Chapitre 2 : Modélisation des courbes

1. **Description géométrique** : La CAO est l'acronyme de Conception Assistée par Ordinateur, elle est à la base une description numérique tridimensionnelle de la géométrie d'une pièce (points, arrêtes, surfaces et volume). Il existe trois types de description de cette géométrie :
   - description filaire : adaptée aux surfaces simples : planes de révolution ou tuyaux
   - description surfacique
   - description volumique

2. **Codage des Courbes** : Les Courbes définissant les arrêtes ou les frontières des surfaces, sont codées à l'aide de formalismes mathématiques différents. Pour décrire une courbe il existe deux types de représentation :
   - On peut donner un certains nombre de points par lesquels passe la courbe (complexité si le nombre de points est important)
   - On peut donner un ensemble de pôles et le poids associé à chacun : **courbe paramétrique** . La courbe passe par les pôles extrêmes et ne passe pas en général par les autres pôles. les courbes que l'on trouve principalement sont : les courbes quelconques , les coniques ouvertes , les coniques fermées et les segments de droite.

3. **les courbes quelconques :** de la plus simple à la plus complexe, on trouve :
   - Courbes de Bézier paramétrées (le paramètre u associé aux pôles évoluant dans l'intervalle u=[0,1])
   - Courbes de Bézier polynomiales (poids associés aux pôles sont des polynômes)
   - Courbes de Bézier rationnelles (poids associés aux pôles sont des fractions rationnelles du paramètre u)
   - les splines : Une spline est une courbe paramétrée définie par des pôles, naturellement composée de plusieurs segments de courbe. Le paramètre n'évolue pas impérativement sur l'intervalle [0,1] , les poids associés aux pôles sont des polynômes.
   - les B-splines : Une B-spline est une famille particulière de splines, dont les poids sont des polynômes définis par des relations de récurrence.
   - les NURBS sont des B-splines rationnelles permettant de gérer de manière souple les continuité (en passage, en tangence et en courbure) entre segments de courbe consécutifs.

4. **les coniques ouvertes** : comme les arcs de cercle, d'ellipse, de parabole et d'hyperbole sont généralement décrites par des courbes de Bézier rationnelles à trois pôles ou des B-splines rationnelles à trois pôles.

5. **les coniques fermées** : Comme les cercles et les ellipses, sont en général codées comme des B-splines à N pôles.

6. **les segments de droite** : est défini par ses deux points d'extrémités, codé comme une courbe de Bézier polynomiale à deux pôles ou une spline polynomiale à deux pôles.

Chap : Représentation Mathématique des Courbes.

1. Introduction : On peut modéliser une courbe passant par deux points par un polynôme d'ordre un, mais quant le nombre de points augmente on doit utiliser plusieurs polynômes d'ordre un pour pouvoir englober tous les points de passage et assurer la jonction et la continuité entre ces points. Ce qui demande un espace mémoire important.

2. les Courbes paramétrique : On peut utiliser l'approche paramétrique qui utilise des polynômes d'ordre superieur (généralement trois) utilisant des (pôles) points et des poids associés aux points : c'est la représentation paramétrique, d'équation :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad ; \quad t : \text{paramètre}$$

. Pour approximer une courbe qui passe (un) $(n+1)$ point, on utilise la forme polynomiale paramétique suivante :

$$P(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \sum_{i=0}^{n} f_i(t)\, P_i .$$

où : $\begin{cases} P(t) = \text{Polynôme d'interpolation de la courbe.} \\ f_i(t) : \text{fonctions de pondération.} \\ P_i = \text{Points de Contrôle de la Courbe, } P_i(x_i, y_i, z_i). \end{cases}$

La Courbe passe par les pôles extrêmes et ne passe pas par les autres pôles. les Courbes que l'on trouve principalement sont : les courbes de Bezier et les B-splines.

2.1. les courbes de Bezier : Ce modèle développé par Bézier est défini tel que :

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\, P_i$$

avec : $B_{i,n} = C_i^n\, t^i (1-t)^{n-i}$, $C_i^n = \dfrac{n!}{i!\,(n-i)!}$

où : . $B_{i,n}$ sont les polynômes de Bernstein,

. P_i sont les points de contrôle . n : est le degré du po

$n+1$: est le nombre des points de contrôle (degré de la courbe

. le paramètre $t \in [0,1]$.

Exemples : . Pour 2 pts de Contrôle : ($\overset{P_0}{\overset{\uparrow}{i=0}}$ et $\overset{P_1}{\overset{\uparrow}{i=1}}$)

. La courbe est approximée par un polynôme d'ordre 1 :

$$P(t) = \sum_{i=0}^{1} B_{i,1}(t)\, P_i = B_{0,1}(t).P_0 + B_{1,1}(t).P_1$$

$$B_{0,1}(t) = C_0^1\, t^0 (1-t)^1 = \frac{1!}{0!\,(1-0)!}.t^0(1-t) = (1-t)$$

$$B_{1,1}(t) = C_1^1\, t^1 (1-t)^0 = \frac{1!}{1!\,(1-1)!}.t^1(1-t)^0 = t$$

donc : $\boxed{P(t) = (1-t)P_0 + t\,P_1}$ ← Interpolation linéaire.

. Pour 3 pts de Contrôle $\left\{\begin{array}{l} i=0 \to P_0 \\ i=1 \to P_1 \\ i=2 \to P_2 \end{array}\right\}$ la courbe est approximée par un polynômes d'ordre : 2. tel que :

$$P(t) = \sum_{i=0}^{2} B_{i,2}(t).P_i = B_{0,2}(t).P_0 + B_{1,2}(t)P_1 + B_{2,2}(t).P_2$$

$$B_{0,2}(t) = C_0^2\, t^0 (1-t)^2 = \frac{2!}{0!\,2!}.t^0.(1-t)^2 = (1-t)^2$$

$$B_{1,2}(t) = C_1^2\, t^1 (1-t)^1 = \frac{2!}{1!\,(2-1)!}.t^1(1-t)^1 = 2t(1-t)$$

$$B_{2,2}(t) = C_2^2\, t^2 (1-t)^0 = \frac{2!}{2!\,0!}.t^2(1-t)^0 = t^2$$

donc : $\boxed{P(t) = (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2}$ ← courbe de Bezier d'ordre 2.

• Pour quatre points de Contrôle (Courbe de Bezier Cubique) :

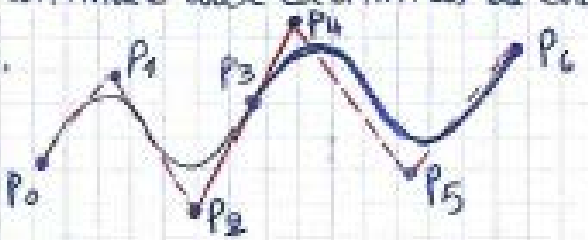
$$P(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3$$

sous forme matricielle :

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$P(t) = T^t \cdot M_{Bezier} \cdot P$: Ecriture condensée.

Pour des courbes avec beaucoup de points de Contrôle, on utilise des courbes de Bezier cubiques collées bout à bout, il faut donc assurer la continuité aux extrémités de chaque deux courbes adjaçante.



2.2. les B_splines : sont des courbes polynomiales cubiques de continuité C^2. Elles approximent un certain ensemble de points de Controle P_i, $i \in [0,m]$ avec une courbe Constituée de $(m-2)$ segments (morceaux) de courbe polynomiaux Q_i, $i \in [3,m]$. Chaque segment est fonction d'un paramètre $t = t_i : t_{i+1}$ et de 4 points de Contrôle.

le segment Q_i est defini par les 4 points :

P_{i-3}, P_{i-2}, P_{i-1} et P_i pour $t = t_i : t_{i+1}$

Exemple : Pour : $m = 6$ on a : $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ et P_6 et $m-2 = 4$ morceaux : Q_3, Q_4, Q_5 et Q_6

Q_3 : P_0, P_1, P_2, P_3 : pts de Contrôle et $t_3 \leq t \leq t_4$.
Q_4 : P_1, P_2, P_3, P_4 : " " $t_4 \leq t \leq t_5$.
Q_5 : P_2, P_3, P_4, P_5 : " " $t_5 \leq t \leq t_6$.
Q_6 : P_3, P_4, P_5, P_6 : " " $t_6 \leq t \leq t_7$.

. Si les t_i sont uniformément répartis sur l'ensemble des points de contrôle : $t_i = t_{i-1} + 1$ Alors on obtient :

des B.Splines cubiques uniformes de forme matricielle :

$$P(t) = [t^3 \ t^2 \ t \ 1] \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i-3} \\ P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_i \end{bmatrix}$$ avec : ~~[illegible]~~ $t < 1$

$$P(t) = T^t \cdot M_{B\text{-spline}} \cdot P$$

. Si les t_i ne sont pas répartis uniformément on parle des B.splines cubiques non uniformes.

Bibliographie :

[1]. "Représentation des courbes et des surfaces" . Uforma .

[2]. Marc Neveu . « Courbes et surfaces paramétriques »
Université de Bourgogne.