1 Méthodes itératives

1.1 Méthode d'itération de Jacobi

Soit le système

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{array} \tag{2.1}$$

En supposant que les coefficients diagonaux. On résout la première équation du système (2.1) par rapport à x_1 , la seconde par rapport à x_2 ce qui donne : $a_{11} \neq 0$, $i = 1, ..., 4$

$$\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{a_{11}} \left[b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4) \right] \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}} \left[b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4) \right] \\ x_3 = \frac{1}{a_{33}} \left[b_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{34}x_4) \right] \\ x_4 = \frac{1}{a_{44}} \left[b_4 - (a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3) \right] \end{array} \tag{2.2}$$

On choisit arbitrairement (ou non) un approximation, soit $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$ et $x_4^{(0)}$ portée dans le second membre de (2.2), on obtient

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}} \left[b_1 - \left(a_{12}x_2^{(0)} + a_{13}x_3^{(0)} + a_{14}x_4^{(0)} \right) \right] \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}} \left[b_2 - \left(a_{21}x_1^{(0)} + a_{23}x_3^{(0)} + a_{24}x_4^{(0)} \right) \right] \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}} \left[b_3 - \left(a_{31}x_1^{(0)} + a_{32}x_2^{(0)} + a_{34}x_4^{(0)} \right) \right] \\ x_4^{(1)} = \frac{1}{a_{44}} \left[b_4 - \left(a_{41}x_1^{(0)} + a_{42}x_2^{(0)} + a_{43}x_3^{(0)} \right) \right] \end{array} \tag{2.3}$$

Cette nouvelle approximation portée dans le second membre de (2.3) donne une autre approximation $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}$ et $x_4^{(2)}$ et ainsi de suite. En général, la $(k+1) - ème$ itération est donnée par

$$\begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left[b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + a_{14}x_4^{(k)} \right) \right] \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \left[b_2 - \left(a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + a_{24}x_4^{(k)} \right) \right] \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}} \left[b_3 - \left(a_{31}x_1^{(k)} + a_{32}x_2^{(k)} + a_{34}x_4^{(k)} \right) \right] \\ x_4^{(k+1)} = \frac{1}{a_{44}} \left[b_4 - \left(a_{41}x_1^{(k)} + a_{42}x_2^{(k)} + a_{43}x_3^{(k)} \right) \right] \end{array} \tag{2.4}$$

On arrête le calcul lorsque deux valeurs successives de x_i sont suffisamment voisine. On peut utiliser 2 critères :

Convergence absolue :

$$\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| \leqslant \varepsilon$$

Convergence relative :

$$\left|\frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k+1)}}\right| \leqslant \varepsilon$$

Example 1 *Soit le système linéaire*

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 17 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 &= -18 \end{aligned}$$

La méthode de Jacobi s'écrit dans ce cas :

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{3}\left[2 - x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right] \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{5}\left[17 - x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)}\right] \\ x_3^{(k+1)} &= -\frac{1}{6}\left[-18 - 2x_1^{(k)} + x_2^{(k)}\right] \end{aligned}$$

Partant de $[0 \quad 0 \quad 0]^T$, *on trouve d'abord :*

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{3}[2 - 0 + 0] &&= \frac{2}{3} \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{5}[17 - 0 - 0] &&= \frac{17}{5} \\ x_3^{(1)} &= -\frac{1}{6}[-18 - 0 + 0] = 3 \end{aligned}$$

La deuxième itération donne :

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{1}{3}\left[2 - \frac{17}{5} + 3\right] &&= \frac{8}{15} \\ x_2^{(2)} &= \frac{1}{5}\left[17 - \frac{2}{3} - 2\,(3)\right] = \frac{31}{15} \\ x_3^{(2)} &= -\frac{1}{6}\left[-18 - 2\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{17}{5}\right] = 2.655556 \end{aligned}$$

On finit par remplir le tableau suivantLes valeurs convergent vers la solution $[1 \quad 2 \quad 3]^T$. *La convergence est cependant assez lente.*

Exercise 2 *La méthode de Jacobi ne peut pas s'appliquer immédiatement au système :*

$$\begin{aligned} 0x_1 + 3x_2 + x_3 &= 7 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 &= 15 \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Méthode de Jacobi			
k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	0,000 000	0,000 000	0,000 000
1	0,666 667	3,400 000	3,000 000
2	0,533 333	2,066 667	2,655 556
3	0,862 963	2,231 111	2,833 333
4	0,867 407	2,094 074	2,915 802
5	0,940 576	2,060 198	2,940 123
6	0,959 975	2,035 835	2,970 159
7	0,978 108	2,019 941	2,980 686
8	0,986 915	2,012 104	2,989 379
9	0,992 425	2,006 865	2,993 621
10	0,995 585	2,004 067	2,996 331

puisque l'un des coefficients diagonaux est nul ($a_{11} = 0$). On remédie à cette situation en faisant par exemple pivoter les deux premières lignes. On doit donc résoudre le système :

$$\begin{gathered} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 15 \\ 0x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 9 \end{gathered}$$

pour lequel la méthode de Jacobi donne l'algorithme :

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{5}\left[15 - x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)}\right] \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{3}\left[7 - x_3^{(k)}\right] \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{8}\left[9 - 3x_1^{(k)} + 4x_2^{(k)}\right] \end{aligned}$$

On obtient ainsi, en partant de la solution initiale $[0 \quad 0 \quad 0]^T$, les itérations suivantesIl y a donc convergence vers $[3 \quad 2 \quad 1]^T$.

1.1.1 Forme matricielle de la méthode de Jacobi

Pour cela, on décompose A en une somme de trois matrices

$$A = D + (L + U)$$

de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & U \\ & D & \\ L & & \ddots \end{pmatrix}$$

Méthode de Jacobi							
k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	0,000 000	0,000 000	0,000 000	8	3,001 706	1,999 582	0,994 268
1	3,000 000	2,333 333	1,125 000	9	2,997 791	2,001 911	0,999 151
2	2,983 333	1,958 333	1,166 667	10	2,999 278	2,000 283	1,001 784
3	3,075 000	1,944 444	0,985 417	11	3,000 657	1,999 405	1,000 412
4	3,005 278	2,004 861	0,944 097	12	3,000 284	1,999 863	0,999 456
5	2,976 667	2,018 634	1,000 451	13	2,999 810	2,000 181	0,999 825
6	2,996 454	1,999 850	1,018 067	14	2,999 894	2,000 058	1,000 162
7	3,007 257	1,993 978	1,001 255	15	3,000 053	1,999 946	1,000 069

où D est **la matrice diagonale** de A

$$(D)_{ij} = \begin{cases} a_{ii} & \text{pour} \quad i = j, \\ 0 & \text{pour} \quad i \neq j \end{cases}$$

ou

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

L est **la matrice strictement triangulaire inférieure**

.....

$$(L)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{pour} \quad i > j \\ 0 & \text{pour} \quad i \leqslant j \end{cases}$$

ou

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ & & \\ a_{n1} & a_{n2} & 0 \end{pmatrix}$$

U est **la matrice strictement triangulaire supérieure**

$$(U)_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{pour} \quad i < j \\ 0 & \text{pour} \quad i \geqslant 0 \end{cases}$$

ou

$$U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{2n} \\ & & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Comme on a supposé a_{ii} pour $i = \overline{1, n}$, alors la matrice D est inversible.

Maintenant, l'Équation (1.1) peut aussi s'écrire comme

$$Ax = b$$

devient

$$[D + (L + U)]\, x = b$$

ou encore

$$Dx = b - (L + U)\, x$$

En utilisant la $k - ième$ itération $x^{(k)}$, on peut obtenir la formule itérative de Jacobi

$$a_{ii} x_i^{(k+1)} = b_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ou

$$Dx^{(k+1)} = b - (L + U)\, x^{(k)}$$

Soit,

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= D^{-1} \left[b - (L + U)\, x^{(k)} \right] \\ &= D^{-1} b - D^{-1} (L + U)\, x^{(k)} \\ &= D^{-1} b - J x^{(k)}; \qquad \text{pour chaque } k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

La matrice $J = -D^{-1} (L + U)$ est appelée **matrice de Jacobi associée à** A.

Maintenant, l'équation () peut aussi s'écrire sous la forme

$$\begin{gathered} x^{(k+1)} = x^{(k)} - x^{(k)} - D^{-1} (L + U)\, x^{(k)} + D^{-1} b \\ = x^{(k)} - \left[I + D^{-1} (L + U) \right] x^{(k)} + D^{-1} b \\ = x^{(k)} - \left[D^{-1} D + D^{-1} (L + U) \right] x^{(k)} + D^{-1} b \\ = x^{(k)} - D^{-1} [D + (L + U)]\, x^{(k)} + D^{-1} b \\ = x^{(k)} + D^{-1} \left[b + A x^{(k)} \right]. \end{gathered}$$

Donc,

$$h^{(k)} = D^{-1} \left[b + A x^{(k)} \right] = D^{-1} r^{(k)}$$

où $h^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ est **l'erreur d'approximation** et $r^{(k)} = b + A x^{(k)}$ est **le vecteur résiduel**.

On peut résoudre l'équation suivante

$$Dh^{(k)} = r^{(k)}$$

pour le vecteur $h^{(k)}$, puis on détermine

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h^{(k)}$$

Ces équations constituent **la méthode de Jacobi dans un format d'erreur.**

1.1.2 Convergence de la méthode d'itération Jacobi

Example 3 *Soit à résoudre les deux systèmes d'équations linéaires suivants :*

1. $\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix}$ *dont la solution est* $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix}$ *dont la solution est* $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

L'algorithme de Jacobi associé au premier système est défini par

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{10}\left[11 - x_2^{(k)}\right] \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{10}\left[12 - 2x_1^{(k)}\right] \end{aligned} \tag{2.5}$$

Pour l'approximation initiale de la solution, on prend

$$x^{(0)} = \left[\frac{11}{10}, \frac{12}{10}\right]^T.$$

On portant ces valeurs dans les seconds membres de (2.5) , on obtient successivement

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{98}{100} \\ \frac{98}{100} \end{bmatrix}, \qquad x^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1002}{1000} \\ \frac{1004}{1000} \end{bmatrix}, \qquad x^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{9996}{10000} \\ \frac{9992}{10000} \end{bmatrix}, \ldots$$

L'algorithme de Jacobi associé au second système est donné par :

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 11 - 10x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{10}\left[12 - 2x_1^{(k)}\right] \end{aligned} \tag{2.5}$$

Pour l'approximation initiale de la solution, on prend , on obtient

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} -49 \\ -49 \end{bmatrix}, \qquad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 501 \\ 251 \end{bmatrix}, \qquad x^{(3)} = \begin{bmatrix} -2499 \\ -2499 \end{bmatrix}, \ldots$$

On remarque à travers ces deux exemples que la suite engendrée par la méthode de Jacobi peut converger vers la solution ou au contraire diverger. Il nous faudra donc étudier la convergence de la méthode.

En partant d'un vecteur arbitraire , on construit la suite des approximations

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= D^{-1}b + Jx^{(0)} \\ x^{(2)} &= D^{-1}b + Jx^{(1)} \\ &\vdots \\ x^{(k+1)} &= D^{-1}b + Jx^{(k)} \end{aligned}$$

D'où

$$x^{(k+1)} = \left(I + J + J^2 + \ldots + J^k\right) D^{-1}b + J^{k+1}x^{(0)}. \tag{2.6}$$

Comme pour $\|J\| < 1$, on a $\left\|J^{k+1}\right\| \to 0$ quand $k \to \infty$, il vient

$$\lim_{k\to\infty} J^{k+1} = 0$$

et

$$\lim_{k\to\infty} \left(I + J + J^2 + \ldots + J^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} J^k = (I - J)^{-1}.$$

Donc, en passant à la limite quand $k \to \infty$ dans l'égalité (2.6), on a

$$x = \lim_{k\to\infty} J^{k+1} = (I - J)^{-1} D^{-1} b.$$

et on a la convergence de la suite .

Ce qui nous permet d'introduire le théorème suivant :

Theorem 4 *La suite d'approximations $\left\{x^{(k)}\right\}$ de l'algorithme de Jacobi converge vers une solution unique, si, l'une quelconque des normes canonique de la matrice de Jacobi J satisfait à la condition :*

$$\|J\| < 1.$$

Definition 5 *Pour que $\lambda < 1$ soit vrai, la matrice de coefficients A doit être* ***diagonalement dominante****, c'est-à-dire*

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = \overline{1, n}. \tag{1}$$

Ainsi, la méthode d'itération de Jacobi converge si le système d'équations linéaires donné est strictement diagonalement dominant. On peut noter que la condition de convergence ci-dessus est suffisante mais pas nécessaire.

Example 6 *Résoudre le système suivant par la méthode de Jacobi :*

$$\begin{gathered} 4x_1 + 5x_3 = 12.5 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 18.5 \\ 8x_1 + 2x_2 + x_3 = -11.5 \end{gathered}$$

Solution. Nous réorganisons d'abord le système d'équations donné de sorte que le système résultant soit le suivant :

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3 = -11.5 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 18.5 \\ 4x_1 + 5x_3 = 12.5 \end{cases}$$

Or le système d'équations est strictement diagonalement dominant. Ainsi, la méthode de Jacobi convergera certainement.

Encore une fois, nous réécrivons les équations ci-dessus sous la forme suivante:

$$x_1 = \frac{1}{8}(-11.5 - 2x_2 - x_3)$$
$$x_2 = \frac{1}{6}(18.5 - x_1 - 2x_3)$$
$$x_3 = \frac{1}{5}(12.5 - 4x_1)$$

Les itérations successives de la méthode de Jacobi s'arrêteront si

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| < \varepsilon,$$

où $k > 0$ et ε est la tolérance d'erreur prescrite.

Ici, on prend $\varepsilon = 0.01$.

Première étape :

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$$

Première itération :

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{8}\left(-11.5 - 2x_2^{(0)} - x_3^{(0)}\right) = -1.4375,$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{6}\left(18.5 - x_1^{(0)} - 2x_3^{(0)}\right) = 3.0833,$$
$$x_3^{(1)} = \frac{1}{5}\left(12.5 - 4x_1^{(0)}\right) = 2.5.$$

alors

$$\left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|_\infty = \max\{1.4375, 3.0833, 2.5\} = 3.0833 > \varepsilon.$$

Deuxième itération :

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{8}\left(-11.5 - 2x_2^{(1)} - x_3^{(1)}\right) = -2.5208,$$
$$x_2^{(2)} = \frac{1}{6}\left(18.5 - x_1^{(1)} - 2x_3^{(1)}\right) = 2.4896,$$
$$x_3^{(2)} = \frac{1}{5}\left(12.5 - 4x_1^{(1)}\right) = 3.65.$$

$$\left\| x^{(2)} - x^{(1)} \right\|_\infty = \max\{1.0833, 0.5937, 1.15\} = 1.15 > \varepsilon.$$

Troisième itération :

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{8}\left(-11.5 - 2x_2^{(2)} - x_3^{(2)}\right) = -2.5162,$$
$$x_2^{(3)} = \frac{1}{6}\left(18.5 - x_1^{(2)} - 2x_3^{(2)}\right) = 2.2868,$$
$$x_3^{(3)} = \frac{1}{5}\left(12.5 - 4x_1^{(2)}\right) = 4.5167.$$

Dans ce cas,

$$\left\| x^{(3)} - x^{(2)} \right\|_\infty = \max\{0.0046, 0.2028, 0.8667\} = 0.8667 > \varepsilon.$$

Quatrième itération :

$$
\begin{aligned}
x_1^{(4)} &= \frac{1}{8}\left(-11.5 - 2x_2^{(3)} - x_3^{(3)}\right) = -2.5738, \\
x_2^{(4)} &= \frac{1}{6}\left(18.5 - x_1^{(3)} - 2x_3^{(3)}\right) = 1.9971, \\
x_3^{(4)} &= \frac{1}{5}\left(12.5 - 4x_1^{(3)}\right) = 4.5129.
\end{aligned}
$$

Aussi,

$$
\left\|x^{(4)} - x^{(3)}\right\|_\infty = \max\{0.0576, 0.2897, 0.0038\} = 0.2897 > \varepsilon.
$$

Cinquième itération :

$$
\begin{aligned}
x_1^{(5)} &= \frac{1}{8}\left(-11.5 - 2x_2^{(4)} - x_3^{(4)}\right) = -2.5009, \\
x_2^{(5)} &= \frac{1}{6}\left(18.5 - x_1^{(4)} - 2x_3^{(4)}\right) = 2.0080, \\
x_3^{(5)} &= \frac{1}{5}\left(12.5 - 4x_1^{(4)}\right) = 4.5590.
\end{aligned}
$$

alors

$$
\left\|x^{(5)} - x^{(4)}\right\|_\infty = \max\{0.0729, 0.0109, 0.0461\} = 0.0729 > \varepsilon.
$$

Sixième itération :

$$
\begin{aligned}
x_1^{(6)} &= \frac{1}{8}\left(-11.5 - 2x_2^{(5)} - x_3^{(5)}\right) = -2.5094, \\
x_2^{(6)} &= \frac{1}{6}\left(18.5 - x_1^{(5)} - 2x_3^{(5)}\right) = 1.9805, \\
x_3^{(6)} &= \frac{1}{5}\left(12.5 - 4x_1^{(5)}\right) = 4.5007.
\end{aligned}
$$

Aussi,

$$
\left\|x^{(6)} - x^{(5)}\right\|_\infty = \max\{0.0142, 0.0208, 0.0068\} = 0.0208 > \varepsilon.
$$

Septième itération :

$$
\begin{aligned}
x_1^{(7)} &= \frac{1}{8}\left(-11.5 - 2x_2^{(6)} - x_3^{(6)}\right) = -2.4952, \\
x_2^{(7)} &= \frac{1}{6}\left(18.5 - x_1^{(6)} - 2x_3^{(6)}\right) = 2.0013, \\
x_3^{(7)} &= \frac{1}{5}\left(12.5 - 4x_1^{(6)}\right) = 4.5075.
\end{aligned}
$$

également

$$
\left\|x^{(7)} - x^{(6)}\right\|_\infty = \max\{0.0142, 0.0208, 0.0068\} = 0.0208 > \varepsilon.
$$

Huitième itération :

$$\begin{aligned}
x_1^{(8)} &= \frac{1}{8}\left(-11.5 - 2x_2^{(7)} - x_3^{(7)}\right) = -2.5013,\\
x_2^{(8)} &= \frac{1}{6}\left(18.5 - x_1^{(7)} - 2x_3^{(7)}\right) = 1.9967,\\
x_3^{(8)} &= \frac{1}{5}\left(12.5 - 4x_1^{(7)}\right) = 4.4962.
\end{aligned}$$

Aussi

$$\left\|x^{(8)} - x^{(7)}\right\|_\infty = \max\{0.0061, 0.0046, 0.0113\} = 0.0113 > \varepsilon.$$

Neuvième itération:

$$\begin{aligned}
x_1^{(9)} &= \frac{1}{8}\left(-11.5 - 2x_2^{(8)} - x_3^{(8)}\right) = -2.4987,\\
x_2^{(9)} &= \frac{1}{6}\left(18.5 - x_1^{(8)} - 2x_3^{(8)}\right) = 2.0015,\\
x_3^{(9)} &= \frac{1}{5}\left(12.5 - 4x_1^{(8)}\right) = 4.5010.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\left\|x^{(9)} - x^{(8)}\right\|_\infty = \max\{0.0026, 0.0048, 0.0048\} = 0.0048 < \varepsilon.$$

Par conséquent, nous nous arrêterons ici.

Ainsi, la séquence d'approximations successives se termine à la neuvième itération.

Par conséquent, la solution requise du système d'équations donné est

$$x_1 = -2.5,\ x_2 = 2 \text{ et } x_3 = 4.5.$$

1.1.3 Code Matlab

```
function [x, iter] = gaussJacobi(A, b, x0, tol, maxIter)
% gaussJacobi Résout le système linéaire A*x = b par la méthode itérative de
Jacobi.
%
% [x, iter] = gaussJacobi(A, b, x0, tol, maxIter) renvoie l'approximation de la
solution
% x et le nombre d'itérations effectuées.
%
% Entrées :
% A - Matrice des coefficients (n x n)
% b - Vecteur second membre (n x 1)
% x0 - Approximation initiale (n x 1)
% tol - Tolérance pour le critère d'arrêt (ex : 1e-6)
% maxIter - Nombre maximal d'itérations autorisées
%
```

```
% Sorties :
% x - Approximation de la solution (n x 1)
% iter - Nombre d'itérations effectuées
% Nombre d'inconnues
n = length(b);
% Initialisation de la solution
x = x0;
for iter = 1:maxIter
x_new = zeros(n, 1);
% Calcul de la nouvelle itération pour chaque composante
for i = 1:n
somme = 0;
for j = 1:n
if j ~= i
somme = somme + A(i,j) * x(j);
end
end
x_new(i) = (b(i) - somme) / A(i,i);
end
% Critère de convergence (norme infinie)
if norm(x_new - x, inf) < tol
x = x_new;
fprintf('Convergence atteinte après %d itérations.\n', iter);
return;
end
x = x_new;
end
fprintf('Nombre maximum d''itérations atteint sans convergence.\n');
end
```

Exemple d'utilisation

Supposons que vous souhaitiez résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ -2x_1 + 6x_2 + x_3 = 9, \\ -x_1 + x_2 + 7x_3 = -6 \end{cases}$$

Vous pouvez utiliser la fonction de la manière suivante :

```
% Définition de la matrice et du vecteur second membre
A = [4, -1, 1;
-2, 6, 1;
-1, 1, 7];
b = [3; 9; -6];
% Choix d'une approximation initiale
x0 = zeros(3,1);
% Définition de la tolérance et du nombre maximum d'itérations
```

```
tol = 1e-6;
maxIter = 100;
% Appel de la fonction
[x, iter] = gaussJacobi(A, b, x0, tol, maxIter);
% Affichage du résultat
disp('Solution approchée :');
disp(x);
disp(['Nombre d''itérations : ' num2str(iter)]);
```

Ce code permet de résoudre le système en appliquant la méthode de Jacobi jusqu'à atteindre la tolérance spécifiée ou le nombre maximal d'itérations.

1.2 Méthode d'itération de Gauss – Seidel

La méthode de Gauss-Seidel est une modification de la méthode de Jacobi. Elle consiste à tenir compte, lors du calcul de la $(k+1)-ième$ approximation de l'inconnue x_i, des $(k+1)-ièmes$ approximations des inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ déjà établies.

Pour simplifier l'exposé, considérons le système (2.1).

Partant comme de la méthode de Jacobi du système

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)\right] \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4)\right] \\ x_3 &= \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{34}x_4)\right] \\ x_4 &= \frac{1}{a_{44}}\left[b_4 - (a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3)\right] \end{aligned} \tag{3.1}$$

on choisit une approximation, soit $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$ et $x_4^{(0)}$. On porte $x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$ et $x_4^{(0)}$ au second membre de la première équation du système (3.1) pour obtenir une nouvelle approximation de x_1 soit

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - \left(a_{12}x_2^{(0)} + a_{13}x_3^{(0)} + a_{14}x_4^{(0)}\right)\right]. \tag{3.2}$$

En utilisant la nouvelle valeur obtenue pour x_1 soit $x_1^{(1)}$, on porte avec celles choisies pour x_3 et x_4 soient $x_3^{(0)}$ et $x_4^{(0)}$, ces valeurs dans la seconde équation du (3.2) pour obtenir une meilleure approximation de x_2, soit

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - \left(a_{21}x_1^{(1)} + a_{23}x_3^{(0)} + a_{24}x_4^{(0)}\right)\right]. \tag{3.3}$$

De même dans la troisième équation du (3.3), on porte $x_1^{(1)}$ et $x_2^{(1)}$ au lieu de $x_1^{(0)}$ et $x_2^{(0)}$ pour trouver une nouvelle approximation de x_3 soit

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - \left(a_{31}x_1^{(1)} + a_{32}x_2^{(1)} + a_{34}x_4^{(0)}\right)\right]. \tag{3.4}$$

On utilise alors les nouvelles valeurs calculées $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$ et $x_3^{(1)}$ pour trouver une nouvelle approximation de x_4, soit

$$x_4^{(1)} = \frac{1}{a_{44}} \left[b_4 - \left(a_{41} x_1^{(1)} + a_{42} x_2^{(1)} + a_{43} x_3^{(1)} \right) \right]. \tag{3.5}$$

On effectué la première itération On commence en prenant comme valeur de départ pour x_1, x_2, x_3 et x_4, les valeurs $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$ et $x_4^{(1)}$, calculées à la première itération, et ainsi de suite.

En générale la $(k+1) - \textit{ième}$ itération est donné par

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}} \left[b_1 - \left(a_{12} x_2^{(k)} + a_{13} x_3^{(k)} + a_{14} x_4^{(k)} \right) \right] \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}} \left[b_2 - \left(a_{21} x_1^{(k+1)} + a_{23} x_3^{(k)} + a_{24} x_4^{(k)} \right) \right] \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}} \left[b_3 - \left(a_{31} x_1^{(k+1)} + a_{32} x_2^{(k+1)} + a_{34} x_4^{(k)} \right) \right] \\
x_4^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{44}} \left[b_4 - \left(a_{41} x_1^{(k+1)} + a_{42} x_2^{(k+1)} + a_{43} x_3^{(k+1)} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.6}$$

En général la $(k+1) - \textit{ième}$ itération de la $i - \textit{ème}$ composante du système d'algorithme de Gauss-Seidel est donnée par

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right], \tag{3.7}$$

ou

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - {}_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_i^{(k)} \right). \tag{3.7}$$

Example 7 *Soit le système linéaire*

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -18 \end{cases}$$

Example 8 *La méthode de Gauss-Seidel s'écrit dans ce cas :*

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{3} \left[2 - x_2^{(k)} + x_3^{(k)} \right] \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{5} \left[17 - x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)} \right] \\
x_3^{(k+1)} &= -\frac{1}{6} \left[-18 - 2x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} \right]
\end{aligned}$$

Notons la différence des indices avec la méthode de Jacobi. Partant de $[0 \quad 0 \quad 0]^T$, *on trouve d'abord :*

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{3} [2 - 0 + 0] && = \frac{2}{3} \\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{5} \left[17 - \frac{2}{3} - 0 \right] && = \frac{49}{15} \\
x_3^{(1)} &= -\frac{1}{6} \left[-18 - 2 \left(\frac{2}{3} \right) + \frac{49}{15} \right] && = \frac{241}{90}
\end{aligned}$$

Méthode de Gauss-Seidel							
k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
1	0,666 6667	3,266 667	2,677 778	6	0,991 4991	2,005 729	2,996 212
2	0,470 3704	2,234 815	2,784 321	7	0,996 8277	2,002 150	2,998 584
3	0,849 8354	2,116 305	2,930 561	8	0,998 8115	2,000 804	2,999 470
4	0,938 0855	2,040 158	2,972 669	9	0,999 5553	2,000 301	2,999 802
5	0,977 5034	2,015 432	2,989 929	10	0,999 8335	2,000 113	2,999 926

tandis qu'à la deuxième itération on trouve :

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{1}{3}\left[2 - \frac{49}{15} + \frac{241}{90}\right] &&= 0.4703704 \\ x_2^{(2)} &= \frac{1}{5}\left[17 - 0.4703704 - 2\left(\frac{241}{90}\right)\right] &&= 2.234815 \\ x_3^{(2)} &= -\frac{1}{6}\left[-18 - 2\,(0.4703704) + 2.234815\right] &&= 2.784321 \end{aligned}$$

ainsi que les itérations suivantes

On constate que, pour un même nombre d'itérations, la solution approximative obtenue par la méthode de Gauss-Seidel est plus précise. La méthode de Gauss-Seidel converge généralement plus vite que la méthode de Jacobi.

1.2.1 Forme matricielle de la méthode Gauss-Seidel

Ecrivons l'algorithme de Gauss-Seidel sous forme vectorielle.

Comme on a supposé $a_{ii} \neq 0$ pour $i = \overline{1,n}$, alors la matrice est inversible. L'algorithme de Gauss-Seidel s'écrit

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_i^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_i^{(k)} - b_i\right] \tag{3.7}$$

Ce qui implique

$$a_{ii} x_i^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_i^{(k)} + b_i \tag{3.8}$$

soit,

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_i^{(k)} + b_i \tag{3.9}$$

Sous forme matricielle, nous avons

$$(L + D)\, x^{(k+1)} = -U x^{(k)} + b,$$

Cela donne la formule de Gauss-Seidel suivante

$$x^{(k+1)} = -(L+D)^{-1} Ux^{(k)} + (L+D)^{-1} b, \quad k = 0, 1, 2, 2, ... \tag{3.10}$$

La matrice $S = -(L+D)^{-1} U$ est appelée **matrice de Gauss-Seidel** associée à A.

Maintenant, l'Équation (3.10) peut aussi s'écrire comme

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} - x^{(k)} - (L+D)^{-1} Ux^{(k)} + (L+D)^{-1} b \\ &= x^{(k)} - \left[I + (L+D)^{-1} U\right] x^{(k)} + (L+D)^{-1} b \\ &= x^{(k)} - (L+D)^{-1} [D+L+U] x^{(k)} + (L+D)^{-1} b \\ &= x^{(k)} - (L+D)^{-1} Ax^{(k)} + (L+D)^{-1} b \\ &= x^{(k)} + (L+D)^{-1} \left[b - Ax^{(k)}\right] \end{aligned} \tag{3.11}$$

Donc,

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = (L+D)^{-1} \left[b - Ax^{(k)}\right]$$

ce qui implique

$$h^{(k)} = (L+D)^{-1} r^{(k)} \tag{3.12}$$

où

$$h^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$$

est **l'erreur d'approximation** et

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

est **le vecteur résiduel**.

On peut résoudre l'équation suivante

$$(D-L) h^{(k)} = r^{(k)} \tag{3.13}$$

pour le vecteur $h^{(k)}$, puis on détermine

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h^{(k)} \tag{3.14}$$

Ces équations constituent **la méthode de Gauss-Seidel dans un format d'erreur.**

1.2.2 Convergence de la méthode d'itération de Gauss-Seidel

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, l'algorithme de Gauss-Seidel sous forme vectorielle, on procédant à la même façon que pour la méthode de Jacobi, on en déduit le :

Theorem 9 *Une condition suffisante de la convergence pour la méthode de Gauss-Seidel est :*

$$\|S\| = \left\|(L+D)^{-1} U\right\| < 1.$$

Démonstration:

$$\begin{aligned}
X^{(k+1)} &= (L+D)^{-1}b + Sx^{(k)} \\
&= (L+D)^{-1}b + S\left[(L+D)^{-1}b + Sx^{(k-1)}\right] \\
&= (I+S)(L+D)^{-1}b + S^2x^{(k-1)} \\
&= \left(I+S+S^2\right)(L+D)^{-1}b + S^3x^{(k-2)} \\
&\vdots \\
&= \left(I+S+S^2+\ldots+S^k\right)(L+D)^{-1}b + S^{k+1}x^{(0)}
\end{aligned}$$

Si $\|S\| < 1$, alors $\lim_{k\to\infty} S^{k+1} = 0$ et on a

$$X = \lim_{k\to\infty} X^{(k+1)} = (I-S)^{-1}(L+D)^{-1}b.$$

Example 10 *Résoudre le système d'équations suivant par la méthode de Gauss-Seidel :*

$$\begin{array}{cc}
5x_1 + x_2 + 2x_3 = 19 & E_1 \\
x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -2 & E_2 \\
2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 39 & E_3
\end{array}$$

Solution. Clairement, le système d'équations donné est strictement diagonalement dominant. Ainsi, la méthode de Gauss-Seidel convergera certainement.

Encore une fois, nous réécrivons les équations ci-dessus sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{5}(19 - x_2 - 2x_3) \\
x_2 &= \frac{1}{4}(-2 - x_1 + 2x_3) \\
x_3 &= \frac{1}{8}(39 - 2x_1 - 3x_2)
\end{aligned}$$

Les itérations successives dans la méthode de Gauss-Seidel s'arrêteront si

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_\infty < \varepsilon,$$

où $k > 0$ et ε est la tolérance d'erreur prescrite.

Ici, on prend $\varepsilon = 0.01$.

Première étape :

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 1$$

Première itération :

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{5}\left(19 - x_2^{(0)} - 2x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{5}(19 - 1 - 2) = 3.2, \\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{4}\left(-2 - x_1^{(1)} + 2x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{4}(-2 - 3.2 + 2) = -0.8, \\
x_3^{(1)} &= \frac{1}{8}\left(39 - 2x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)}\right) = \frac{1}{8}(39 - 6.4 + 2.4) = 4.375.
\end{aligned}$$

Ici
$$\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|_\infty = \max\{2.2, 1.8, 3.375\} = 3.375 > \varepsilon.$$

Seconde itération :

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= \frac{1}{5}\left(19 - x_2^{(1)} - 2x_3^{(1)}\right) = \frac{1}{5}(19 + 0.8 - 2\times 4.375) = 2.21,\\
x_2^{(2)} &= \frac{1}{4}\left(-2 - x_1^{(2)} + 2x_3^{(1)}\right) = \frac{1}{4}(-2 - 2.21 + 2\times 4.375) = 1.135,\\
x_3^{(2)} &= \frac{1}{8}\left(39 - 2x_1^{(2)} - 3x_2^{(2)}\right) = \frac{1}{8}(39 - 2\times 2.21 - 3\times 1.135) = 3.89687.
\end{aligned}$$

Dans ce cas,
$$\left\|x^{(2)}-x^{(1)}\right\|_\infty = \{\max\{0.99, 1.935, 0.478125\} = 1.935 > \varepsilon.\}$$

Troisième itération

$$\begin{aligned}
x_1^{(3)} &= \frac{1}{5}\left(19 - x_2^{(2)} - 2x_3^{(2)}\right) = \frac{1}{5}(19 - 1.135 - 2\times 3.89687) = 2.01425,\\
x_2^{(3)} &= \frac{1}{4}\left(-2 - x_1^{(3)} + 2x_3^{(2)}\right) = \frac{1}{4}(-2 - 2.01425 + 2\times 3.89687) = 0.94487,\\
x_3^{(3)} &= \frac{1}{8}\left(39 - 2x_1^{(3)} - 3x_2^{(3)}\right) = \frac{1}{8}(39 - 2\times 2.01425 - 3\times 0.94487) = 4.01711.
\end{aligned}$$

Dans ce cas,
$$\left\|x^{(3)}-x^{(2)}\right\|_\infty = \max\{0.19575, 0.190125, 0.120234\} = 0.190125 > \varepsilon.$$

Quatrième itération :

$$\begin{aligned}
x_1^{(4)} &= \frac{1}{5}\left(19 - x_2^{(3)} - 2x_3^{(3)}\right) = \frac{1}{5}(19 - 0.94487 - 2\times 4.01711) = 2.00418,\\
x_2^{(4)} &= \frac{1}{4}\left(-2 - x_1^{(3)} + 2x_3^{(4)}\right) = \frac{1}{4}(-2 - 2.00418 + 2\times 4.01711) = 1.00751,\\
x_3^{(4)} &= \frac{1}{8}\left(39 - 2x_1^{(4)} - 3x_3^{(4)}\right) = \frac{1}{8}(39 - 2\times 2.00418 - 3\times 1.00751) = 3.99641.
\end{aligned}$$

Aussi
$$\left\|x^{(4)}-x^{(3)}\right\|_\infty = \max\{0.0100688, 0.0626344, 0.0209707\} = 0.0626344 > \varepsilon.$$

Cinquième itération :

$$\begin{aligned}
x_1^{(5)} &= \frac{1}{5}\left(19 - x_2^{(4)} - 2x_3^{(4)}\right) = \frac{1}{5}(19 - 1.00751 - 2\times 3.99641) = 2.00004,\\
x_2^{(5)} &= \frac{1}{4}\left(-2 - x_1^{(5)} + 2x_3^{(4)}\right) = \frac{1}{4}(-2 - 2.00004 + 2\times 3.99614) = 0.998059,\\
x_3^{(5)} &= \frac{1}{8}\left(39 - 2x_1^{(5)} - 3x_3^{(5)}\right) = \frac{1}{8}(39 - 2\times 2.00004 - 3\times 0.998059) = 4.00072.
\end{aligned}$$

Finalement,
$$\left\|x^{(5)}-x^{(4)}\right\|_\infty = \max\{0.00413859, 0.0094507, 0.00457866\} = 0.0094507 < \varepsilon.$$

Par conséquent, nous nous arrêterons ici.

Ainsi, la séquence d'approximations successives se termine à la cinquième itération.

Par conséquent, la solution requise du système d'équations donné est

$$x_1 = 2,\ x_2 = 1 \text{ et } x_3 = 4.$$

Exercise 4. Résoudre le système d'équations suivant

$$\begin{cases} 2.412x_1 + 9.879x_2 + 1.564x_3 = 4.89, & E_1 \\ 1.876x_1 + 2.985x_2 - 11.62x_3 = -0.972, & E_2 \\ 12.214x_1 + 2.367x_2 + 3.672x_3 = 7.814. & E_3 \end{cases}$$

corriger à deux décimales près

a. Méthode de Jacobi

b. Méthode de Gauss-Seidel

Solution:

Nous réorganisons d'abord le système d'équations donné de sorte que le système résultant soit le suivant :

$$\begin{cases} 12.214x_1 + 2.367x_2 + 3.672x_3 = 7.814. & E_1 \\ 2.412x_1 + 9.879x_2 + 1.564x_3 = 4.89, & E_2 \\ 1.876x_1 + 2.985x_2 - 11.62x_3 = -0.972, & E_3 \end{cases}$$

Or le système d'équations est strictement diagonalement dominant. Ainsi, **la méthode Jacobi** ainsi que **la méthode de Gauss-Seidel** convergera certainement.

Encore une fois, nous réécrivons les équations ci-dessus sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{12.21}(7.814 - 2.367x_2 - 3.672x_3) \\ x_2 &= \frac{1}{9.879}(4.89 - 2.412x_1 - 1.564x_3) \\ x_3 &= \frac{1}{-11.62}(-0.972 - 1.876x_1 - 2.985x_2) \end{aligned}$$

Les itérations successives dans les méthodes itératives s'arrêteront si

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_\infty < \varepsilon,$$

où $k > 0$ et ε est la tolérance d'erreur prescrite.

Ici, on prend $\varepsilon = 0.01$.

a. Méthode de Jacobi

Première étape :

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$$

Première itération :

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{12.21}\left(7.814 - 2.367x_2^{(0)} - 3.672x_3^{(0)}\right) = 0.639758, \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{9.879}\left(4.89 - 2.412x_1^{(0)} - 1.564x_3^{(0)}\right) = 0.494989, \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{-11.62}\left(-0.972 - 1.876x_1^{(0)} - 2.985x_2^{(0)}\right) = 0.0836489. \end{aligned}$$

Aussi,

$$\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|_{\infty}=\max\{0.639758, 0.494989, 0.0836489\}=0.639758>\varepsilon.$$

Deuxième itération :

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= \frac{1}{12.21}\left(7.814-2.367x_2^{(1)}-3.672x_3^{(1)}\right)=0.518684,\\
x_2^{(2)} &= \frac{1}{9.879}\left(4.89-2.412x_1^{(1)}-1.564x_3^{(1)}\right)=0.325547,\\
x_3^{(2)} &= \frac{1}{-11.62}\left(-0.972-1.876x_1^{(1)}-2.985x_2^{(1)}\right)=0.31409.
\end{aligned}$$

$$\left\|x^{(2)}-x^{(1)}\right\|_{\infty}=\max\{0.121074, 0.169442, 0.23044\}=0.23044>\varepsilon.$$

Troisième itération :

$$\begin{aligned}
x_1^{(3)} &= \frac{1}{12.21}\left(7.814-2.367x_2^{(2)}-3.672x_3^{(2)}\right)=0.482241,\\
x_2^{(3)} &= \frac{1}{9.879}\left(4.89-2.412x_1^{(2)}-1.564x_3^{(2)}\right)=0.318625,\\
x_3^{(3)} &= \frac{1}{-11.62}\left(-0.972-1.876x_1^{(2)}-2.985x_2^{(2)}\right)=0.251016.
\end{aligned}$$

Dans ce cas,

$$\left\|x^{(3)}-x^{(2)}\right\|_{\infty}=\max\{0.0364426, 0.00692172, 0.0630741\}=0.0630741>\varepsilon.$$

Quatrième itération :

$$\begin{aligned}
x_1^{(4)} &= \frac{1}{12.21}\left(7.814-2.367x_2^{(3)}-3.672x_3^{(3)}\right)=0.502545,\\
x_2^{(4)} &= \frac{1}{9.879}\left(4.89-2.412x_1^{(3)}-1.564x_3^{(3)}\right)=0.337508,\\
x_3^{(4)} &= \frac{1}{-11.62}\left(-0.972-1.876x_1^{(3)}-2.985x_2^{(3)}\right)=0.243355.
\end{aligned}$$

Aussi

$$\left\|x^{(4)}-x^{(3)}\right\|_{\infty}=\max\{0.0203039, 0.088832, 0.00766159\}=0.0203039>\varepsilon.$$

Cinquième itération

$$\begin{aligned}
x_1^{(5)} &= \frac{1}{12.21}\left(7.814-2.367x_2^{(4)}-3.672x_3^{(4)}\right)=0.501186,\\
x_2^{(5)} &= \frac{1}{9.879}\left(4.89-2.412x_1^{(4)}-1.564x_3^{(4)}\right)=0.333764,\\
x_3^{(5)} &= \frac{1}{-11.62}\left(-0.972-1.876x_1^{(4)}-2.985x_2^{(4)}\right)=0.251483.
\end{aligned}$$

Dans ce cas,

$$\left\|x^{(5)}-x^{(4)}\right\|_{\infty}=\max\{0.00135609, 0.00374433, 0.00812879\}=0.00812879>\varepsilon.$$

Sixième itération :

$$\begin{aligned}
x_1^{(6)} &= \frac{1}{12.21}\left(7.814 - 2.367x_2^{(5)} - 3.672x_3^{(5)}\right) = 0.499471,\\
x_2^{(6)} &= \frac{1}{9.879}\left(4.89 - 2.412x_1^{(5)} - 1.564x_3^{(5)}\right) = 0.332808,\\
x_3^{(6)} &= \frac{1}{-11.62}\left(-0.972 - 1.876x_1^{(5)} - 2.985x_2^{(5)}\right) = 0.250303.
\end{aligned}$$

Aussi

$$\left\|x^{(6)} - x^{(5)}\right\|_\infty = \max\{0.0017182, 0.00095582, 0.0011808\} = 0.0017182 < \varepsilon.$$

Septième itération :

$$\begin{aligned}
x_1^{(7)} &= \frac{1}{12.21}\left(7.814 - 2.367x_2^{(6)} - 3.672x_3^{(6)}\right) = 0.500011,\\
x_2^{(7)} &= \frac{1}{9.879}\left(4.89 - 2.412x_1^{(6)} - 1.564x_3^{(6)}\right) = 0.333415,\\
x_3^{(7)} &= \frac{1}{-11.62}\left(-0.972 - 1.876x_1^{(6)} - 2.985x_2^{(6)}\right) = 0.24978.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\left\|x^{(7)} - x^{(6)}\right\|_\infty = \max\{0.000540225, 0.000606444, 0.000544932\} = 0.000606444 < \varepsilon.$$

Par conséquent, nous nous arrêterons ici.

Ainsi, la séquence d'approximations successives se termine à la septième itération.

Par conséquent, la solution requise du système d'équations donné est

$$x_1 = 0.50,\ x_2 = 0.33 \text{ et } x_3 = 0.25.$$

b. Méthode de Gauss–Seidel

Première étape :

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0.$$

Première itération :

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{12.21}\left(7.814 - 2.367x_2^{(0)} - 3.672x_3^{(0)}\right) = 0.639758,\\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{9.879}\left(4.89 - 2.412x_1^{(1)} - 1.564x_3^{(0)}\right) = 0.33879,\\
x_3^{(1)} &= \frac{1}{-11.62}\left(-0.972 - 1.876x_1^{(1)} - 2.985x_2^{(1)}\right) = 0.273965.
\end{aligned}$$

$$\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_\infty = \max\{0.639758, 0.33879, 0.273965\} = 0.639758 > \varepsilon.$$

Deuxième itération :

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= \frac{1}{12.21}\left(7.814 - 2.367x_2^{(1)} - 3.672x_3^{(1)}\right) = 0.491738,\\
x_2^{(2)} &= \frac{1}{9.879}\left(4.89 - 2.412x_1^{(2)} - 1.564x_3^{(1)}\right) = 0.331557,\\
x_3^{(2)} &= \frac{1}{-11.62}\left(-0.972 - 1.876x_1^{(2)} - 2.985x_2^{(2)}\right) = 0.24821.
\end{aligned}$$

$$\left\| x^{(2)} - x^{(1)} \right\|_\infty = \max\{0.14802, 0.00723325, 0.0257553\} = 0.14802 > \varepsilon.$$

Troisième itération :

$$\begin{aligned}
x_1^{(3)} &= \frac{1}{12.21}\left(7.814 - 2.367x_2^{(2)} - 3.672x_3^{(2)}\right) = 0.500883, \\
x_2^{(3)} &= \frac{1}{9.879}\left(4.89 - 2.412x_1^{(3)} - 1.564x_3^{(2)}\right) = 0.333401, \\
x_3^{(3)} &= \frac{1}{-11.62}\left(-0.972 - 1.876x_1^{(3)} - 2.985x_2^{(3)}\right) = 0.25016.
\end{aligned}$$

Dans ce cas,

$$\left\| x^{(3)} - x^{(2)} \right\|_\infty = \max\{0.0091448, 0.00184472, 0.00195027\} = 0.0091448 > \varepsilon.$$

Quatrième itération :

$$\begin{aligned}
x_1^{(4)} &= \frac{1}{12.21}\left(7.814 - 2.367x_2^{(3)} - 3.672x_3^{(3)}\right) = 0.499939, \\
x_2^{(4)} &= \frac{1}{9.879}\left(4.89 - 2.412x_1^{(4)} - 1.564x_3^{(3)}\right) = 0.333323, \\
x_3^{(4)} &= \frac{1}{-11.62}\left(-0.972 - 1.876x_1^{(4)} - 2.985x_2^{(4)}\right) = 0.249987.
\end{aligned}$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
\left\| x^{(4)} - x^{(3)} \right\|_\infty &= \max\{0.000943823, 0.0000783198, 0.000172495\} \\
&= 0.000943 < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous nous arrêterons ici.

Ainsi, la séquence d'approximations successives se termine à la troixième itération.

Par conséquent, la solution requise du système d'équations donné est

$$x_1 = 0.50,\ x_2 = 0.33 \text{ et } x_3 = 0.25.$$

1.2.3 Code Matlab

```
function [x, iter] = gaussSeidel(A, b, x0, tol, maxIter)
% gaussSeidel Résout le système linéaire A*x = b par la méthode itérative de
Gauss-Seidel.
%
% [x, iter] = gaussSeidel(A, b, x0, tol, maxIter) renvoie l'approximation de la
solution
% x ainsi que le nombre d'itérations effectuées.
%
% Entrées :
```

```
% A - Matrice des coefficients (n x n)
% b - Vecteur second membre (n x 1)
% x0 - Approximation initiale (n x 1)
% tol - Tolérance pour le critère d'arrêt (ex : 1e-6)
% maxIter - Nombre maximal d'itérations autorisées
%
% Sorties :
% x - Approximation de la solution (n x 1)
% iter - Nombre d'itérations effectuées
n = length(b);
x = x0; % Initialisation de la solution
for iter = 1:maxIter
x_old = x; % Sauvegarde de l'itération précédente
for i = 1:n
% Calcul de la somme des contributions des variables déjà connues
% pour j < i, on utilise les valeurs mises à jour (x)
% pour j > i, on utilise les valeurs de l'itération précédente (x_old)
sum1 = 0;
if i > 1
sum1 = A(i, 1:i-1) * x(1:i-1);
end
sum2 = 0;
if i < n
sum2 = A(i, i+1:n) * x_old(i+1:n);
end
% Mise à jour de la composante i
x(i) = (b(i) - sum1 - sum2) / A(i, i);
end
% Critère d'arrêt basé sur la norme infinie
if norm(x - x_old, inf) < tol
fprintf('Convergence atteinte après %d itérations.\n', iter);
return;
end
end
fprintf('Nombre maximum d''itérations atteint sans convergence.\n');
end
```

Exemple d'utilisation

Supposons que vous souhaitiez résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ -2x_1 + 6x_2 + x_3 = 9, \\ -x_1 + x_2 + 7x_3 = -6 \end{cases}$$

Vous pouvez utiliser la fonction de la manière suivante :

```
% Définition de la matrice A et du vecteur b
A = [4, -1, 1;
     -2, 6, 1;
      -1, 1, 7];
b = [3; 9; -6];
% Approximation initiale
x0 = zeros(3,1);
% Tolérance et nombre maximum d'itérations
tol = 1e-6;
maxIter = 100;
% Appel de la fonction Gauss-Seidel
[x, iter] = gaussSeidel(A, b, x0, tol, maxIter);
% Affichage du résultat
disp('Solution approchée :');
disp(x);
disp(['Nombre d''itérations : ' num2str(iter)]);
```

1.3 Méthode de relaxation

1.3.1 Rayon spectral et convergence des normes

Definition 11 *Soit A une matrice carrée arbitraire $n \times n$. Le spectre de A est défini comme l'ensemble de toutes les valeurs propres λ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ de A. Le rayon spectral de A, noté $\varrho(A)$, est défini comme*

$$\varrho(A) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i| .$$

Theorem 12 *Soit A une matrice carrée arbitraire $n \times n$. Alors, pour toute norme de matrice*

$$\varrho(A) \leqslant \|A\| .$$

Corollary 13 *Pour une matrice carrée A, $\varrho(A) < 1$ si et seulement si $\|A\| < 1$.*

1.4 Forme matricielle de la méthode de relaxation

Si $1 < \omega < 2$, alors le schéma est connu comme une **méthode de sur-relaxation**,

et si $0 < \omega < 1$, on parle alors de **méthode de sous-relaxation**. Le schéma itératif de l'équation (4.2) avec une valeur optimale de ω est appelé la méthode SOR.

1.4.1 a) Méthode de relaxation avec itération de Jacobi

La méthode de relaxation avec itération de Jacobi (5.41) est donnée par

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - {}^{n}_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} a_{ij} x_i^{(k)} \right); \tag{5.41}$$

et introduisons un paramètre d'accélération ω pour considérer la modification suivante de l'équation

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1)} &= (1-\omega)\, x_i^{(k)} + \omega x_i^{(k+1)} \\ &= (1-\omega)\, x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - {}_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\, a_{ij} x_i^{(k)} \right); \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \end{aligned}$$

ce qui implique

$$a_{ii} x_i^{(k+1)} = (1-\omega)\, a_{ii} x_i^{(k)} + \omega \left(b_i - {}_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\, a_{ij} x_i^{(k)} \right); \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

$\Longrightarrow$

$$a_{ii} x_i^{(k+1)} = a_{ii} x_i^{(k)} + \omega \left(b_i - {}_{j=1}^{n}\, a_{ij} x_i^{(k)} \right); \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

$\Longrightarrow$

$$a_{ii} x_i^{(k+1)} = a_{ii} x_i^{(k)} - \omega_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^{(k)} + \omega b_i; \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Sous **forme matricielle**, nous pouvons écrire les équations ci-dessus comme suit

$$DX^{(k+1)} = DX^{(k)} - \omega A X^{(k)} + \omega B$$

ce qui implique

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \omega D^{-1} A X^{(k)} + \omega D^{-1} B$$

$\Longrightarrow$

$$X^{(k+1)} = \left(I - \omega D^{-1} A \right) X^{(k)} + \omega D^{-1} B; \text{ pour chaque } k = 0, 1, 2, \cdots \qquad (\lozenge)$$

Le système $(\lozenge)$ peut aussi s'écrire comme suit

$$X^{(k+1)} = R_J X^{(k)} + \omega D^{-1} B; \qquad (2)$$

où

$$R_J = I - \omega D^{-1} A.$$

1.4.2 b) Méthode de relaxation avec itération de Gauss–Seidel

La méthode de relaxation avec itération de Gauss–Seidel (3.10) est la suivante

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1)} &= (1-\omega)\, x_i^{(k)} + \omega x_i^{(k+1)} \\ &= (1-\omega)\, x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - {}_{j=1}^{i-1}\, a_{ij} x_i^{(k+1)} - {}_{j=i+1}^{n}\, a_{ij} x_i^{(k)} \right], \qquad (3) \end{aligned}$$

ce qui implique

$$a_{ii} x_i^{(k+1)} = (1-\omega)\, a_{ii} x_i^{(k)} + \omega \left[b_i - {}_{j=1}^{i-1}\, a_{ij} x_i^{(k+1)} - {}_{j=i+1}^{n}\, a_{ij} x_i^{(k)} \right],$$

or

$$\left(a_{ii} + \omega_{j=1}^{i-1} a_{ij} \right) x_i^{(k+1)} = (1-\omega)\, a_{ii} x_i^{(k)} - \omega_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_i^{(k)} + \omega b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n \text{ and } k = 0, 1, 2, \cdots$$

Sous forme vectorielle, on a

$$\begin{aligned}
(D+\omega L)\,X^{(k+1)} &= (1-\omega)\,DX^{(k)}-\omega UX^{(k)}+\omega B\\
&= [(1-\omega)\,D-\omega U]\,X^{(k)}+\omega B
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$X^{(k+1)}=(D+\omega L)^{-1}\,[(1-\omega)\,D-\omega U]\,X^{(k)}+\omega\,(D+\omega L)^{-1}\,B;\quad \text{pour chaque } k=0,1,2,\cdots \tag{4.6}$$

Par conséquent, à partir de l'équation (4.6), nous avons

$$X^{(k+1)}=R_SX^{(k)}+\omega\,(D+\omega L)^{-1}\,B, \tag{4.7}$$

où

$$R_S=(D+\omega L)^{-1}\,[(1-\omega)\,D-\omega U]\,.$$

Example 14 *Résoudre le système d'équations linéaires suivant à l'aide de la forme matricielle de la méthode de Gauss-Seidel*

$$\begin{gathered}
4x_1-2x_2+x_3=4\\
x_1-4x_2+x_3=0\\
x_1+2x_2+5x_3=7
\end{gathered}$$

Utilisez le vecteur d'approximation initial, $x^{(0)}=[0\quad 0\quad 0]^T$.

Rép: La matrice $A=L+D+U$ peut s'écrire comme suit

$$\underset{A}{\begin{bmatrix}4&-2&1\\1&-4&1\\1&2&5\end{bmatrix}}=\underset{L}{\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&2&0\end{bmatrix}}+\underset{D}{\begin{bmatrix}4&0&0\\0&-4&0\\0&0&5\end{bmatrix}}+\underset{U}{\begin{bmatrix}0&-2&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}}$$

En utilisant la méthode de Gauss–Seidel (3.10), on a

$$X^{(k+1)}=-\,(L+D)^{-1}\,UX^{(k)}+(L+D)^{-1}\,B,$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}x_1^{(k+1)}\\x_2^{(k+1)}\\x_3^{(k+1)}\end{bmatrix} &= -\left(\begin{bmatrix}4&0&0\\0&-4&0\\0&0&5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&2&0\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}0&-2&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}\\x_3^{(k)}\end{bmatrix}\\
&\quad+\left(\begin{bmatrix}4&0&0\\0&-4&0\\0&0&5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&2&0\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}4\\0\\7\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

En utilisant $k=0$, et le vecteur initial,

$$x^{(0)}=[0\quad 0\quad 0]^T$$

dans le système ci-dessus, la première itération $x^{(0)}$ est donnée par

$$x^{(1)} = [1 \quad 0.25 \quad 1.1]^T$$

De la même manière, les autres itérations sont données par:
Itération 2
0.850000 0.487500 1.035000
Itération 3
0.985000 0.505000 1.001000
Itération 4
1.002250 0.500813 0.999225
Itération 5
1.000600 0.499956 0.999897
Itération 6
1.000004 0.499975 1.000009
Après six itérations, la solution est la suivante

$$x_1 = 1.000004,\ x_2 = 0.499975,\ x_3 = 1.000009$$

Example 15 *Résolvez l'ensemble suivant d'équations linéaires à l'aide de la méthode SOR avec le paramètre de relaxation* $\omega = 1.1$.

$$\begin{gathered} 4x_1 - x_2 - x_3 = 99.875 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_4 = -99.6875 \\ 2x_1 - 4x_3 + x_4 = 0.3125 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 0.25 \end{gathered}$$

Rép: En utilisant la forme matricielle (4.2), nous avons

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)\, x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_i^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_i^{(k)} \right], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Nous avons les équations suivantes pour le système donné avec le paramètre de relaxation $\omega = 1.1$

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= (-0.1)x_1^{(k)} + \frac{1.1}{4}\left(99.875 + x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} &= (-0.1)x_2^{(k)} + \frac{1.1}{4}\left(99.6875 + 2x_1^{(k+1)} + x_4^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} &= (-0.1)x_3^{(k)} - \frac{1.1}{4}\left(0.3125 - 2x_1^{(k+1)} - x_4^{(k+1)}\right) \\ x_4^{(k+1)} &= (-0.1)x_4^{(k)} - \frac{1.1}{2}\left(0.25 - x_2^{(k+1)} - x_3^{(k+1)}\right) \end{aligned}$$

En utilisant l'approximation initiale $x^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$. dans le système ci-dessus, nous obtenons les 10 premières itérations suivantes

Iteration 1

27.465626 42.520157 15.020157 31.509674

Itération 2

40.542648 54.125664 29.375664 42.637264

Itération 3

46.374222 59.232567 34.207565 46.990845

Itération 4

48.524235 61.101612 36.104115 48.626564

Itération 5

49.344776 61.815834 36.815582 49.247124

Itération 6

49.654785 62.085575 37.085594 49.481934

Itération 7

49.772217 62.187759 37.187752 49.570839

Itération 8

49.816673 62.226437 37.226440 49.604500

Itération 9

49.833504 62.241085 37.241085 49.617241

Itération 10

49.839874 62.246632 37.246628 49.622070

La solution finale après 10 itérations est donc donnée par $x_1^{(10)} = 49.839874$, $x_2^{(10)} = 62.246632$, $x_3^{(10)} = 37.246628$, $x_4^{(10)} = 49.622070$

1.5 Convergence de la méthode SOR

Rappelons l'équation (3.7) de la méthode de Gauss – Seidel

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_i^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_i^{(k)} \right] \tag{3.7}$$

et introduisons un paramètre d'accélération ω pour considérer la modification suivante de l'équation

$$x_i^{(k+1)} = \omega z_i^{(k+1)} + (1-\omega)\, x_i^{(k)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \text{ and } k = 0, 1, 2, \cdots$$

introduisons un paramètre d'accélération ω pour considérer la modification suivante de l'équation

$$z_i^{(k+1)} = D^{-1} \left[b - LX^{(k+1)} - UX^{(k)} \right] \tag{4}$$

$$x_i^{(k+1)} = \omega z_i^{(k+1)} + (1-\omega)\, x_i^{(k)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \text{ and } k = 0, 1, 2, \cdots \tag{5}$$

Réécrivons les Équations (4.1)-(4.2) sous la forme matricielle suivante :

$$X^{(k+1)} = \omega Z^{(k+1)} + (1-\omega)\, X^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{6}$$

Par conséquent, à partir des équations (4.3) et (4.4), nous obtenons

$$X^{(k+1)} = \omega D^{-1}\left[b - LX^{(k+1)} - UX^{(k)}\right] + (1-\omega)\, X^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \quad (7)$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{(k+1)} &= (\boldsymbol{I} + \omega \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{L})^{-1}\left[\left(1-\omega\right)\boldsymbol{I} - \omega \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{U}\right]\boldsymbol{x}^{(k)} + \omega(\boldsymbol{I} + \omega \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b} \\ &= (\boldsymbol{D} + \omega \boldsymbol{L})^{-1}\left[\left(1-\omega\right)\boldsymbol{D} - \omega \boldsymbol{U}\right]\boldsymbol{x}^{(k)} + \omega(\boldsymbol{D} + \omega \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}, \quad k = 0,1,2,\ldots \end{aligned}$$

Par conséquent, à partir de l'équation (4.6), nous avons

$$X^{(k+1)} = Q_{SOR}X^{(k)} + \omega\,(D + \omega L)^{-1}\, b \quad (8)$$

where

$$R_{SOR} = (D + \omega L)^{-1}\,[(1-\omega)\, D - \omega U]\,. \quad (9)$$

Il a été établi que si A est symétrique et définie positive, alors $\varrho\,(R_{SOR}) < 1$ pour $0 < \omega < 2$. Ainsi, la convergence du processus d'itération s'ensuit, mais nous nous intéressons généralement aux convergence plutôt qu'une simple convergence.

Le paramètre ω est à choisir de manière optimale pour minimiser $\varrho\,(R_{SOR})$, c'est-à-dire le rayon spectral de R_{SOR} afin de faire converger $x^{(k)}$ vers x le plus rapidement possible.

La valeur optimale ω^* du facteur de relaxation pour lequel la convergence la plus rapide a lieu est donnée par

$$\omega^* = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \varrho\,(R_{GS})}},$$

où $R_{GS} = -\,(L + D)^{-1}\, U$ est la matrice d'itération de la méthode de Gauss–Seidel.

Maintenant, l'équation (4.6) peut également être écrite comme

$$\begin{aligned} X^{(k+1)} &= (D + \omega L)^{-1}\,[(1-\omega)\, D - \omega U]\, X^{(k)} + \omega\,(D + \omega L)^{-1}\, b & (10) \\ &= X^{(k)} - X^{(k)} + (D + \omega L)^{-1}\,[(1-\omega)\, D - \omega U]\, X^{(k)} + \omega\,(D + \omega L)^{-1}\, b \\ &= X^{(k)} - (D + \omega L)^{-1}\,(D + \omega L)\, X^{(k)} + (D + \omega L)^{-1}\,[(1-\omega)\, D - \omega U]\, X^{(k)} + \omega\,(D + \omega L)^{-1}\, b \\ &= X^{(k)} - (D + \omega L)^{-1}\,[(D + \omega L) - (1-\omega)\, D - \omega U]\, X^{(k)} + \omega\,(D + \omega L)^{-1}\, b \\ &= X^{(k)} - \omega\,(D + \omega L)^{-1}\,[L - D - U]\, X^{(k)} + \omega\,(D + \omega L)^{-1}\, b \\ &= X^{(k)} - \omega\,(D + \omega L)^{-1}\, Ax^{(k)} + \omega\,(D + \omega L)^{-1}\, b \\ &= X^{(k)} + \omega\,(D + \omega L)^{-1}\left(b - Ax^{(k)}\right) \\ &= X^{(k)} + \omega\,(D + \omega L)^{-1}\, r^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots & (11) \end{aligned}$$

où $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ est le vecteur des résidus.

Par conséquent, à partir de l'équation (4.6), nous obtenons

$$h^{(k)} = \omega \left(D + \omega L\right)^{-1} r^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

où $h^{(k)} = X^{(k+1)} - X^{(k)}$ est l'erreur d'approximation.

On peut résoudre l'équation suivante

$$\left(D + \omega L\right) h^{(k)} = \omega r^{(k)} \tag{13}$$

pour le vecteur $h^{(k)}$, puis on détermine

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + h^{(k)} \tag{14}$$

Ces équations décrivent la méthode SOR dans son format d'erreur.

Example 16 *Résoudre le système d'équations linéaires suivant*

$$\begin{aligned} 3.1x_1 + 9.4x_2 - 1.5x_3 = 22.9 \\ 2.1x_1 - 1.5x_2 + 8.4x_3 = 28.8 \\ 6.7x_1 + 1.1x_2 + 2.2x_3 = 20.5 \end{aligned}$$

corriger à deux décimales près

a. Méthode de Gauss-Seidel

b. Méthode SOR

Solution: Nous réorganisons d'abord le système d'équations donné afin que le système résultant soit le suivant :

$$\begin{aligned} 6.7x_1 + 1.1x_2 + 2.2x_3 = 20.5 \\ 3.1x_1 + 9.4x_2 - 1.5x_3 = 22.9 \\ 2.1x_1 - 1.5x_2 + 8.4x_3 = 28.8 \end{aligned}$$

Maintenant, le système d'équations est strictement diagonalement dominant. Ainsi, la méthode de Gauss-Seidel convergera certainement. Nous avons

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 6.7 & 1.1 & 2.2 \\ 3.1 & 9.4 & -1.5 \\ 2.1 & -1.5 & 8.4 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3.1 & 0 & 0 \\ 2.1 & -1.5 & 0 \end{bmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{bmatrix} 6.7 & 0 & 0 \\ 0 & 9.4 & 0 \\ 0 & 0 & 8.4 \end{bmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1.1 & 2.2 \\ 0 & 0 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U}$$

Ici, on prend $\varepsilon = 0.0002$.

a. **Méthode de Gauss-Seidel**

En utilisant l'équation (3.12)-(3.14), nous obtenons

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + h^{(k)}$$

où

$$h^{(k)} = \left(L + D\right)^{-1} r^{(k)}$$

et

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

Première étape :

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0.$$

Première itération :

$$r^{(0)} = b + Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 20.5 \\ 22.9 \\ 28.8 \end{pmatrix}$$

$$h^{(0)} = (L+D)^{-1} r^{(0)} = \left(\begin{bmatrix} 0.149254 & 0 & 0 \\ -0.049222 & 0.106383 & 0 \\ -0.0461031 & 0.018997 & 0.119048 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} 20.5 \\ 22.9 \\ 28.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.0597 \\ 1.42712 \\ 2.91849 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + h^{(0)} = \begin{pmatrix} 3.0597 \\ 1.42712 \\ 2.91849 \end{pmatrix}$$

$$\left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|_\infty = \max \{3.0597, 1.42712, 2.91849\} = 3.0597 > \varepsilon$$

Deuxième itération :

$$r^{(1)} = b - Ax^{(1)} = \begin{pmatrix} -7.99051 \\ 4.37773 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h^{(1)} = (L+D)^{-1} r^{(1)} = \left(\begin{bmatrix} 0.149254 & 0 & 0 \\ -0.049222 & 0.106383 & 0 \\ -0.0461031 & 0.018997 & 0.119048 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} -7.99051 \\ 4.37773 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.19261 \\ 0.859025 \\ 0.451551 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + h^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.86709 \\ 2.28614 \\ 3.37004 \end{pmatrix}$$

$$\left\| x^{(2)} - x^{(1)} \right\|_\infty = \max \{1.19261, 0.859025, 0.451551\} = 1.19261 > \varepsilon$$

Troisième itération :

$$r^{(2)} = b + Ax^{(2)} = \begin{pmatrix} -1.93834 \\ 0.677326 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h^{(2)} = (L+D)^{-1} r^{(2)} = \left(\begin{bmatrix} 0.149254 & 0 & 0 \\ -0.049222 & 0.106383 & 0 \\ -0.0461031 & 0.018997 & 0.119048 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} -1.93834 \\ 0.677326 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.289304 \\ 0.167465 \\ 0.10223 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = x^{(2)} + h^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.57778 \\ 2.45361 \\ 3.47227 \end{pmatrix}$$

$$\left\|x^{(3)}-x^{(2)}\right\|_{\infty}=\max\{0.289304,0.167465,0.102233\}=0.289304>\varepsilon$$

Quatrième itération :

$$r^{(3)}=b+Ax^{(3)}=\begin{pmatrix}-0.409118\\0.153346\\0\end{pmatrix}$$

$$h^{(3)}=(L+D)^{-1}r^{(3)}=\left(\begin{bmatrix}0.149254&0&0\\-0.049222&0.106383&0\\-0.0461031&0.018997&0.119048\end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix}-0.409118\\0.153346\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.0610624\\0.036451\\0.0217747\end{pmatrix}$$

$$x^{(4)}=x^{(3)}+h^{(3)}=\begin{pmatrix}1.51672\\2.49006\\3.49404\end{pmatrix}$$

$$\left\|x^{(4)}-x^{(3)}\right\|_{\infty}=\max\{0.0610624,0.036451,0.0217747\}=0.0610624>\varepsilon$$

Cinquième itération :

$$r^{()}=b-Ax^{()}=\begin{pmatrix}\\\end{pmatrix}$$

$$h^{()}=(L+D)^{-1}r^{()}=\left(\begin{bmatrix}0.149254&0&0\\-0.049222&0.106383&0\\-0.0461031&0.018997&0.119048\end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix}\\\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\\\end{pmatrix}$$

$$x^{()}=x^{()}+h^{()}=\begin{pmatrix}\\\end{pmatrix}$$

$$\left\|x^{()}-x^{()}\right\|_{\infty}=\max\{\}=>\varepsilon$$

Sixième itération :

$$r^{()}=b+Ax^{()}=\begin{pmatrix}\\\end{pmatrix}$$

$$h^{()}=(L+D)^{-1}r^{()}=\left(\begin{bmatrix}0.149254&0&0\\-0.049222&0.106383&0\\-0.0461031&0.018997&0.119048\end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix}\\\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\\\end{pmatrix}$$

$$x^{()}=x^{()}+h^{()}=\begin{pmatrix}\\\end{pmatrix}$$

$$\left\|x^{()}-x^{()}\right\|_{\infty}=\max\{\}=>\varepsilon$$

Septième itération :

$$r^{()}=b+Ax^{()}=\begin{pmatrix}\\\end{pmatrix}$$

$$h^{()} = (L+D)^{-1}\, r^{()} = \left(\begin{bmatrix} 0.149254 & 0 & 0 \\ -0.049222 & 0.106383 & 0 \\ -0.0461031 & 0.018997 & 0.119048 \end{bmatrix} \right) \left(\quad \right) = \left(\quad \right)$$

$$x^{(7)} = x^{(6)} + h^{(6)} = \begin{pmatrix} 1.50017 \\ 2.4999 \\ 3.49994 \end{pmatrix}$$

$$\left\| x^{(7)} - x^{(6)} \right\|_\infty = \max \{0.000604641, 0.000359552, 0.000215366\} => \varepsilon$$

Huitième itération :

$$r^{(7)} = b + Ax^{(7)} = \begin{pmatrix} -0.000869312 \\ 0.000323049 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h^{(7)} = (L+D)^{-1}\, r^{(7)} = \left(\begin{bmatrix} 0.149254 & 0 & 0 \\ -0.049222 & 0.106383 & 0 \\ -0.0461031 & 0.018997 & 0.119048 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} -0.000869312 \\ 0.000323049 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.000129748 \\ 0.0000771562 \\ 0.0000462149 \end{pmatrix}$$

$$x^{(8)} = x^{(7)} + h^{(7)} = \begin{pmatrix} 1.50004 \\ 2.49998 \\ 3.49999 \end{pmatrix}$$

$$\left\| x^{(8)} - x^{(7)} \right\|_\infty = \max \{0.000129748, 0.0000771562, 0.0000462149\} = 0.000129748 < \varepsilon$$

Ainsi, la séquence d'approximations successives se termine à la huitième itération.

Par conséquent, la solution requise du système d'équations donné est

$$x_1 = 1.5,\ x_2 = 2.5,\ \text{et } x_3 = 3.5.$$

b. Méthode SOR

En utilisant l'équation (4.10)-(4.12), nous obtenons

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

où

$$h^{(k)} = \omega\, (D + \omega L)^{-1}\, r^{(k)}$$

et

$$r^{(k)} = b + Ax^{(k)}.$$

Encore une fois, à partir de l'Équation (4.7), la valeur optimale ω^* du facteur de relaxation est donnée par

$$\omega^* = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \varrho\,(S)}}, \tag{15}$$

où $S = -\,(L+D)^{-1}\, U$ est la matrice d'itération de la méthode de Gauss–Seidel.

Maintenant, $\varrho\,(S) = 0.214589$.

Par conséquent, la valeur optimale ω^* du facteur de relaxation est

$$\omega^* = \frac{2}{1+\sqrt{1-\varrho(S)}} = 1.06031, \tag{16}$$

Première étape :

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$$

Première itération

$$r^{(0)} = b + Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 20.5 \\ 22.9 \\ 28.8 \end{pmatrix}$$

$$h^{(0)} = \omega\left(D+\omega L\right)^{-1} r^{(0)} = \left(\begin{bmatrix} 0.149254 & 0 & 0 \\ -0.0521907 & 0.106383 & 0 \\ -0.0494458 & 0.0201427 & 0.119048 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} 20.5 \\ 22.9 \\ 28.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.24424 \\ 1.44866 \\ 3.04968 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + h^{(0)} = \begin{pmatrix} 3.24424 \\ 1.44866 \\ 3.04968 \end{pmatrix}$$

$$\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_\infty = \max\left\{3.24424, 1.44866, 3.04968\right\} = 3.24424 > \varepsilon$$

Deuxième itération

$$r^{(1)} = b - Ax^{(1)} = \begin{pmatrix} -9.53925 \\ 3.79991 \\ -1.45719 \end{pmatrix}$$

$$h^{(1)} = \omega\left(D+\omega L\right)^{-1} r^{(1)} = \left(\begin{bmatrix} 0.149254 & 0 & 0 \\ -0.0521907 & 0.106383 & 0 \\ -0.0494458 & 0.0201427 & 0.119048 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} -9.53925 \\ 3.79991 \\ -1.45719 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.50964 \\ 0.956516 \\ 0.397344 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + h^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.7346 \\ 2.40518 \\ 3.44702 \end{pmatrix}$$

$$\left\|x^{(2)} - x^{(1)}\right\|_\infty = \max\left\{1.7346, 2.40518, 3.44702\right\} = 3.44702 > \varepsilon$$

Troixième itération

$$r^{()} = b + Ax^{()} = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$$

$$h^{()} = \omega\left(D+\omega L\right)^{-1} r^{()} = \left(\begin{bmatrix} 0.149254 & 0 & 0 \\ -0.0521907 & 0.106383 & 0 \\ -0.0494458 & 0.0201427 & 0.119048 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} \ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$$

$$x^{()} = x^{()} + h^{()} = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$$

$$\left\|x^{()}-x^{()}\right\|_{\infty}=\max\{\}=>\varepsilon$$

Quatrième itération

$$r^{()}=b-Ax^{()}=\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$h^{()}=\omega\left(D+\omega L\right)^{-1}r^{()}=\left(\begin{bmatrix} 0.149254 & 0 & 0 \\ -0.0521907 & 0.106383 & 0 \\ -0.0494458 & 0.0201427 & 0.119048 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$x^{()}=x^{()}+h^{()}=\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\left\|x^{()}-x^{()}\right\|_{\infty}=\max\{\}=>\varepsilon$$

Cinquième itération

$$r^{()}=b+Ax^{()}=\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$h^{()}=\omega\left(D+\omega L\right)^{-1}r^{()}=\left(\begin{bmatrix} 0.149254 & 0 & 0 \\ -0.0521907 & 0.106383 & 0 \\ -0.0494458 & 0.0201427 & 0.119048 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$x^{()}=x^{()}+h^{()}=\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\left\|x^{()}-x^{()}\right\|_{\infty}=\max\{\}=>\varepsilon$$

Sixième itération

$$r^{(5)}=b-Ax^{(5)}=\begin{pmatrix} -0.000986424 \\ 0.000223372 \\ 0.000196314 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} h^{(5)} &= \omega\left(D+\omega L\right)^{-1}r^{(5)}=\left(\begin{bmatrix} 0.149254 & 0 & 0 \\ -0.0521907 & 0.106383 & 0 \\ -0.0494458 & 0.0201427 & 0.119048 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} -0.000986424 \\ 0.000223372 \\ 0.000196314 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.000156107 \\ 0.0000797835 \\ 0.0000317067 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$x^{(6)}=x^{(5)}+h^{(5)}=\begin{pmatrix} 1.50002 \\ 2.49999 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

$$\left\|x^{(6)}-x^{(7)}\right\|_{\infty}=\max\{0.000156107, 0.0000797835, 0.0000317067\}=0.000156107<\varepsilon$$

Ainsi, la séquence d'approximations successives se termine à la sixième itération.

Par conséquent, la solution requise du système d'équations donné est

$$x_1 = 1.5,\ x_2 = 2.5 \text{ et } x_3 = 3.5$$

En comparant les résultats ci-dessus, on peut facilement observer que la méthode SOR converge plus rapidement que la méthode Gauss-Seidel.

Example 17 *Résoudre le système d'équations linéaires suivant à l'aide de la forme matricielle de la méthode de relaxation avec déplacements successifs*

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Utilisez le vecteur d'approximation initial, $x^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$ *et le paramètre de relaxation* $\omega = 1.02943725$.

Rép: La matrice $A = -L + D - U$ peut s'écrire comme suit

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}} = \underset{-L}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}} + \underset{D}{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}} + \underset{-U}{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

En utilisant la forme matricielle (), nous avons

$$x^{(k+1)} = (D + \omega L)^{-1} \left[(1-\omega) D - \omega U\right] x^{(k)} + \omega \left(D + \omega L\right)^{-1} b$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = -\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} + 1.02943725 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$
$$\left(-0.02943725 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \_1.02943725 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix}$$
$$+1.02943725 \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} + 1.02943725 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

En utilisant le vecteur initial $x^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$ dans le système ci-dessus, la première itération $x^{(1)}$ est donnée par

$x^{(1)} = [1.715729 \quad -1.126984 \quad 1.940036]^T$

De même, les autres itérations sont données par

Itération 2

0.612787 $\quad -0.806563 \quad$ 2.001852

Itération 3

0.733994 − 0.753192 1.941368
Itération 4
0.769495 − 0.763336 1.939233
Itération 5
0.765702 − 0.765071 1.941165
Itération 6
0.764555 − 0.764751 1.941239
Itération 7
0.764674 − 0.7646941.941177
Itération 8
0.764711 − 0.764704 1.941175
Après huit itérations, la solution est la suivante
$x_1 = 0.764711$, $x_2 = -0.764704$, $x_3 = 1.941175$.

2 Formules pour les méthodes itératives

Méthode	Formulation (prochaine itération $x_i^{(k+1)},\ 1 \leqslant i \leqslant n$)	Forme r
Jacobi	$x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right]$	$X^{(k+}$
Gauss − Seidel	$x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right]$	$X^{(k+1)} =$
Relaxation (Jacobi)	$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)\, x_i^{(k)} + \dfrac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - _{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_i^{(k)} \right]$	$X^{(k+1}$
Relaxation (Gauss − Seidel)	$x^{(k+1)} = (1-\omega)\, x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_i^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_i^{(k)} \right]$	$X^{(k+1)} = (D + \omega L$