

Université d' Oum-El-Bouaghi
Faculté SENV, Département de M.I.
Contrôle de Logique Mathématique 2023

Pr. Dr. Zekraoui Hanifa _____

1. **Exercice (6 points)**

Donner les valeurs des formules logiques suivantes en précisant sa nature (Tautologie, antilogie, conséquence logique,....)

a. Pour tous propositions P et Q , On a la formule α :

$$\alpha : ((P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q))$$

b. Pour tous propositions P , Q et R On a la formule β :

$$\beta : \neg(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg(Q \wedge R)$$

Note: \neg : Négation

2. **Exercice (8 points)**

a. Montrer par disjonction des cas la propriété suivante:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} \exists r \in \{0, 1, 2, 3\}, n = 4k + r$$

b. Soit E un ensemble. Montrer que

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), C_E(A \cap B) = (A \Delta B) \cup C_E(A \cup B)$$

3. **Exercice (6 points)**

Citer les suivants:

- a. l'axiome du choix.
- b. Le théorème de Cantor-Bernstein.
- c. Le théorème de Cantor sur l'ensemble des parties.

Solution du contrôle de logique 2023

Solution de l'exercice 1

a. $\alpha : ((P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q))$

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$P \Rightarrow Q$	α
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0

Comme α est fausse par tout, alors α est une antilogie.

b. $\beta : \neg(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg(Q \wedge R)$

P	Q	R	$\neg P$	$Q \wedge R$	$\neg(Q \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R)$	$\neg(P \vee (Q \wedge R))$	$\neg P \wedge \neg(Q \wedge R)$	β
0	0	0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1	0	0	1

Comme β est vraie par tout, alors β est une tautologie.

Solution de l'exercice 2:

a. Comme $n \in \mathbb{N}$, alors n soit pair ou impair:

i) Pour n pair $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}, n = 2m$.

Comme $m \in \mathbb{N}$, alors m soit pair ou impair:

Pour m pair $\Rightarrow k \in \mathbb{N}, m = 2k$. Ainsi,

$$n = 4k \tag{1}$$

Pour m impair $\Rightarrow k \in \mathbb{N}, m = 2k + 1$. Ainsi,

$$n = 4k + 2 \quad (2)$$

ii) Pour n impair $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}, n = 2m + 1$.

Ainsi pour m pair:

$$n = 4k + 1 \quad (3)$$

Pour m impair

$$n = 4k + 3 \quad (4)$$

De *eq*(1), *eq*(2), *eq*(3) et *eq*(4), on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} \exists r \in \{0, 1, 2, 3\}, n = 4k + r$$

b.

$$\begin{aligned} C_E(A \cap B) &= \{x \in E \wedge x \notin (A \cap B)\} \\ &= \{x \in E \wedge ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \notin A \wedge x \notin B))\} \\ &= \{x \in A \wedge x \notin B\} \cup \{x \in B \wedge x \notin A\} \cup \{x \in E \wedge x \notin (A \cup B)\} \\ &= A \Delta B \cup C_E(A \cup B) \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3

Réviser votre cours (chapitre 2: Théorie des ensembles).