Chapitre1

1 Rédaction des preuves mathématiques

Définition 1 *Une démonstration (ou preuve) mathématique est un raisonnement logique qui utilise des résultats théoriques (des axiomes, définitions, propriétés, théorèmes, formules, . . .) déjà établis pour parvenir pas à pas à une conclusion*

Donc, pour chercher une démonstration, il faut partir des données de l'énoncé et essayer d'en déduire, grâce aux éléménts cités dans la définition 1, des conclusions.

Exemple 1 *Soit un cercle de centre O. Soient $[ab]$ un de ses diamètres et c un point appartenant à ce cercle, distinct de a et de b. Que peut-on dire du triangle acb ? Justifier.*

1.1 Principes de bases de rédaction d'une preuve mathématique

- La rigueur
- Le raisonnement déductif
- l'explicitation et le perfectionnement de méthodes de résolution

Solution 1 *Le triangle est isocèle rectangle*

Donc on a des étapes:

1. Observation du problème
2. Le reformuler en langage mathématique (par un dessin geométrique, un chéma, un algorithme, ou des équations)
3. Ces observations et formulations font appel aux éléments cités dans la définition 1
4. On applique les élément de manière logique (propositions reliées par des connecteurs logiques) pour arriver au résultat désiré (conclusion).

1.2 Quelques types de démonstration

- Démonstration **directe** (Exemple: D'après l'axiome de Peano, "tout entier est suivé par un autre entier" on conclu que l'ensemble des naturels est infini, en effet, $m \in \mathbb{N} \Rightarrow m+1 = n \in \mathbb{N} \Rightarrow l = n+1 \in \mathbb{N}, ...$).

- Démonstration **indirecte** (par l'absurde ou la contraposition) (Exemple: On suppose que $\mathbb{N}$ est fini, alors soit $n \in \mathbb{N}$ le dernier élément de $\mathbb{N}$ (le plus grand). D'après l'axiome de Peano, $n < n+1 \in \mathbb{N}$ ce qui contredit la maximalité de n).

- Une démonstration par un **contre-exemple**.

- Une démonstration par **disjonction de cas**.

- Une démonstration **constructive** (si elle inclut une construction ou un mode de recherche effectif des objets, par exemple résolution des équations, déterminer les points d'intersections, ...).

- Une démonstration **existentielle** (il s'agit de démontrer l'existence d'un objet sans le trouver explicitement, par exemple si le discriminant d'une équation de second degré sur $\mathbb{R}$ est positif, alors il existe deux solutions sans les trouver). Une démonstration par récurrence s'appuie sur une méthode de déduction spécifique (dite récurrence) pour affirmer qu'une assertion est démontrable pour tous les entiers naturels : elle consiste à démontrer l'assertion pour 0 (ou 1), puis à démontrer que de l'assertion pour l'entier n, on peut déduire l'assertion pour l'entier $n+1$.

- Une démonstration **probabiliste** utilise la théorie des probabilités pour démontrer l'existence certaine d'un objet.

- Une démonstration par **analyse-synthèse** consiste à étudier les propriétés de l'hypothétique solution d'un problème dont on cherche à prouver l'existence et l'unicité, jusqu'à identifier une seule solution possible, puis à montrer que ce candidat est effectivement solution.

- Une démonstration **combinatoire** peut se faire par double dénombrement ou en considérant une bijection bien choisie.

Remarque 1 *"sans restreindre la généralité ou sans perte de généralité" est une expression suivie par une supposition restrictive, indique que la démonstration se limite à un cas particulier, mais que les autres cas peuvent être établis par une démonstration analogue à celle du cas envisagé, ou même se ramener à ce cas (Exemple: l'équation* $x^2 + y^2 = z^2$ *a des solutions dans* $\mathbb{Z}$*. On peut supposer que les inconnus sont positifs, ou on peut supposer qu'ils sont premiers entre eux).*

2 Exemples de preuves mathématiques (TD)

2.1 Exemple d'un preuve directe

Exemple 2 *Utiliser les concepts du produit scalaire pour démontrer que pour toute entier* n*, on a*

$$\frac{n(n+1)}{2} \leq \sqrt{n(1+4+...+n^2)}$$

Exemple 3 *Démontrer que la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de terme général* $x_n = (-1)^n \frac{1}{2^n}$ *n'a pas de limite.*

Exemple 4 *Démontrer que la fonction* $f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 1-x & x & \neq 0 \\ 0 & x & = 0 \end{array} \right.$ *.n'est pas continue dans l'intervale* $[0,1]$*.*

2.2 Exemple d'un preuve indirecte (par l'absurde ou la contraposé)

Exemple 5 *Démontrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair possède une racine réelle.*

Exemple 6 *Démontrer l'irrationnalité de* $\sqrt{2}$*.*

Exemple 7 *Démontrer que tout polynôme à terme constant non nul n'admet pas zéro à comme racine.*

Exemple 8 *Démontrer que tout point du plan n'a qu'une seule projection orthogonale sur une droite de ce plan.*

Exemple 9 *Démontrer que la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge. Même question pour la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exemple 10 *Démontrer que si* a *et* b *sont deux entiers réels tels que* $a+ib = 0$, *alors* $a = b = 0$.

Exemple 11 *Soit* $n \geq 1$ *un entier naturel. On se donne* $n+1$ *réels* x_0, $x_1,\ldots,x_n$ *de* $[0,1]$ *vérifiant* $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$. *On veut démontrer par l'absurde la propriété suivante : Il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de* $\frac{1}{n}$.

Exemple 12 *Soit* n *un entier. Énoncer et démontrer la contraposée de la proposition suivante : Si* n^2 *est impair, alors* n *est impair.*

Exemple 13 *Démontrer par contraposition la propriété suivante, pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *: Si l'entier* (n^2-1) *n'est pas divisible par* 8, *alors l'entier* n *est pair.*

Exemple 14 *Démontrer par contraposition la propriété suivante, pour* $a \in \mathbb{R}$, $\forall \blacksquare > 0$, $|a| \leq \blacksquare \Longrightarrow a = 0$.

2.3 Raisonnement par récurrence

Exemple 15 *Démontrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

Exemple 16 *Démontrer que, pour tout entier* $n \geq 3$, *on peut trouver* n *entiers strictement positifs* $x_1,\ldots,x_n$, *deux à deux distincts, tels que*

$$\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} = 1$$

2.4 Raisonnement par disjonction de cas

Exemple 17 *Démontrer que, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leq x^2 - x + 1$. *Même question pour* $x - 1 \leq \sqrt{x+2}$ *(ici* $x \geq -2$*).*

Exemple 18 *Démontrer que si* n *est la somme de deux carrés, alors le reste de la division euclidienne de* n *par* 4 *est toujours différent de* 3.

2.5 Raisonnement par analyse-synthèse

Exemple 19 *Déterminer les réels xx tels que* $\sqrt{2-x} = x$.

(Raisonner par analyse-synthèse en donnant des conditions nécessaires que xx doit vérifier, puis en démontrant que ces conditions sont suffisantes).

Exemple 20 *Déterminer toutes les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivables et telles que, pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Exemple 21 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Démontrer que ff s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et somme d'une fonction impaire.*

3 Rédaction d'une preuve mathématique (exercices de synthèse)

Exercice 1 *Soit* $n \geq 1$ *un entier naturel. On se donne* $n+1$ *réels* x_0, x_1,... , x_n *de l'intervale* $[0, 1]$ *vérifiant* $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$. *On veut démontrer par l'absurde la propriété suivante : Il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de* $\frac{1}{n}$.

1. *Ecrire à l'aide de quantificateurs et des valeurs* $x_i - x_{i-1}$ *une formule logique équivalente à la propriété.*
2. *Ecrire la négation de cette formule logique.*
3. *Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété (on pourra montrer que* $x_n - x_0 > 1$*).*

Exercice 2 *(réccurrence double ou simple) On considère la suite* (u_n) *(suite de Fibonacci) définie par* $u_0 = u_1 = 1$ *et, pour tout* $n \geq 0$, $u_n+2 = u_n+u_{n+1}$.

1. *Démontrer que la suite* (u_n) *vérifie les propriétés suivantes :*

   a. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$;

   b. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^n$.

2. *Avez-vous utilisé une récurrence simple ou une récurrence double?*

Exercice 3 *(partage de carrés)*

1. *Démontrer qu'on peut partager un carré en* 4 *carrés, puis en* 6 *carrés, en* 7 *carrés, en* 8 *carrés.*

2. *Démontrer que si on peut partager un carré en* n *carrés, alors on peut le partager en* $n+3$ *carrés.*

3. *Démontrer qu'on ne peut pas partager un carré en* 2 *carrés, en* 3 *carrés, en* 5 *carrés.*

4. *Pour quelle(s) valeur(s) de* n *peut-on partager un carré en* n *carrés?*

http://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=bde/logique/raisonneme