T. D. N° 5

Exercice 1

Un laser émet une radiation rouge de longueur d'onde $\lambda_1 = 0{,}6329923 \pm 10^{-7}$ µm. Calculer la longueur d'onde λ_2 du rayonnement émis dans l'air d'indice $n_2 = 1{,}00028 \pm 10^{-5}$.

Exercice 2

On donne l'expression du champ électrique d'une onde lumineuse monochromatique sous la forme d'une onde plane:

$$E(x,t) = E_0 \cos(\omega . t - k . x)$$

1. Démontrer que E(x, t) est une solution de l'équation de d'Alembert
2. Trouver l'expression du champ magnétique B(x, t)

Exercice 3

On considère un point source O émettant une onde lumineuse monochromatique dans un milieu homogène, isotrope et transparent. Le champ électrique au point source s'écrit :

$$E(O,\ t) = E_0 \cos(\omega t)$$

1. Quelle est la forme des surfaces d'onde ?

2. Donner l'expression de la surface d'onde dont la différence de phase avec la source est φ.

3. Comment obtenir une onde plane avec une source ponctuelle ?

Exercice 4

On considère une onde monochromatique de pulsation ω, dont le vecteur d'onde est par définition $\vec{k} = k_1 \vec{z} + i k_2 \vec{y}$ (k_1 et k_2 sont des constantes réelles positives). On étudie la propagation de cette onde dans l'air.

1. Peut-on dire que cette onde est plane ?

2. Trouver la relation, dite relation de dispersion, entre k_1, k_2, ω et c.

3. Indiquer le sens de propagation de l'onde et donner sa vitesse de phase V_ϕ définie par $V_\phi = \dfrac{\omega}{\mathcal{R}e(k)}$ (où $\mathcal{R}e$ désigne la partie réelle). Comparer la vitesse de phase à c, vitesse de l'onde dans l'air ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s).

4. Que traduit le comportement de $\vec{E}$ avec y ?

Corrigé

Solution exercice 1

La fréquence f de l'onde étant conservée, on a $f = \frac{v}{\lambda}$, où v est la vitesse de l'onde dans le milieu considéré : $v = \frac{c}{n}$ (c vitesse de l'onde dans le vide et n indice de réfraction du milieu). La longueur d'onde λ_1 étant donnée dans le vide, on a :

$$f = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{n_2\lambda_2}$$

On en déduit :

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{n_2} = 0{,}6328151\ \mu\text{m}$$

La précision sur la valeur de λ_2 est obtenue en différentiant le logarithme de l'expression ci-dessus (dérivée logarithmique) :

$$\frac{d\lambda_2}{\lambda_2} = \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} - \frac{dn_2}{n_2}$$

On passe des différentielles à l'incertitude Δ en sommant les valeurs absolues :

$$\frac{\Delta\lambda_2}{\lambda_2} = \frac{\Delta\lambda_1}{\lambda_1} + \frac{\Delta n_2}{n_2}$$

Avec $\Delta\lambda_1 = 10^{-7}$ et $\Delta n_2 = 10^{-5}$, on obtient $\Delta\lambda_2 = 10^{-7}$. On a finalement :

$$\lambda_2 = 0{,}6328151 \pm 10^{-7}\ \mu\text{m}$$

Solution exercice 2

On dérive par rapport au temps et par apport à x, on remplace dans l'équation de D'Alembert.

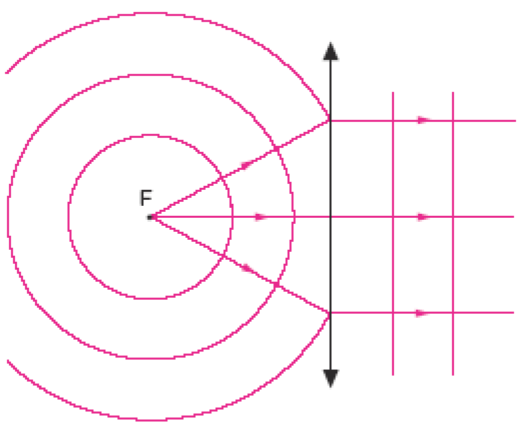
Solution exercice 3

1. Une source ponctuelle émet une onde sphérique dans un milieu homogène isotrope : les surfaces d'onde sont des sphères de centre O.

2. L'amplitude de l'onde dépend de la position du point M sur la surface d'onde considérée. Puisque l'intensité lumineuse est conservée, l'amplitude décroît au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la source. Notons E_M l'amplitude du champ électrique sur la surface d'onde considérée. La phase de l'onde correspond à la propagation de l'onde (la phase s'écrit $(\omega t - kr)$ pour une onde sphérique). Si φ désigne la différence de phase entre le point considéré et la source, la surface d'onde cherchée a pour équation $\varphi = kr$. Finalement, le champ électrique s'écrit :

$$E(M,\ t) = E_M \cos(\omega t - \varphi)$$

3. Lorsqu'on se place très loin de la source, les surfaces d'onde sphériques ont un rayon de courbure très important ; on peut donc les assimiler localement à des droites : on retrouve les fronts d'onde d'une onde plane. C'est ce qui se passe par exemple avec les ondes lumineuses émises par le Soleil au niveau de la Terre. Une façon plus rigoureuse de générer une onde plane à partir d'une source ponctuelle est de placer la source dans le plan focal objet d'une lentille convergente : le faisceau émergeant de la lentille est un faisceau de rayons parallèles correspondant à une onde plane.



Solution exercice 4

1. Remarquons que le champ électrique associé à l'onde évanescente peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E_0} \exp\left[\mathrm{i}\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\right] \\ &= \vec{E_0} \exp\left[\mathrm{i}\left(\left(k_1\vec{z} + \mathrm{i}k_2\vec{y}\right)\left(x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}\right) - \omega t\right)\right] \\ &= \vec{E_0} \exp\left(-k_2 y\right) \exp\left[\mathrm{i}\left(k_1 z - \omega t\right)\right]\end{aligned}$$

Il s'agit d'une onde plane se propageant dans la direction Oz. Elle est dite non uniforme puisque son amplitude décroît avec y.

2. L'équation de propagation vérifiée par $\vec{E}$ dans un milieu homogène isotrope d'indice n s'écrit :

$$\Delta\vec{E} = \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Elle conduit, en projection sur $\vec{x}$ et avec $n = 1$, à :

$$\Delta E = -\frac{\omega^2}{c^2}E$$

Avec $\Delta E = (k_2^2 - k_1^2)E$, la relation de dispersion s'écrit :

$$k_1^2 - k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

3. Le terme de phase en $(k_1 z - \omega t)$ traduit une propagation vers les $z > 0$ ($k_1 > 0$), à la vitesse de phase :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_1}$$

D'après la relation de dispersion, $k_1 > \frac{\omega}{c}$, donc $V_\phi > c$.

4. L'amplitude du champ $\vec{E}$ décroît lorsque y croît. L'inverse de k_2 s'apparente à une profondeur de pénétration : on parle d'onde évanescente.