# Équations différentielles

## Table des matières

# 1 Équation différentielle linéaire du premier ordre

## 1.1 Définition

**Définition 1 :** On appelle équation **différentielle linéaire du premier ordre** (E) sur un intervalle I, une équation qui peut se mettre sous la forme :

$$(\mathrm{E}) \;:\; y' + a(x)y = b(x)$$

où l'inconnue $y$ est une fonction de $x$ dérivable que l'on cherche à déterminer et où $a$ et $b$ sont deux fonctions continue sur un intervalle I

**Exemples :**

- $(\mathrm{E}_1) : \; y' + \dfrac{1}{x}y = x$ équation différentielle du premier ordre.
- $(\mathrm{E}_2) : \; y' = b(x)$ équation différentielle du premier ordre incomplète en $y$.
- $(\mathrm{E}_3) : \; y' - 2y = 0$ équation différentielle du premier ordre à coefficient constant sans second membre ou incomplète en $x$.
- $(\mathrm{E}_4) : \; y' + xy = 0$ équation différentielle du premier ordre sans second membre ou homogène.

## 1.2 Résolution de l'équation incomplète en $x$

**Théorème 1 :** Les solutions de l'équation différentielle $y' = b(x)$ incomplète en $y$ sur I sont toutes les fonctions $y : \; x \mapsto B(x)$ où $B$ est une primitive de la fonction $b$ sur I.

**Remarque :** La résolution de ces équations revient à la recherche d'une primitive de $b$ sur I.

**Exemple :** Les solutions de l'équation $y' = \dfrac{1}{x+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$ sont les fonctions $F : \; x \mapsto \ln(x+1) + k$ où $k \in \mathbb{R}$

## 1.3 Résolution de l'équation homogène

**Théorème 2 :** Soit $a(x)$ une fonction continue sur un intervalle I.
Les solutions de l'équation différentielle homogène : $y' + a(x)y = 0$, sont toutes les fonctions $y : \; x \mapsto ke^{-A(x)}$, avec $A$ une primitive de $a$ sur I et $k \in \mathbb{R}$

**Démonstration :** Par double implications

- Montrons que les fonctions de la forme $y(x) = ke^{-A(x)}$ sont solutions de l'équation homogène.

  $y'(x) + a(x)y(x) = -kA'(x)e^{-A(x)} + a(x)ke^{-A(x)} \overset{A'=a}{=} 0.$

- Réciproquement, soit $y$ une solution de l'équation homogène.
  Soit la fonction $z$ définie sur I par : $z(x) = y(x)e^{A(x)}$. On dérive la fonction $z$ :

$$\begin{aligned} z'(x) &= y'(x)e^{A(x)} + y(x)A'(x)e^{A(x)} \overset{A'=a}{=} y'(x)e^{A(x)} + y(x)a(x)e^{A(x)} \\ &= e^{A(x)}\left[y'(x) + a(x)y(x)\right] \overset{y'+a(x)y=0}{=} 0 \end{aligned}$$

  La fonction $z$ est constante et l'on pose $z(x) = k$, d'où $y(x) = \dfrac{z(x)}{e^{A(x)}} = ke^{-A(x)}$.

**Exemples :**

- Les solutions de l'équation $2y' + 3y = 0 \;\Leftrightarrow\; y' + \dfrac{3}{2}y = 0$,
  sont les fonctions $y(x) = ke^{-\frac{3}{2}x}$
- Les solutions sur $]-1\,;+\infty[$ de l'équation $(x+1)y' + y = 0 \;\Leftrightarrow\; y' + \dfrac{1}{x+1}y = 0$, sont les fonctions $y(x) = ke^{-\ln(x+1)} = \dfrac{k}{x+1}$

## 1.4 Résolution de l'équation linéaire

**Théorème 3 : Problème de Cauchy**

Soit $a$ et $b$ deux fonctions continue sur un intervalle I. Soit $x_0$ et $y_0$ deux réels.

Le système $\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y_0 = y(x_0) \text{ condition initiale} \end{cases}$

admet une unique fonction solution $y$ sur I

**Démonstration :** Soit $A$ une primitive de la fonction $a$ sur I.
Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto ke^{-A(x)}$, $k$ étant une constante.

La méthode de résolution du problème de Cauchy consiste à faire « *varier* » la constante $k$. Cette contradiction apparente constitue « *l'astuce* » de la démonstration.

On pose alors : $y(x) = k(x)e^{-A(x)}$. L'équation $y + a(x)y = b(x)$ devient alors :

$$\begin{aligned} &k'(x)e^{-A(x)} - k(x)A'(x)e^{-A(x)} + a(x)k(x)e^{-A(x)} = b(x) \overset{A'=a}{\Leftrightarrow} \\ &k'(x)e^{-A(x)} - k(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)k(x)e^{-A(x)} = b(x) \;\Leftrightarrow \\ &k'(x)e^{-A(x)} = b(x) \;\Leftrightarrow\; k'(x) = b(x)e^{A(x)} \end{aligned}$$

$k$ est donc une primitive de la fonction $be^A$. Cette primitive existe bien car la fonction $be^A$ est une fonction continue sur I comme produit et composée de fonctions continue sur I.

La condition initiale : $y_0 = y(x_0) \;\Leftrightarrow\; y_0 = k(x_0)e^{-A(x_0)} \;\Leftrightarrow\; k(x_0) = y_0e^{A(x_0)}$

Le système admet donc une unique solution $y = ke^{-A}$ telle que $k$ est la primitive de $be^A$ qui vérifie $k(x_0) = y_0e^{A(x_0)}$

**Théorème 4 : Linéarité**

Soit $a$ et $b$ deux fonctions continues sur un intervalle I. Soit $A$ une primitive de la fonction $a$.

Les solutions de l'équation différentielle (E) : $y' + a(x)y = b(x)$ sont les fonctions $y$ tels que : $y = y_{\text{part}} + ke^{-A}$, où $y_{\text{part}}$ est une solution particulière de l'équation (E) et $k$ un réel.

**Remarque :** Pour trouver toutes les solutions de l'équation (E), il suffit de trouver une solution particulière et de lui ajouter la solution générale de l'équation homogène. Pour trouver cette solution particulière on utilisera la méthode de la « *variation* » de la constante.

**Exemple :** Déterminer sur $\mathrm{I} = ]-1\,;+\infty[$, la solution de l'équation différentielle (E) : $(x+1)y' + y = 6x(x+1)$ qui s'annule en 1.

- **Solution générale de l'équation homogène**.

  On met l'équation homogène sous la forme standard : $y' + \dfrac{1}{x+1}y = 0$

  Un primitive sur I de $a(x) = \dfrac{1}{x+1}$ est $A(x) = \ln(x+1)$

  La solution générale de l'équation homogène est : $y(x) = ke^{-\ln(x+1)} = \dfrac{k}{x+1}$

- **Solution particulière**.

  On met (E) sous la forme standard : $y' + \dfrac{1}{x+1}y = 6x$

  À l'aide de la variation de la constante, on a :

  $$k'(x) = b(x)e^{A(x)} = 6x\,e^{\ln(x+1)} = 6x(x+1) = 6x^2 + 6x$$

  On peut alors choisir pour la fonction $k$ : $k(x) = 2x^3 + 3x^2$

  Une solution particulière de (E) est donc $y_{\text{part}} = (2x^3 + 3x^2)e^{-\ln(x+1)} = \dfrac{2x^3 + 3x^2}{x+1}$

- L'ensemble des solutions $y$ de l'équation (E) sur I est donc :

  $$y(x) = \frac{2x^3 + 3x^2}{x+1} + \frac{k}{x+1} = \frac{2x^3 + 3x^2 + k}{x+1}$$

- La solution qui s'annule en 1 est telle que :

  $$y(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2+3+k}{x+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = -5$$

  La solution de l'équation (E) qui s'annule en 1 est telle que : $y(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 5}{x+1}$

## 1.5 Résolution de l'équation linéaire à coefficients constants

**Théorème 5 :** Soit $a$ et $b$ deux réels.

Les solutions de l'équation différentielle : $y' + ay = b$ sont les fonction $y$ de la forme :

$$y(x) = ke^{-ax} + \frac{b}{a}$$

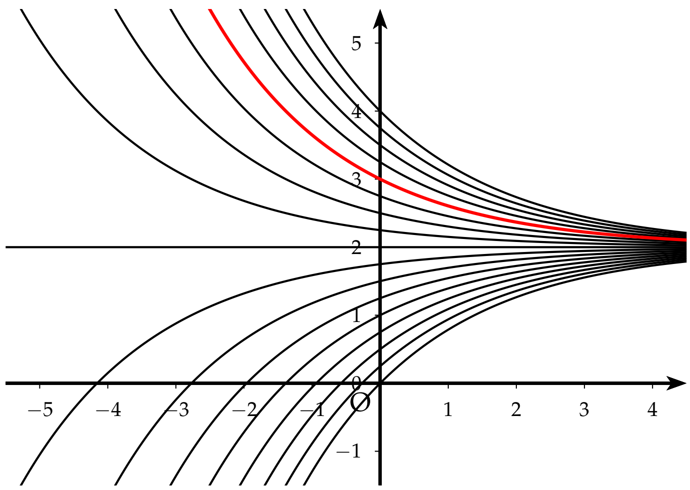
**Démonstration :**

- La primitive $A$ d'une constante $a$ est définie par $A(x) = ax$.
- Une solution particulière de l'équation $y' + ay = b$ est la fonction constante $y_{\text{part}} = \frac{b}{a}$ car $y'_{\text{part}} + ay_{\text{part}} = 0 + a \times \frac{b}{a} = b$
- Les solutions de l'équation sont : $y(x) = ke^{-A(x)} + y_{\text{part}} = ke^{-ax} + \frac{b}{a}$

**Exemple :** Déterminer la fonction $y$, solution de l'équation $y' + 0,5y = 1$ et telle que : $y(0) = 3$.

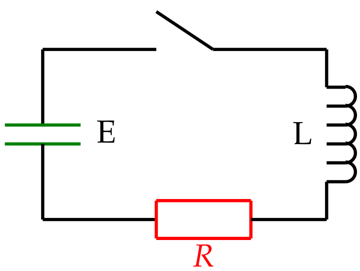
Les solutions sont donc de la forme : $y(x) = ke^{-0,5x} + 2$
Si l'on cherche la solution particulière qui correspond à $y(0) = 3$, on obtient alors $k = 1$, la solution est donc $y(x) = e^{-0,5x} + 2$

Si l'on veut visualiser l'ensemble des solutions ainsi que la solution particulière, on obtient :




## 1.6 Application à la physique : circuit RL et RC

Le circuit ci-contre comprend une bobine d'induction $L$, une résistance $R$. L'origine du temps est à la fermeture du circuit.



On suppose que pour $t = 0$ l'intensité $I$ est nulle. La f.e.m. aux bornes du circuit est constante et égale à $E$ (en volt). Dès que l'interrupteur est fermé, un courant croissant $i(t)$ commence à circuler, il est contrarié par la f.e.m. auto-induite par la bobine et s'établit progressivement. D'après la loi des mailles, nous avons à tout instant $t$ ($t > 0$) :

$$(\text{Eq}) \ : \ Li' + Ri = E$$

a) Résoudre cette équation différentielle. Trouver la fonction $i$ telle que $i(0) = 0$.

b) Donner l'allure de cette fonction $i$ et préciser les régimes transitoire et établi.

a) (Eq) est une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants.

- On met (Eq) sous la forme standard : $i' + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{E}{L}$
- Les solutions $i$ de (Eq) sont de la forme, avec $a = \dfrac{R}{L}$ et $b = \dfrac{E}{L}$ :
  $i(t) = ke^{at} + \dfrac{b}{a} = ke^{-\frac{R}{L}t} + \dfrac{E}{R}$.
- Condition initiale : $i(0) = 0 \ \Leftrightarrow \ k + \dfrac{E}{R} = 0 \ \Leftrightarrow \ k = -\dfrac{E}{R}$

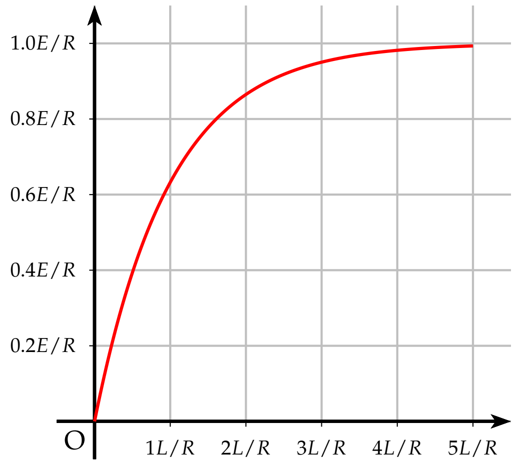
Le courant $i$ en fonction du temps est donc : $i(t) = \dfrac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$

b) La fonction $i$ croît puis se stabilise à $\dfrac{E}{R}$

On peut définir :

- le régime transitoire entre les instants $t = 0$ et $t = \dfrac{5L}{R}$
- le régime établi au delà de $t = \dfrac{5L}{R}$

La bobine retarde l'établissement du courant.




## 1.7 Équations se ramenant à $y' - ay = b$

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(\text{E}_1) \ : \ y' - 2y = 1 - 6x \quad \text{et} \quad (\text{E}_2) \ : \ y' = y(5 - y)$$

1) Montrer que $(\text{E}_1)$ admet une solution affine puis résoudre $(\text{E}_1)$.

2) Déterminer les solutions strictement positives de $(\text{E}_2)$ en posant $z = \dfrac{1}{y}$.

1) On pose $y_{\text{part}}$ une fonction affine qui vérifie l'équation $(\text{E}_1)$ : $y_{\text{part}}(x) = ax + b$.

Comme la fonction $y_{\text{part}}$ doit vérifier $(\text{E}_1)$, on a :

$y'_{\text{part}}(x) - 2y_{\text{part}}(x) = 1 - 6x \ \Leftrightarrow \ a - 2ax - 2b = 1 - 6x \ \Leftrightarrow$

$-2ax + (a - 2b) = -6x + 1$

En identifiant, on trouve alors $a = 3$ et $b = 1$.

La solution particulière est donc : $y_{\text{part}}(x) = 3x + 1$

Soit $y$ la solution générale de l'équation ($\text{E}_1$), on a alors :

$y(x) = y_{\text{part}}(x) + e^{-2x} \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = ke^{2x} + 3x + 1$

2) On pose : $z = \dfrac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad z' = -\dfrac{y'}{y^2}$ avec $\forall x \in \mathbb{R},\ y \neq 0$

Si on divise l'équation ($\text{E}_2$) par $y^2$, on obtient : $\dfrac{y'}{y^2} = \dfrac{5}{y} - 1$

en remplaçant par $z$ et $z'$, on a : $-z' = 5z - 1 \quad \Leftrightarrow \quad z' + 5z = 1$

On obtient donc la solution générale : $z(x) = ke^{-5x} + \dfrac{1}{5}\,, \quad k \in \mathbb{R}_+$

On revient à la fonction $y$ : $y(x) = \dfrac{1}{z(x)} = \dfrac{1}{ke^{-5x} + \dfrac{1}{5}}\,, \quad k \in \mathbb{R}_+$

# 2 Équation différentielle linéaire de second ordre

## 2.1 Définition

**Définition 2 :** On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (E) sur un intervalle I, une équation qui peut se mettre sous la forme :

$$(\text{E}) \ : \ ay'' + by' + cy = d(x)$$

où l'inconnue $y$ est une fonction de $x$ dérivable deux fois que l'on cherche à déterminer et où $a$, $b$, $c$ sont des réels avec $a \neq 0$ et $d$ une fonction continue sur un intervalle I.

**Exemples :**

- ($\text{E}_1$) : $y'' + y' - 2y = 10 \sin x$.
- ($\text{E}_2$) : $2y'' + y' + 2y = 0$ équation homogène du second ordre.
- ($\text{E}_3$) : $y'' + y = 3x^2$ équation du second ordre incomplète en $y'$.

## 2.2 Résolution de l'équation homogène

Théorème 6 : Soit (E) une équation différentielle linéaire du second ordre homogène de la forme :

$$(E) \ : \ ay'' + by' + cy = 0$$

On appelle **polynôme caractéristique** de l'équation (E), le polynôme $P$ défini par :

$$P(X) = aX^2 + bX + c$$

Soit $\Delta$ le discriminant du polynôme $P$

Les solutions de l'équation (E) dépend du nombre de racines du polynôme $P$.

- Si $\Delta > 0$, le polynôme $P$ admet deux racines réelles $r_1$ et $r_2$, alors les solutions de (E) peuvent se mettre sous la forme :

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \ , \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

- Si $\Delta = 0$, le polynôme $P$ admet une racine double $r_0$, alors les solutions de (E) peuvent se mettre sous la forme :

$$y(x) = (\lambda + \mu x) e^{r_0 x} \ , \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

- Si $\Delta < 0$, le polynôme $P$ admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = r_0 + i\omega$ et $r_2 = r_0 - i\omega$, alors les solutions de (E) peuvent se mettre sous la forme :

$$y(x) = \lambda e^{r_0 x} \left[\sin(\omega x + \varphi)\right] \ , \quad (\lambda, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{ou}$$
$$y(x) = e^{r_0 x} \left[\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)\right] \ , \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Démonstration : La démonstration de ce théorème est un peu fastidieuse, nous donnerons que des éléments de démonstration.

1)
- Comme dans les équations différentielle du premier ordre, la fonction exponentielle joue un rôle déterminant dans la résolution de l'équation homogène des équations différentielles du second ordre.
- Ici intervient de plus le polynôme caractéristique, nous appellerons $r$ une racine de ce polynôme (réelle ou complexe) double ou non.
- Nous utiliserons enfin "*l'astuce*" de la variation de la constante.
- Pour ces raisons, nous prendrons comme solution possible de l'équation homogène : $y(x) = z(x)e^{rx}$, où $z$ est une fonction dérivable deux fois sur I.

2) Calculons les dérivées première et seconde de cette fonction :

- $y'(x) = z'(x)e^{rx} + rz(x)e^{rx} = [z'(x) + rz(x)]e^{rx}$
- $$\begin{aligned} y''(x) &= [z''(x) + rz'(x)]e^{rx} + r[z'(x) + rz(x)]e^{rx} \\ &= [z''(x) + rz'(x) + rz'(x) + r^2 z(x)]e^{rx} \\ &= [z''(x) + 2rz'(x) + r^2 z(x)]e^{rx} \end{aligned}$$

3) Vérifions l'équation homogène (E)

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$a[z''(x) + 2rz'(x) + r^2 z(x)]e^{rx} + b[z'(x) + rz(x)]e^{rx} + cz(x)e^{rx} = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$[az''(x) + (2ar+b)z'(x) + (az^2+br+c)z(x)]e^{rx} = 0 \quad \overset{\div e^{rx}}{\Leftrightarrow}$$
$$az''(x) + (2ar+b)z'(x) + (az^2+br+c)z(x) = 0 \quad \overset{r \text{ racine}}{\Leftrightarrow}$$
$$az''(x) + (2ar+b)z'(x) = 0 \quad \overset{\div a}{\Leftrightarrow}$$
$$z''(x) + \left(2r + \frac{b}{a}\right) z'(x) = 0 \quad \text{(E')}$$

4) L'équation (E') est une équation homogène du premier ordre en $z'$, donc :

$$z'(x) = ke^{-(2r+\frac{b}{a})x}$$

5) Il reste à intégrer $z'$ puis revenir à $y$.

- $\Delta > 0,\ r \neq -\dfrac{b}{2a}$ donc $2r + \dfrac{b}{2a} \neq 0$

  On intègre alors $z'$ : $z(x) = \displaystyle\int ke^{-(2r+\frac{b}{a})x} = -\frac{-k}{2r+\frac{b}{a}} e^{-(2r+\frac{b}{a})x} + k'$

  On pose : $\lambda = \dfrac{-k}{2r+\frac{b}{a}}$ et $\mu = k'$ et l'on revient à $y$ :

  $y(x) = z(x)e^{rx} = \lambda e^{-(2r+\frac{b}{a}x)}e^{rx} + \mu e^{rx} \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \lambda e^{-(r+\frac{b}{a})x} + \mu e^{rx}$

  La somme des racines vaut $S = -\dfrac{b}{a}$ donc $r + \dfrac{b}{a}$ est la deuxième racine.

  Conclusion : si $\Delta > 0$, alors : $y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$

- $\Delta = 0,\ r = -\dfrac{b}{2a}$ donc $z'(x) = k \ \Rightarrow\ z(x) = kx + k'$.

  on pose $\mu = k$ et $\lambda = k'$ et on revient à $y$ : $y(x) = z(x)e^{r_0 x} = (\lambda + \mu x)e^{r_0 x}$

- $\Delta < 0$, Deux racines complexes conjuguées, on prend : $r = -\dfrac{b}{2a} + i\omega$

  donc $z'(x) = ke^{-2i\omega x}$, on intègre $z'$ sur $\mathbb{C}$ : $z(x) = \dfrac{-k}{2i\omega}e^{-2i\omega x} + k'$

  On revient à $y$ : $y(x) = \left(\dfrac{-k}{2i\omega}e^{-2i\omega x} + k'\right) e^{\left(-\frac{b}{2a}+i\omega\right)x} = e^{-\frac{b}{a}x}\left(\dfrac{-k}{2i\omega}e^{-i\omega x} + k'e^{i\omega x}\right)$

  En séparant les parties réelles et imaginaires des exponentielles, on obtient en posant convenablement $\lambda$ et $\mu$ : $y = e^{r_0 x}(\lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x)$

  $\lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x$ peut se mettre sous la forme $\lambda \sin(\omega x + \varphi)$

  **Remarque** : $\varphi$ est alors appelé le déphasage.

**Exemple** : Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $2y'' - 5y' + 2y = 0$

- On calcule le discriminant du polynôme caractéristique : $\Delta = 25 - 16 = 9$.
- On calcule ses racines : $r_1 = \dfrac{5+3}{4} = 2$ et $r_2 = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2}$
- On obtient les solutions suivantes : $y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{\frac{x}{2}}$

## 2.3 Résolution de l'équation linéaire

**Théorème 7 : Problème de Cauchy**

Soit $a, b, c$ trois réels avec $a \neq 0$, $d$ une fonction continue sur un intervalle I, $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0$ et $y_1$ deux réels.

Le système $\begin{cases} ay'' + by' + cy = d(x) \\ y_0 = y(x_0) \ \text{ et } \ y_1 = y'(x_0) \ \text{ condition initiale} \end{cases}$

admet une unique solution sur I.

**Théorème 8 : Linéarité**

Les solutions de l'équation différentielle (E) : $ay'' + by' + cy = d(x)$ sont les fonctions $y$ tels que : $y = y_{\text{part}} + y_{\text{hom}}$, où $y_{\text{part}}$ est une solution particulière de l'équation (E) et $y_{\text{hom}}$ est une solution quelconque de l'équation homogène.

**Remarque** : Il n'y a pas de méthode à priori pour trouver une solution particulière à une équation linéaire du second ordre sauf pour les fonctions sinus, cosinus ou exponentielles. On ne donnera pas ici de méthode mais on fera confiance à son intuition ou à l'énoncé pour en trouver une.

**Exemple** : Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 10 \sin x \quad \text{(E)} \\ y(0) = 0 \ \text{ et } \ y'(0) = 1 \end{cases}$

- Le polynôme caractéristique a des racines évidentes : $r_1 = 1$ et $r_2 = -2$.
  Les solutions de l'équation homogène sont donc : $y_{\text{hom}}(x) = \lambda e^x + \mu e^{-2x}$
- Pour trouver une solution particulière à (E), comme les dérivées des fonctions sinus et cosinus se répondent, on prendra comme forme de la solution particulière : $y(x) = a \cos x + b \sin x$

  On dérive deux fois : $y'(x) = -a \sin x + b \cos x$ et $y''(x) = -a \cos x - b \sin x$.

  On remplace dans l'équation (E) :

  $-a \cos x - b \sin x - a \sin x + b \cos x - 2a \cos x - 2b \sin x = 10 \sin x \quad \Leftrightarrow$

  $(-3a + b) \cos x + (-a - 3b) \sin x = \sin x$

  en identifiant on obtient : $\begin{cases} -3a + b = 0 \\ -a - 3b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases}$

  Une solution particulière est : $y_{\text{part}} = -\cos x - 3 \sin x$
- On obtient les solutions de l'équation (E) : $y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-2x} - \cos x - 3 \sin x$.

  De la condition initiale, on obtient :

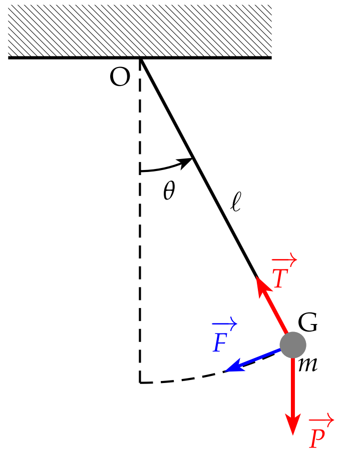
  $\begin{cases} \lambda e^0 + \mu e{-2(0)} - \cos 0 - 3 \sin 0 = 0 \\ \lambda e^0 - 2\mu e^{-2(0)} + \sin 0 - 3 \cos 0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - 2\mu = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 2 \end{cases}$
- La solution du système est : $y(x) = -e^x + 2e^{-2x} - \cos x - 3 \sin x$

## 2.4 Application : isochronisme des petites oscillations

Soit un pendule simple, modélisé par un objet G de masse ponctuel $m$ accroché à un fil de masse négligeable et de longueur $\ell$ dont on néglige les forces de frottements.

À l'équilibre le fil est vertical. On repère la position du point G par l'angle $\theta$, qui est fonction du temps. On écarte le point G de sa position d'équilibre d'un petit angle $\theta_0$.

La somme des forces $\overrightarrow{F}$ est tangente à la trajectoire du point G et correspond à la projection du poids $\overrightarrow{P}$ sur cette tangente.




D'après le principe fondamental de la dynamique, on a :

$$F = -mg\sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad m\ell\theta'' = -mg\sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta'' = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$$

Comme l'angle de départ $\theta_0$ est petit, on peut confondre le sinus avec l'angle $\theta$ (petite oscillation). Comme au départ la vitesse est nulle et l'angle vaut $\theta_0$, on obtient alors le système :

$$\begin{cases} \theta'' + \dfrac{g}{\ell}\theta = 0 \quad \text{(E)} \\ \theta(0) = \theta_0 \ \text{ et } \ \theta'(0) = 0 \end{cases}$$

- Les racines du polynôme caractéristique sont complexes conjuguées : $r = \pm\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}\,i$. On pose $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$.
- Les solutions de l'équation (E) sont de la forme : $\theta(t) = \lambda\sin(\omega t + \varphi)$
- De la condition initiale, on obtient :

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \theta'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\sin\varphi = \theta_0 \\ \lambda\omega\cos(\varphi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \theta_0 \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

- La solution du système est : $\theta(t) = \theta_0\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) = \theta_0\cos(\omega t)$
- La période des oscillations $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$ ne dépend pas de l'angle de départ $\theta_0$ pourvu que celui-ci ne soit pas trop grand. C'est ce qu'on appelle l'isochronisme des petites oscillations.