السلسلة 2 في الميكانيك

التمرين 1:

في معلم متعامد متجانس OXYZ نعتبر الأشعة الثلاثة التالية:

$$\vec{r_1} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \;,\; \vec{r_2} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \;,\; \vec{r_3} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

1/ احسب طويلة هذه الأشعة الثلاثة.

2/ احسب مركبات و طويلات الأشعة $\vec{B} = \vec{r_1} + \vec{r_2} - \vec{r_3}$ $\vec{A} = \vec{r_1} + \vec{r_2} + \vec{r_3}$.

3/ عين شعاع الوحدة المحمول على $\vec{C} = \vec{r_1} + 2\vec{r_2}$.

4/ احسب الجداء السلمي $\vec{r_1} \cdot \vec{r_2}$ $(\vec{B} \wedge \vec{C})$؛

5/ احسب الجداء المختلط $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$ et $\vec{A}(\vec{B} \wedge \vec{C})$.

التمرين 2:

في معلم متعامد و متجانس (O, X, Y, Z) نعتبر النقطتين $P(2, -1, 3)$ و $Q(5, 1, -1)$

1- أعط مركبات الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ ثم أحسب المسافة بين P و Q .

2- أوجد $\vec{U}$ شعاع الوحدة للشعاع $\overrightarrow{OA}$ حيث $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{PQ}$.

التمرين 3:

1/برهن أن مساحة متوازي الأضلاع هي $|\vec{A} \wedge \vec{B}|$ حيث $|\vec{A}|$ و $|\vec{B}|$ هما ضلعا متوازي الأضلاع المشكل من الشعاعين.

2/ اثبت أن هذين الشعاعين متعامدين إذا كان $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$.

التمرين 4:

اوجد مجموع الاشعة الثلاثة التالية

$$\vec{V_1} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \qquad \vec{V_2} = -3\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k} \qquad \vec{V_3} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k}$$

احسب طويلة المحصلة كذلك الزوايا المشكلة مع المحاور OZ, OY, OX.

حل التمرين 1:

Solution

1- $\left|\vec{r}_1\right| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$ $\left|\vec{r}_2\right| = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$ $\left|\vec{r}_3\right| = \sqrt{16+9+9} = \sqrt{34}$

2- $\vec{A} = 9\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $\left|\vec{A}\right| = \sqrt{81+4+16} = \sqrt{101}$ $\vec{B} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$

$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$

3- $\vec{c} = 8\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ $\left|\vec{c}\right| = \sqrt{74}$ $\vec{U} = \dfrac{8\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{74}}$

4- $\vec{r}_1.\vec{r}_2 = 6 - 6 - 2 = -2$.

5- $$\vec{B} \wedge \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ 8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 10\vec{i} - 19\vec{j} - 33\vec{k}$$

$$\vec{A}(\vec{B} \wedge \vec{C}) = 90 + 38 - 132 = -4$$

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & -2 & 4 \\ 10 & -19 & -33 \end{vmatrix} = 142\vec{i} + 337\vec{j} - 151\vec{k}$$

حل التمرين 2:

1- مركبات الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ هي:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} X_Q - X_P \\ Y_Q - Y_P \\ Z_Q - Z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 1+1 \\ -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

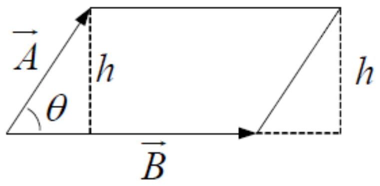
- المسافة بين P و Q هي طويلة الشعاع $\overrightarrow{PQ}$

$$||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$

2-الشعاع $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{PQ}$ نحصل على شعاع الوحدة $\vec{U}$ كما يلي:

$$\vec{U} = \frac{\overrightarrow{OA}}{||\overrightarrow{OA}||} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{||\overrightarrow{PQ}||} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{29} \\ 2/\sqrt{29} \\ -4/\sqrt{29} \end{pmatrix}$$

حل التمرين 3:



ا/ مساحة متوازي الأضلاع المعروفة: $S = h.\left|\vec{B}\right|$

نلاحظ من الشكل أن: $h = \left|\vec{A}\right|\sin\theta$

و عليه: $S = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta$

نستنتج أن: $S = \left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta$

لاحظ أن مساحة مثلث ضلعاه $\left|\vec{A}\right|$ و $\left|\vec{B}\right|$ تساوي $S_0 = \frac{1}{2}\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta$

ب/ ليكن $\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ $\quad \vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right| = \left[\left(A_x + B_x\right)^2 + \left(A_y + B_y\right)^2 + \left(A_z + B_z\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\left|\vec{A}-\vec{B}\right| = \left[\left(A_x - B_x\right)^2 + \left(A_y - B_y\right)^2 + \left(A_z - B_z\right)^2\right]^{1/2}$$

[redacted]

<u>حل التمرين 4:</u>

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \quad , \quad \vec{V} = 6\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \boxed{V \simeq 8{,}54}$$

$$V_x = V.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{V_x}{V} = \frac{6}{8{,}54} \quad , \quad cos\alpha \simeq 0{,}70 \Rightarrow \boxed{\alpha \simeq 45{,}6°}$$

$$V_y = V.\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{V_y}{V} = \frac{6}{8{,}54} \quad , \quad cos\beta \simeq 0{,}70 \Rightarrow \boxed{\beta \simeq 45{,}6°}$$

$$V_z = V.\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{V_z}{V} = \frac{1}{8{,}54} \quad , \quad cos\theta \simeq 0{,}70 \Rightarrow \boxed{\theta \simeq 83{,}1°}$$