Chapter 3: Reduction of quadratic forms

Pr. H. Zekraoui

March 5, 2025

1 Introduction

The reduction of a quadratic form q is the elimination of the terms of the mixed products in the algebraic expression of q to obtain a sum of squares with coefficients only, that is to say we are looking for a basis where the associated matrix of q in this basis is diagonal.

The reduction is based on two approaches, one is orthogonality, precisely, we proceed by the Gram-Schmidt method to obtain an orthogonal (orthonormal) basis for the quadratic form from a given basis, then we write the form q in this basis. The other we proceed by the completion of the squares in the algebraic expression of q. This method is due to Gauss, as some attribute it to Lagrange.

The goal of the reduction in addition to facilitating the matrix calculation, is to find the signature of q to calssify it.

Throughout chapter E a vector space of dimension n on $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$), q a quadratic form on E and ■ its polar form.

Definition 1 *The quadratic form q is said to be reduced to the diagonal form if there exists a basis in which*

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2$$

where the x_i are the coordinates of X in this basis.

2 Reduction by orthogonality

Definition 2 *Let $\{v_1, ..., v_n\}$ be a basis for E. The basis is said to be orthogonal for q if $\varphi(v_i, v_j) = 0$, $\forall i \neq j$, the basis is said to be orthonormal if in addition $q(v_i) = 1$.*

Lemma 3 *An orthogonal family containing no isotropic vector is free; in particular any orthonormal family is free.*

(Chapter head:)Réduction des formes quadratiques

3 Introduction

La réduction d'une forme quadratique q s'agit de l'élimination des termes des produits mixtes dans l'expression algébrique de q pour obtenir une somme des carrées avec des coefficients seulement, c'est-à-dire on cherche une base où la matrice associée de q dans cette base est diagonale.

La réduction repose sur deux approches, l'une est l'orthogonalité, précisément, on procède par la méthode de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthogonale (orthonormée) pour la forme quadratique partir d'une base donnée, ensuite on écrit la forme q dans cette base. L'autre on procède par la complétion des carrés dans l'expression algébrique de q. Cette méthode est due à Gauss, comme certains l'attribuent à Lagrange.

Le but de la réduction en plus de faciliter le calcul matriciel, est de trover la signature de q pour la calssifier.

Dans tout le chapitre E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et q une forme quadratique sur E et φ sa forme polaire

Definition 4 *La forme quadratique q est dite réduite à la forme diagonale s'il existe une base dans laquelle $q(X) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2$ où les x_i sont les coordonnées de X dans cette base.*

4 Réduction par l'orthogonalité

Definition 5 *Soient $\{v_1, ..., v_n\}$ une base de E. La base est dite orthogonale pour q si $\varphi(v_i, v_j) = 0$, $\forall i \neq j$, la base est dite orthonormée si de plus $q(v_i) = 1$.*

Lemma 6 *Une famille orthogonale ne contenant pas de vecteur isotrope est libre; en particulier toute famille orthonormée est libre.*

Proof. Soit $\{v_1, ..., v_n\}$ un ensemble orthogonal pour q, Soient α_1, ..., $\alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$. Alors

$$0 = \varphi\left(v_j, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(v_j, v_i) = \alpha_i \varphi(v_i, v_i)$$

Comme $\varphi(v_i, v_i) \neq 0$, alors $\alpha_i = 0$. ■

Proposition 7 *Les conditions suivantes sont équivalents*

i) *$\{v_1, ..., v_n\}$ une base orthogonale (orthonormée) pour q.*

ii) *La matrice associée à q dans la base $\{v_1, ..., v_n\}$ est diagonale.*

iii) *$\forall x \in E$, $q(x) = \sum_{i=1}^{n} q(v_i) x_i^2$ (resp. $q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$), où $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$*

Proof. On a la matrice associée à q dans la base $\{v_1, ..., v_n\}$ est $(\varphi(v_i, v_j))_{n\times n}$, d'où $\varphi(v_i, v_j) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq j \\ q(v_i) & \text{pour } i = j \end{cases}$ ■

Ainsi de la proposition et de la définition 4, la forme q est réduite à la forme diagonale. Le théorème qui suit nous montre qu'on peut toujours réduire une forme quadratique quelconque à la forme diagonale.

Theorem 8 *(Processus de Gram-Schmidt) Il existe des bases de E orthogonales pour* ■.

Proof. Soit $\{v_1, ..., v_n\}$ une base de E. On pose

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= a_{21}u_1 + v_2 \\ &\vdots \\ u_i &= a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \cdots a_{i(i-1)}u_{i-1} + v_i,\ i = \overline{2,n} \end{aligned}$$

Par une vérification directe, nous avons l'ensemble $\{u_1, ..., u_n\}$ est une base de E. Maintenant, nous allons chercher les coefficients a_{ij} pour que la base soit orthogonale.

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(u_2, u_1) = a_{21}\varphi(u_1, u_1) + \varphi(v_2, u_1) \Rightarrow a_{21} = \frac{-\varphi(v_2, u_1)}{q(u_1)} \\ 0 &= \varphi(u_3, u_1) = a_{31}\varphi(u_1, u_1) + \varphi(v_3, u_1) \Rightarrow a_{31} = \frac{-\varphi(v_3, u_1)}{q(u_1)} \\ 0 &= \varphi(u_3, u_2) = a_{32}\varphi(u_2, u_2) + \varphi(v_3, u_2) \Rightarrow a_{32} = \frac{-\varphi(v_3, u_2)}{q(u_2)} \end{aligned}$$

Nous continuons le processus, nous obtenons

$$a_{ij} = \frac{-\varphi(v_i, u_j)}{q(u_j)} \text{ pour } i = \overline{2,n},\ j = \overline{1, n-1}$$

■

Remark 9 *Si la forme quadratique est définie positive (i.e. $\forall X \in E$, $q(X) > 0$), alors il existe une base orthonormée.*

Proof. Il suffit de continuer le processus de Gram-Schmidt en posant

$$\epsilon_i = \frac{u_i}{\sqrt{q(u_i)}} \text{ pour } i = \overline{1,n}$$

Ainsi $\{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\}$ est une base orthonormée (laissons la vérification aux étudiants). ■

Example 10 *En procédant par la méthode de Gram-Schmidt, transformer les vecteurs* $v_1 = (1,1,0)$*,* $v_2 = (-1,0,1)$*,* $v_3 = (0,1,2)$ *aux vecteurs deux à deux orthogonaux pour la forme quadratique*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ q(X) = xy + xz$$

et réduire la forme q *à la forme diagonale.*

Soient u_1*,* u_2*,* $u_{n}3$ *définis comme dans la preuve du théoréme 8, alors*

$$\forall X = (x_1,x_2,x_3), Y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3, \varphi(X,Y) = \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_1y_3 + \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{1}{2}x_3y_1$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1 = (1,1,0),\\
u_2 &= v_2 - \frac{\varphi(v_2,u_1)}{q(u_1)}u_1 = (-1,0,1) - \frac{0}{1}u_1 = (-1,0,1)\\
u_3 &= v_3 - \frac{\varphi(v_3,u_1)}{q(u_1)}u_1 - \frac{\varphi(v_3,u_2)}{q(u_2)}u_2\\
&= (0,1,2) - \frac{3}{2}(1,1,0) - \frac{3}{2}(-1,0,1) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Les vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$*, donc pour*

$$X = z_1u_1 + z_2u_2 + z_3u_3,$$

nous avons

$$q(X) = q(u_1)z_1^2 + q(u_2)z_2^2 + q(u_3)z_3^2 = z_1^2 - z_2^2$$

Comme la forme est non définie (car $q(u_3) = 0$*), alors nous avons une base orthogonale seulement.*

5 Réduction par complétion des carrés (Méthode de Gauss)

Pour faciliter la compréhension des étudiants nous commençons par une forme quadratique sur un espace de dimension 2.

Soit

$$\forall X = (x,y) \in E, q(X) = ax^2 + bxy + cy^2$$

- Supposons que l'un des coefficients a ou c est non nul, disons a. Alors,

$$q(X) = a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)y^2$$

- Si $a = c = 0$, alors $b \neq 0$ sinon $q = 0$. On pose xy sous la différence de deux carrés (la règle du parallélogramme):

$$xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2$$

Ainsi nous avons

$$q(X) = \frac{b}{4}(x+y)^2 - \frac{b}{4}(x-y)^2$$

Ainsi il existe α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{K}$ et deux formes linéaires l_1, $l_2 \in E^*$, tels que

$$q(X) = \alpha_1 (l_1(X))^2 + \alpha_2 (l_2(X))^2$$

On dit que q est décomposée en somme des carrés de deux formes linéaires. Si nous voulons chercher la nouvelle base, il suffit d'écrire les anciennes coordonnées x et y en fonction des nouvelles coordonnées l_1 et l_2 du vecteur X pour obtenir la matrice de passage P de l'ancienne base à la nouvelle base en prenant les colonnes de P comme vecteurs de la nouvelle base.

Dans l'exemple précédent, Premier cas, nous avons

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2b}{4ac-b^2} \\ 0 & \frac{4a}{4ac-b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi nous avons la nouvelle base $\left\{v_1(1,0), v_2 = \left(-\frac{2b}{4ac-b^2}, \frac{4a}{4ac-b^2}\right)\right\}$. Laissons le deuxième cas pour les étudiants.

Maintenant nous pouvons généraliser la méthode pour la dimension n. Soit $q(X) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$. Il existe un coefficient d'un carré non nul (sinon nous appliquons la règle du parallélogramme sur un coefficient d'un terme mixte pour obtenir un carré. Donc nous pouvons toujours supposer qu'il existe d'un coefficient d'un carré non nul, disant a_{11}. Alors pour $n = 1$ la propriété est vraie car

$$q(X) = a_{11} x^2$$

Nous avons déjà démontré la propriété pour $n = 2$. Suppossons qu'elle est vraie pour toute forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension $< n$

$$q(X) = \frac{1}{a_{11}} \left(x_1 + \frac{a_{12}}{2a_{11}} x_2 + \cdots \frac{a_{1n}}{2a_{11}} x_n \right)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij} x_i x_j,$$

d'où il existe une forme linéaire l_1 et q' tels que

$$l_1(X) = x_1 + \frac{a_{12}}{2a_{11}} x_2 + \cdots \frac{a_{1n}}{2a_{11}} x_n, q'(X) = \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij} x_i x_j$$

Remarquons que q' est une forme quadratique sur un espace de dimension $n-1$, donc l'hypothèse de récurrence nous donne

$$q'(X) = \sum_{i=2}^{n} \alpha \left(l_i(X)\right)^2$$

Par conséquent

$$q(X) = \alpha_1 \left(l_1(X)\right)^2 + \cdots \alpha_n \left(l_n(X)\right)^2$$

6 Signature et classification d'une forme quadratique

De cette section nous introduisons la notion de la signature et présentons sa relation avec le rang. Nous présentons le théorème d'inertie de Sylvester (qui est la classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$).

6.1 Signature d'une forme quadratique

Definition 11 *la signature d'une forme quadratique q sur un espace vectoriel de dimension n est le couple (p, s) où p est le nombre de coefficients positifs dans la forme diagonale de q et s le nombre de coefficients négatifs. Les formes quadratiques ayant la même signature sont dites équivalentes.*

Ainsi nous pouvons classer les forme quadratiques comme suit:

1. La forme est définie positive(positive) $\Rightarrow p = n$ ($p \leq n$ et $s = 0$).
2. La forme est définie négative (négative) $\Rightarrow s = n$ ($s \leq n$ et $p = 0$)
3. La forme est non définie $\Rightarrow p < n$ où $s < n$
4. On a $p + s = rang(q)$, ainsi la forme est non dégénérée $\Rightarrow p + s = n$
5. De 1 et de la remarque 9, il existe une base orthonormée pour $q \Leftrightarrow p = n$.

En effet, $p = n \Leftrightarrow$ tous les coefficient dans la forme diagonale sont > 0. Il suffet de diviser sur chaque coefficient pour obtenir la forme $q(X) = \sum_{i=1}^{n} l_i^2$ où les l_i sont les coordonnées de X dans la base finale.

6.2 Classification sur le corps des complexes $\mathbb{C}$

Theorem 12 *Toute formes quadratique sur $\mathbb{C}$ est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Proof. En effet, Soit (p, s) la signature de q, alors appliquons la réduction par l'une des méthodes précédentes, nous avons

$$q(X) = a_1 z_1^2 + \cdots a_r z_r^2$$

où $r = p + s$ le rang de q et a_1, ..., a_p les coefficients positifs et a_{p+1}, ..., a_r les coefficients négatifs.

Comme les $a_i \in \mathbb{C}$, alors les $\sqrt{a_i} \in \mathbb{C}$. Possons

$$t_i = \sqrt{a_i} z_i$$

nous obtenons

$$q(X) = t_1^2 + \cdots t_r^2$$

Soient $A_r = diag(a_1, ..., a_r)$ et P la matrice de passage de $\{u_1, ..., u_n\}$ la base orthogonale pour q à la nouvelle base orthogonale obtenue par les délatations $z_i \mapsto \sqrt{a_i} z_i$.

$$P^T \begin{pmatrix} A_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■

6.3 Classification sur le corps des réels $\mathbb{R}$

Theorem 13 *(Théorème d'inertie de sylvester)Toute formes quadratique sur* $\mathbb{R}$ *de signature* (p, s) *est représentée par la matrice* $\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_s & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Proof. En effet de la preuve précédente pour les coefficients négatifs on prend les racines carrées de leurs opposés. ■

Remark 14 *De tout ce qui précède nous avons les remarques suivantes:*

1. *Le théorème de Sylvester montre que la signature d'une forme quadratique ne dépend pas de la base choisie. Donc la signature est un invariant de* q*. Ainsi les formes équivalentes sur* $\mathbb{R}$ *sont les formes qui ont la même signature, tandis que les formes équivalentes sur* $\mathbb{C}$ *sont celles qui ont le même rang.*

2. *À l'aide d'une forme quadratique nous pouvons toujours définir le produit scalaire standard sur l'espace entier ou sur un sous espace de dimension* r*.*

3. *Tout produit scalaire est équivalent au produit scalaire standard.*

7 Diagonalisation des matrices symétriques dans une base orthonormée des vecteurs propres

Cette section explique clairement aux étudiants la relation entre la réduction des formes quadratiques et la diagonalisation des matrices symétriques déjà étudiée dans le premier semestre, ce qui leurs permet de posséder les différentes techniques de la diagonalisation et choisir la méthode efficace pour tout cas.

De la proposition 7 et du théorème 8, nous avons le résultat suivant:

Theorem 15 *Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée des vecteurs propres.*

7.1 Pratiquement comment procède t-on?

1. De la proposition 7 et du théorème 8 nous savons que la matrice est diagonalisable sur son corps de base. Donc d'après le théorème de la diagonalisation des endomorphismes (matrices carrées), nous somme sûre que nous avons une base de E formée des vecteurs propres.

2. Cherchons les valeurs propres λ_1, ..., λ_n et les vecteurs propres de la matrice en question.

3. À l'aide du processus de Gram-Schmidt nous transformons cette base à une base orthonormée $\{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\}$ pour le produit scalaire standard (Cette transformation préserve les espaces propres, car les nouveaux vecteurs propres $\epsilon_1, ..., \epsilon_n$ sont juste des combinaisons linéaires des anciens).

4. La matrice dans cette base est diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres propres associées.

5. Comme la matrice est symétrique, alors elle est d'une coté associe d'une forme quadratique et d'autre coté est associe à un endomorphisme. D'où, si on note cette matrice par A et la matrice de passage à la base orthonormée des vecteurs propres par P, alors on a
$$P^T AP = diag\,(\lambda_1, ..., \lambda_n) = p^{-1}AP,$$
ce qui donne
$$q\,(x) = \lambda_1 t_1^2 + \lambda_2 t_2^2 + \cdots + \lambda_n t_n^2,$$
où
$$x = t_1\epsilon_1 + t_2\epsilon_2 + \cdots t_n\epsilon_n \in E \text{ et } P^{-1} = P^T.$$

Ainsi nous avons un résultat et une définition:

Theorem 16 *Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle A sont toutes réelles. elles sont totalement positives (positive) si A est définie positive, i.e. $\forall x \in E$, $x^T Ax > 0$ (positive, i.e. $x^T Ax \geq 0$).*

Definition 17 *Une matrice inversible P est dite orthogonale si ses colonnes forment une base orthonormée. L'endomorphisme associé à une matrice orthogonale est dit orthogonal.*

Nous laissons aux étudiants de montrer le lemme suivant:

Lemma 18 *Une matrice P est orthogonale* $\Leftrightarrow P^{-1} = P^T \Rightarrow \det P = \pm 1$.

8 Série des exercices

Exercise 19 *Procéder par la méthode de Gauss (la complétion d'un carré) pour transformer à la forme diagonale les formes quadratiques suivantes et déterminer leurs signatures, leurs rangs, la nature des formes (définies, positives, négatives, non définies) et les nouvelles bases.*

1.
$$\forall X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, q(X) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2$$

2.
$$\forall X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, q(X) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

3.
$$\forall X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, q(X) = x_1x_2 + x_3x_4$$

4.
$$\forall X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, q(X) = 2z^2 + 2xy - xz - 4yz - 6zt.$$

5.
$$\forall X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, q(x, y, z) = x^2 + 7y^2 + 6xy - 2xz + 8yz$$

Exercise 20 *Soit $a \in \mathbb{R}$*

$$\forall X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, q_a(X) = a\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1$$

1. *Classifier la forme quadratique q selon les valeurs de a.*
2. *Montrer qu'il existe une même base de $\mathbb{R}^3$ qui est orthogonale pour tous les q_a.*
3. *Soit D la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(2, 2, 1)$. Trouver une base de l'orthogonal $D^\perp$ et de D pour q_0. Est-ce que D et $D^\perp$ sont supplémentaires ?*
4. *Montrer que la forme quadratique q_a est définie positive si et seulement si $a > 2$.*

Exercise 21 *Discuter, suivant la valeur du nombre réel a, le rang et la signature de la forme quadratique q.*

$$\forall X = (x_{1,}x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, q_a\left(X\right) = x_1^2+\left(1+a\right)x_2^2+\left(1+a+a^2\right)x_3^2+2x_1x_2-2ax_2x_3$$

Exercise 22 *Dans une base orthonormée des vecteurs propres diagonaliser chaque forme quadratique dans cette série.*