,;\, |x| \leq i \text{ et } d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{i} \}$$

où $d(x, \Omega^c) = \inf_{y \in \Omega^c} d_e(x, y)$; Ω^c est le complémentaire de Ω dans $\mathbb{R}^N$

et d_e est la distance Euclidienne,

Sur chaque sous espace $C^l_{K_i}(\Omega)$ de $C^l(\Omega)$; on définit une semi-norme par :

$$P_{i,l}(\varphi) = \max_{|\alpha| \leq l} \max_{x \in K_i} |D^\alpha \varphi(x)| \,; \quad i \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}$$

ensuite, on définit une distance sur l'espace $C^l(\Omega)$ par :

$$d_l(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{P_{i,l}(\varphi - \psi)}{1 + P_{i,l}(\varphi - \psi)} \,;$$

pour $\varphi, \psi \in C^l(\Omega)$. l'espace $C^l(\Omega)$ est complet par cette distance ; et les sous-espaces sont fermés donc complets, $l \in \mathbb{N}$

Maintenant on va définir une nouvelle distance sur $C^\infty(\Omega)$ par

$$d_\infty(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{P_{i,i}(\varphi - \psi)}{1 + P_{i,i}(\varphi - \psi)}$$

pour $\varphi, \psi \in C^\infty(\Omega)$, on a aussi $C^\infty(\Omega)$ est complet par cette nouvelle distance ; mais l'espace $C^\infty_0(\Omega)$ n'est pas complet ; en effet. soit $f : x \to e^{-x^2}$ et soit χ_n une fonction valant 1 sur $[-n, n]$ et 0 hors de $[-2n, 2n]$; alors la suite $\chi_n f$ est de Cauchy dans $C^\infty_0(\Omega)$; elle converge vers f simplement, mais comme f n'est pas dans $C^\infty_0(\Omega)$, elle ne converge pas dans $C^\infty_0(\Omega)$ vers la fonction f, Donc $C^\infty_0(\Omega)$ n'est pas complet.

Les espaces $C^\infty_K(\Omega)$, sont complets par la distance d_∞ ; En effet $C^\infty_K(\Omega)$ est fermé comme un sous espace de $C^\infty(\Omega)$; donc complet.

Montrons la réciproque. Soit (φ_n) une suite qui converge vers 0 dans $C_0^\infty(\Omega)$. Soit K un compact qui contient tous les supports φ_n. Par la définition de la convergence dans $C_0^\infty(\Omega)$ on a : pour tout $m \in \mathbb{N}$, $P_{K,m}(\varphi_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Alors $|\langle T, \varphi_n \rangle| \leq C_{K,m} P_{K,m}(\varphi_n)$ qui converge vers zéro, quand $n \to \infty$. Donc T est une distribution.

<u>Remarque</u> : cette caractérisation de la distribution sera constamment utilisé par la suite - elle même directement à la notion d'ordre d'une distribution.

On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions.

Définition : Une forme linéaire T sur $C_0^\infty(\Omega)$ est une distribution d'ordre fini au plus m sur Ω lorsqu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout compact K de Ω, il existe $C_K > 0$ telle que, pour tout fonction test $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset K$

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K P_{K,m}(\varphi).$$

le plus petit entier m possible est appelé l'ordre de la distribution T.

c'est à dire ; l'ordre de T est le plus petit nombre de dérivées qu'il nous faut pour contrôler l'action de T sur les fonctions Test.

Donc, on définit une topologie, dit topologie limite inductive stricte, sur $C_0^\infty(\Omega)$ par :

φ_n converge vers φ dans $C_0^\infty(\Omega)$ quand n tend vers l'infini si et seulement si :

1) $\exists$ un compact K de Ω, tel que $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}$
2) $P_{K,m}(\varphi_n - \varphi)$ converge vers zéro, $\forall m \in \mathbb{N}$ où

$$P_{K,m}(\varphi) = \max_{|\alpha| \leq m} \max_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|$$

Remarque : la suite des semi-normes $P_{K,m}$ est croissante par rapport à m

Déf : $T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ est une distribution si $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$ alors $\langle T, \varphi_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle T, \varphi\rangle$.

Proposition : une forme linéaire T sur $C_0^\infty(\Omega)$ est une distribution ssi, pour tout compact K de Ω, $\exists\, m \in \mathbb{N}$, et $C_{K,m} > 0$; ~~supp~~ $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\operatorname{supp}\varphi \subset K$, on a

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C_{K,m} P_{K,m}(\varphi).$$

Démonstration : supposons que T est une distribution, fixons un compact K de Ω pour lequel, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall C > 0$; $\exists \varphi \in C_K^\infty$; $|\langle T, \varphi\rangle| > C P_{K,m}(\varphi)$. Prenons, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $C = m$, $\exists \varphi_m \in C_K^\infty(\Omega)$ telle que $|\langle T, \varphi_m\rangle| > m P_{K,m}(\varphi_m)$. Posons $\psi_m = \dfrac{\varphi_m}{\langle T, \varphi_m\rangle}$

Alors $\langle T, \psi_m\rangle = 1$ et $\operatorname{supp}\psi_m \subset K$. Comme la suite $P_{K,m}$ est croissante par rapport à m ; ie $P_{K,m}(\varphi) > P_{K,\ell}(\varphi)$ si $m > \ell$.

donc $P_{K,m}(\psi_m) \leq \frac{1}{m} \longmapsto 0$; ie $P_{K,\ell}(\psi_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ $\forall \ell \in \mathbb{N}$

Donc $\psi_m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ dans $C_K^\infty(\Omega)$. c'est à dire $\psi_m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ dans $C_0^\infty(\Omega)$ et comme $\langle T, \psi_m\rangle = 1$ ce qui contredit que T est une distribution