ANALYSE FONCTIONNELLE ET THÉORIE DES OPÉRATEURS

EXERCICES CORRIGÉS

Josette Charles
Professeur à l'Université de Montpellier 2

Mostafa Mbekhta
Professeur à l'Université de Lille 1

Hervé Queffélec
Professeur à l'Université de Lille 1

DUNOD

Illustration de couverture : digital vision®

ISBN 978-2-1005-5453-9

À mes parents.

Ils ne savaient ni lire ni écrire.
Leur amour me permet aujourd'hui d'écrire ce livre.

Mostafa Mbekhta

À mes parents.

Hervé Queffélec

À tous les participants du groupe « opérateurs » de Montpellier.

Josette Charles

Avant-propos

L'idée de cet ouvrage s'est peu à peu dégagée à l'occasion de rencontres (colloques, soutenances de thèse, GDR, etc.) entre trois amis universitaires travaillant, à des titres divers, dans le domaine de l'analyse fonctionelle. Cette Analyse dite fonctionnelle interagit avec de nombreux autres domaines des mathématiques, avec un enrichissement mutuel. C'est ce que nous avons tenté de mettre en évidence tout au long de ces dix chapitres d'exercices corrigés et commentés, en ayant le souci de nous maintenir à un niveau moyen qui est celui d'une première année de Master, c'est-à-dire celui du M1, et de rendre l'utilisation de cet ouvrage commode pour un lecteur motivé et ayant un niveau initial équivalent à celui du L3. Illustrons par quelques exemples les interactions mentionnées plus haut :

1. **Convexité :**

   Celle-ci apparaît notamment avec le théorème de Hahn-Banach. Ce dernier débouche sur la construction de moyennes invariantes (« moyennabilité » du groupe des entiers) aussi appelées moyennes de Banach au chapitre III. Ces moyennes à leur tour sont utilisées au chapitre V pour démontrer le théorème de similarité de Nagy. Ce théorème intervient lui-même au chapitre X pour donner une caractérisation complète des opérateurs ayant une « grande » algèbre de Deddens associée. Un autre aspect de la convexité est la notion de point extrémal, présente au chapitre IX (avec le théorème de Krein-Milman sous-jacent) et au chapitre VI avec la caractérisation des points extrémaux de la boule unité des opérateurs sur un Hilbert, qui fait apparaître des phénomènes nouveaux intéressants (co-isométries vraies) en dimension infinie.

2. **Topologie :**

   L'utilisation de la *compacité* apparaît au chapitre VII avec les opérateurs compacts, dont on sait que la théorie spectrale est proche de celle faite en dimension finie (théorie de Riesz) et le théorème d'Ascoli-Arzela y est souvent utilisé, ainsi que la convergence quand il y a une seule valeur d'adhérence (et quand l'espace ambiant est compact), et les théorèmes de Tychonoff, Banach-Alaoglu, pour les topologies affaiblies du chapitre IX. La *connexité* joue aussi un certain rôle dans cet ouvrage, notamment au chapitre V (spectre d'une isométrie) ou au chapitre X (Théorème de Runge, exponentielles dans l'espace des fonctions continues, frontière du spectre, composantes connexes du groupe des éléments inversibles dans une algèbre de Banach, etc.). Enfin, la *complétude* est évidemment centrale tout au long de ces chapitres, avec les théorèmes de Baire (chapitre 2, sommes de fonctions partout sans dérivée), de Banach-Steinhaus, du graphe fermé et de l'application ouverte (Chapitres I, II, IV, VI par exemple).

3. **Intégration et théorie de la mesure :**
   Une classe très intéressante d'opérateurs, les *opérateurs intégraux*, est étudiée au chapitre VIII, où la théorie de l'intégration est centrale, avec les théorèmes de Fubini et de convergence dominée (par exemple, dans l'exercice 10, le fait sous-jacent qu'une suite de fonctions uniformément bornées qui converge simplement vers zéro converge faiblement au sens des espaces de Banach). Cette théorie de la mesure permet également de donner, au chapitre X, des exemples intéressants d'algèbres de Banach dont le groupe des éléments inversibles contient « beaucoup » de non-exponentielles, et qui sont liées à l'analyse harmonique et et aux séries de Fourier. Elle intervient aussi au chapitre V pour donner l'exemple de l'espace de Bergman dont la structure est riche et instructive (noyau reproduisant, opérateurs de Toeplitz, inversibles sans racine carrée, etc.).

4. **Fonctions holomorphes :**
   On a déjà mentionné le cas de l'espace de Bergman au chapitre V. Mais ces fonctions sont aussi présentes au chapitre I, par exemple, et encore plus aux chapitres VI et X, où leur utilité dans l'étude des algèbres de Banach est illustrée dans de nombreux exercices, en collaboration avec le théorème de Hahn-Banach : formule de Cauchy vectorielle, séries de Laurent et formule du rayon spectral, théorèmes de Runge et Liouville, etc.

5. **Propriétés isométriques :**
   Une propriété frappante de ces isométries est dégagée au chapitre I : *la structure métrique d'un espace vectoriel normé détermine sa structure linéaire* (Ex.I.9). Dans le cas hilbertien, on peut dire beaucoup plus, et le groupe des isométries surjectives (groupe unitaire) est très riche : en dimension finie, cette richesse est déjà connue, et ses applications, on en explore d'autres aspects en dimension infinie. Quand la dimension est infinie apparaissent des phénomènes nouveaux, comme l'existence d'isométries non surjectives avec le fameux shift unilatéral S, omni-présent dans cet ouvrage. L'étude générale des isométries (et des isométries partielles) s'appuie fortement sur la décomposition polaire et ses variantes (notamment la décomposition polaire maximale), qui est étudiée en détail dans les exercices du chapitre VI, et rend à peu près autant de services que la décomposition polaire $z = e^{i\theta}\rho$ des nombres complexes ! C'est ce que nous avons cherché à montrer, en particulier dans la caractérisation complète des points extrémaux de la boule unité des opérateurs sur un Hilbert. D'autres propriétés des isométries partielles, certaines peu connues, sont également proposées au chapitre VI.

Comme on le voit, les interactions sont également fortes entre les différents chapitres, qui s'éclairent mutuellement, nous nous sommes parfois permis d'invoquer au chapitre x un exercice du chapitre y, avec $y > x$. Et nous ne saurions trop recommander au lecteur d'avoir une lecture et une utilisation *globales* de cet ouvrage, au lieu d'en faire un usage ponctuel sur un exercice spécifique.

Un mot sur le contenu pour compléter ce qui a déjà été dit : cet ouvrage contient des résultats classiques, mais sur lesquels il est utile à l'étudiant de s'entraîner, comme certains exercices du chapitre I. Il contient des résultats plus récents ou des preuves moins classiques que nous ne saurions citer tous, comme l'équation de Daugavet au chapitre VIII, la preuve par série de Neumann du lemme de Wiener ou les caractérisations de l'algèbre de Deddens au chapitre X, et les propriétés fines des contractions au chapitre VI.

Précisons un point important : on donne d'abord tous les énoncés d'un chapitre, ensuite tous les corrigés des exercices de ce chapitre, pour favoriser la démarche :
« Lecture de l'énoncé. Recherche patiente d'une solution. Lecture de la solution tout à fait à la fin ».

Ces corrigés sont complets et raisonnablement détaillés à notre avis, mais nous n'avons pas cherché à surdétailler, ce qui conduirait inévitablement à un certain alourdissement et à une certaine obscurité, et nous ne saurions trop répéter que ce livre n'est pas fait pour être lu à la plage ou dans un hamac !

D'autre part, puisqu'il n'y a pas à proprement parler de « cours » dans ce livre, le traditionnel index a pris la forme d'une trentaine de pages (situées au début de l'ouvrage), qui décrivent chapitre par chapitre les notations utilisées et les résultats fondamentaux de cours (dont certains, peu nombreux, sont redémontrés en exercice). Dans les corrigés, on fait fort souvent référence à ces trente pages, ce qui devrait rendre l'utilisation du livre très commode au lecteur.

Répétons-nous encore une fois : une bibliographie spécifique vient compléter le livre. Cette bibliographie comporte quelques ouvrages classiques (comme les livres de Rudin), parfois disponibles seulement en langue étrangère, mais que leur excellence rend hautement recommandables (nous pensons notamment aux livres de P. Halmos et de D. Werner). Elle comporte également des articles, dont le choix reflète les goûts complémentaires des trois auteurs.

Organisation générale de l'ouvrage

(1) Résumé du cours, ne remplaçant pas un manuel de cours mais servant de référence.

Les numéros des définitions et propriétés : l'indication dans une solution de (D 4.7), par exemple, est celle de la définition utile, chapitre 4, numéro 7.

(2) Dix chapitres d'exercices (numérotés de I à X) se reportant chacun au chapitre du cours de même numéro.

Dans chaque chapitre, le lecteur trouvera trois sortes d'exercices :

Exercices brefs destinés à contrôler la compréhension initiale du chapitre.

Exercices plus longs faisant appel à plus de réflexion.

Exercices d'ouverture vers une meilleure connaissance des notions d'analyse fonctionnelle et vers quelques résultats importants, parfois assez récents.

Quelques précisions sur l'ordre

Dans chaque chapitre d'exercices, les textes sont groupés au début.
Les relations munies d'un numéro : les numéros sont dans l'ordre de **première apparition** de la relation dans le chapitre (par exemple (II.1) désigne la première relation du chapitre II) - cette relation est répétée au besoin à l'intérieur de l'exercice (énoncé ou solution) pour une meilleure compréhension du lecteur.

Connaissances préalables

(1) La structure générale d'un espace métrique (voire topologique), les notions de suite convergente ou de Cauchy, celles de sous-espace muni de la structure de l'espace.
(2) Le langage usuel des opérateurs linéaires entre espaces vectoriels, en particulier espaces de dimension finie (noyau, image, valeurs propres, espaces propres, opérateurs auto-adjoints...) éventuellement la forme de Jordan, admise ici, mais utilisée dans l'exercice V.12.

Ordre des chapitres

Pour les exercices sur les opérateurs, nous avons choisi de parler d'abord des opérateurs linéaires entre espaces normés (ch. IV) et d'aborder ensuite le cas particulier des opérateurs entre espaces de Hilbert (ch. VI).
Le cas plus général d'éléments dans une algèbre de Banach ou une C*-algèbre est abordé au dernier chapitre (ch. X). Cependant les résultats qui y apparaissent sont souvent, dans un cours assez bref d'analyse fonctionnelle, prouvés dans le cadre des opérateurs entre espaces de Banach sans attirer l'attention sur leur généralité. Ils peuvent alors apparaître deux fois pour le lecteur attentif (par exemple (P 6.6) et (P 10.10)).

Le lecteur ?

Celui qui se contente de « lire » l'ouvrage n'aura rien appris.
Un ouvrage d'exercices est fait pour vérifier les connaissances acquises et pour susciter la réflexion, la recherche personnelle, pour mettre le lecteur dans l'état d'esprit de celui qui, ayant acquis un certain bagage, cherche par lui-même à en savoir plus.
Bien sûr, un texte d'exercice posé de manière précise et directive peut enlever le mystère qu'il y aurait à se poser personnellement une question dont on ignore la réponse.
Nous avons cependant cherché à organiser les textes pour que le « lecteur » puisse par l'abord préalable de quelques cas particuliers (l'usage des opérateurs en dimension finie est parfois fondamental) voir pourquoi la réponse peut calquer celle de la dimension finie ou au contraire être différente.
Il est évident qu'une recherche d'exercice doit être faite sans avoir pris du tout connaissance de la solution. On doit faire un plan de résolution d'une question et non partir au hasard. L'usage du corrigé ne doit être fait qu'après une recherche personnelle non négligeable, en dernière instance, en quelque sorte.

Avant-propos

L'idée de cet ouvrage s'est peu à peu dégagée à l'occasion de rencontres (colloques, soutenances de thèse, GDR, etc.) entre trois amis universitaires travaillant, à des titres divers, dans le domaine de l'analyse fonctionelle. Cette Analyse dite fonctionnelle interagit avec de nombreux autres domaines des mathématiques, avec un enrichissement mutuel. C'est ce que nous avons tenté de mettre en évidence tout au long de ces dix chapitres d'exercices corrigés et commentés, en ayant le souci de nous maintenir à un niveau moyen qui est celui d'une première année de Master, c'est-à-dire celui du M1, et de rendre l'utilisation de cet ouvrage commode pour un lecteur motivé et ayant un niveau initial équivalent à celui du L3. Illustrons par quelques exemples les interactions mentionnées plus haut :

1. **Convexité :**

   Celle-ci apparaît notamment avec le théorème de Hahn-Banach. Ce dernier débouche sur la construction de moyennes invariantes (« moyennabilité » du groupe des entiers) aussi appelées moyennes de Banach au chapitre III. Ces moyennes à leur tour sont utilisées au chapitre V pour démontrer le théorème de similarité de Nagy. Ce théorème intervient lui-même au chapitre X pour donner une caractérisation complète des opérateurs ayant une « grande » algèbre de Deddens associée. Un autre aspect de la convexité est la notion de point extrémal, présente au chapitre IX (avec le théorème de Krein-Milman sous-jacent) et au chapitre VI avec la caractérisation des points extrémaux de la boule unité des opérateurs sur un Hilbert, qui fait apparaître des phénomènes nouveaux intéressants (co-isométries vraies) en dimension infinie.

2. **Topologie :**

   L'utilisation de la *compacité* apparaît au chapitre VII avec les opérateurs compacts, dont on sait que la théorie spectrale est proche de celle faite en dimension finie (théorie de Riesz) et le théorème d'Ascoli-Arzela y est souvent utilisé, ainsi que la convergence quand il y a une seule valeur d'adhérence (et quand l'espace ambiant est compact), et les théorèmes de Tychonoff, Banach-Alaoglu, pour les topologies affaiblies du chapitre IX. La *connexité* joue aussi un certain rôle dans cet ouvrage, notamment au chapitre V (spectre d'une isométrie) ou au chapitre X (Théorème de Runge, exponentielles dans l'espace des fonctions continues, frontière du spectre, composantes connexes du groupe des éléments inversibles dans une algèbre de Banach, etc.). Enfin, la *complétude* est évidemment centrale tout au long de ces chapitres, avec les théorèmes de Baire (chapitre 2, sommes de fonctions partout sans dérivée), de Banach-Steinhaus, du graphe fermé et de l'application ouverte (Chapitres I, II, IV, VI par exemple).

3. **Intégration et théorie de la mesure :**

   Une classe très intéressante d'opérateurs, les *opérateurs intégraux*, est étudiée au chapitre VIII, où la théorie de l'intégration est centrale, avec les théorèmes de Fubini et de convergence dominée (par exemple, dans l'exercice 10, le fait sous-jacent qu'une suite de fonctions uniformément bornées qui converge simplement vers zéro converge faiblement au sens des espaces de Banach). Cette théorie de la mesure permet également de donner, au chapitre X, des exemples intéressants d'algèbres de Banach dont le groupe des éléments inversibles contient « beaucoup » de non-exponentielles, et qui sont liées à l'analyse harmonique et et aux séries de Fourier. Elle intervient aussi au chapitre V pour donner l'exemple de l'espace de Bergman dont la structure est riche et instructive (noyau reproduisant, opérateurs de Toeplitz, inversibles sans racine carrée, etc.).

4. **Fonctions holomorphes :**

   On a déjà mentionné le cas de l'espace de Bergman au chapitre V. Mais ces fonctions sont aussi présentes au chapitre I, par exemple, et encore plus aux chapitres VI et X, où leur utilité dans l'étude des algèbres de Banach est illustrée dans de nombreux exercices, en collaboration avec le théorème de Hahn-Banach : formule de Cauchy vectorielle, séries de Laurent et formule du rayon spectral, théorèmes de Runge et Liouville, etc.

5. **Propriétés isométriques :**

   Une propriété frappante de ces isométries est dégagée au chapitre I : *la structure métrique d'un espace vectoriel normé détermine sa structure linéaire* (Ex.I.9). Dans le cas hilbertien, on peut dire beaucoup plus, et le groupe des isométries surjectives (groupe unitaire) est très riche : en dimension finie, cette richesse est déjà connue, et ses applications, on en explore d'autres aspects en dimension infinie. Quand la dimension est infinie apparaissent des phénomènes nouveaux, comme l'existence d'isométries non surjectives avec le fameux shift unilatéral S, omni-présent dans cet ouvrage. L'étude générale des isométries (et des isométries partielles) s'appuie fortement sur la décomposition polaire et ses variantes (notamment la décomposition polaire maximale), qui est étudiée en détail dans les exercices du chapitre VI, et rend à peu près autant de services que la décomposition polaire $z = e^{i\theta}\rho$ des nombres complexes ! C'est ce que nous avons cherché à montrer, en particulier dans la caractérisation complète des points extrémaux de la boule unité des opérateurs sur un Hilbert. D'autres propriétés des isométries partielles, certaines peu connues, sont également proposées au chapitre VI.

Comme on le voit, les interactions sont également fortes entre les différents chapitres, qui s'éclairent mutuellement, nous nous sommes parfois permis d'invoquer au chapitre x un exercice du chapitre y, avec $y > x$. Et nous ne saurions trop recommander au lecteur d'avoir une lecture et une utilisation *globales* de cet ouvrage, au lieu d'en faire un usage ponctuel sur un exercice spécifique.

Un mot sur le contenu pour compléter ce qui a déjà été dit : cet ouvrage contient des résultats classiques, mais sur lesquels il est utile à l'étudiant de s'entraîner, comme certains exercices du chapitre I. Il contient des résultats plus récents ou des preuves moins classiques que nous ne saurions citer tous, comme l'équation de Daugavet au chapitre VIII, la preuve par série de Neumann du lemme de Wiener ou les caractérisations de l'algèbre de Deddens au chapitre X, et les propriétés fines des contractions au chapitre VI.

Précisons un point important : on donne d'abord tous les énoncés d'un chapitre, ensuite tous les corrigés des exercices de ce chapitre, pour favoriser la démarche :
« Lecture de l'énoncé. Recherche patiente d'une solution. Lecture de la solution tout à fait à la fin ».

Ces corrigés sont complets et raisonnablement détaillés à notre avis, mais nous n'avons pas cherché à surdétailler, ce qui conduirait inévitablement à un certain alourdissement et à une certaine obscurité, et nous ne saurions trop répéter que ce livre n'est pas fait pour être lu à la plage ou dans un hamac !

D'autre part, puisqu'il n'y a pas à proprement parler de « cours » dans ce livre, le traditionnel index a pris la forme d'une trentaine de pages (situées au début de l'ouvrage), qui décrivent chapitre par chapitre les notations utilisées et les résultats fondamentaux de cours (dont certains, peu nombreux, sont redémontrés en exercice). Dans les corrigés, on fait fort souvent référence à ces trente pages, ce qui devrait rendre l'utilisation du livre très commode au lecteur.

Répétons-nous encore une fois : une bibliographie spécifique vient compléter le livre. Cette bibliographie comporte quelques ouvrages classiques (comme les livres de Rudin), parfois disponibles seulement en langue étrangère, mais que leur excellence rend hautement recommandables (nous pensons notamment aux livres de P. Halmos et de D. Werner). Elle comporte également des articles, dont le choix reflète les goûts complémentaires des trois auteurs.

Organisation générale de l'ouvrage

(1) Résumé du cours, ne remplaçant pas un manuel de cours mais servant de référence.

Les numéros des définitions et propriétés : l'indication dans une solution de (D 4.7), par exemple, est celle de la définition utile, chapitre 4, numéro 7.

(2) Dix chapitres d'exercices (numérotés de I à X) se reportant chacun au chapitre du cours de même numéro.

Dans chaque chapitre, le lecteur trouvera trois sortes d'exercices :

Exercices brefs destinés à contrôler la compréhension initiale du chapitre.

Exercices plus longs faisant appel à plus de réflexion.

Exercices d'ouverture vers une meilleure connaissance des notions d'analyse fonctionnelle et vers quelques résultats importants, parfois assez récents.

Quelques précisions sur l'ordre

Dans chaque chapitre d'exercices, les textes sont groupés au début.
Les relations munies d'un numéro : les numéros sont dans l'ordre de **première apparition** de la relation dans le chapitre (par exemple (II.1) désigne la première relation du chapitre II) - cette relation est répétée au besoin à l'intérieur de l'exercice (énoncé ou solution) pour une meilleure compréhension du lecteur.

Connaissances préalables

(1) La structure générale d'un espace métrique (voire topologique), les notions de suite convergente ou de Cauchy, celles de sous-espace muni de la structure de l'espace.
(2) Le langage usuel des opérateurs linéaires entre espaces vectoriels, en particulier espaces de dimension finie (noyau, image, valeurs propres, espaces propres, opérateurs auto-adjoints...) éventuellement la forme de Jordan, admise ici, mais utilisée dans l'exercice V.12.

Ordre des chapitres

Pour les exercices sur les opérateurs, nous avons choisi de parler d'abord des opérateurs linéaires entre espaces normés (ch. IV) et d'aborder ensuite le cas particulier des opérateurs entre espaces de Hilbert (ch. VI).
Le cas plus général d'éléments dans une algèbre de Banach ou une C*-algèbre est abordé au dernier chapitre (ch. X). Cependant les résultats qui y apparaissent sont souvent, dans un cours assez bref d'analyse fonctionnelle, prouvés dans le cadre des opérateurs entre espaces de Banach sans attirer l'attention sur leur généralité. Ils peuvent alors apparaître deux fois pour le lecteur attentif (par exemple (P 6.6) et (P 10.10)).

Le lecteur ?

Celui qui se contente de « lire » l'ouvrage n'aura rien appris.
Un ouvrage d'exercices est fait pour vérifier les connaissances acquises et pour susciter la réflexion, la recherche personnelle, pour mettre le lecteur dans l'état d'esprit de celui qui, ayant acquis un certain bagage, cherche par lui-même à en savoir plus.
Bien sûr, un texte d'exercice posé de manière précise et directive peut enlever le mystère qu'il y aurait à se poser personnellement une question dont on ignore la réponse.
Nous avons cependant cherché à organiser les textes pour que le « lecteur » puisse par l'abord préalable de quelques cas particuliers (l'usage des opérateurs en dimension finie est parfois fondamental) voir pourquoi la réponse peut calquer celle de la dimension finie ou au contraire être différente.
Il est évident qu'une recherche d'exercice doit être faite sans avoir pris du tout connaissance de la solution. On doit faire un plan de résolution d'une question et non partir au hasard. L'usage du corrigé ne doit être fait qu'après une recherche personnelle non négligeable, en dernière instance, en quelque sorte.

Toute solution proposée est faite pour réfléchir aux méthodes employées. En ce sens il peut y en avoir plusieurs, ou des exercices semblables associés à différents chapitres. Ceci peut mettre en évidence les possibilités de solutions utilisant peu d'informations sur le cours, et montrer ensuite l'amélioration éventuelle apportée par l'usage des grands théorèmes. L'exemple des deux solutions de l'exercice V.4 nous paraît significatif à cet égard.

Dans le cas d'une solution de question nécessitant plusieurs étapes, non explicitées dans le texte, des sous-paragraphes pourront apparaître dans cette solution ; l'attention du lecteur sera alors attirée, leurs intitulés seront en général soulignés, et la difficulté sera autant que possible « fractionnée ». Enfin, une bibliographie courte, mais très ciblée, vient compléter cet ouvrage, dont nous espérons qu'il pourra rendre des services aux étudiants de L3 et M1-M2, ainsi qu'aux agrégatifs et à ceux démarrant une thèse en analyse fonctionnelle.

Nous espérons que ce nouvel ouvrage pourra rendre des services aux étudiants et collègues qui l'utiliseront, et nous acueillerons avec plaisir et intérêt toutes les remarques des lecteurs aux adresses suivantes :

josette.charles@infonie.fr
mbekhta@math.univ-lille1.fr
queff@math.univ-lille1.fr

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

COURS

Seconde partie

Exercices

Partie 1

Cours

Chapitre 1 ESPACES NORMÉS

D1. Définitions

N°	Notion définie	Définition
D 1.1	Semi-norme p	Appplication $p : E \to \mathbb{R}^+$, E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, vérifiant (i) $\forall x, y \in E, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, p(\lambda x) = \mid \lambda \mid p(x)$.
D 1.2	Norme p ou $\\| \\|$	Semi-norme telle que $[p(x) = 0] \Rightarrow [x = 0]$.
D 1.3	Espace normé (E, p) ou $(E, \\| \\|)$	Couple (E, p) formé de l'espace vectoriel E et de la norme p sur E.
D 1.4	Boule ouverte de centre x_0 et rayon r dans E, $B_E(x_0, r)$	$B_E(x_0, r) = \{x \in E \,;\, \\|x - x_0\\| < r\}$.
D 1.5	Boule fermée de centre x_0 et rayon r dans E, $\overline{B}_E(x_0, r)$,	$\overline{B}_E(x_0, r) = \{x \in E \,;\, \\|x - x_0\\| \leq r\}$.
D 1.6	Sphère de centre x_0 et rayon r dans E, $S_E(x_0, r)$	$S_E(x_0, r) = \{x \in E \,;\, \\|x - x_0\\| = r\}$.
D 1.7	Espace de Banach	Espace normé complet pour la distance $d(x, y) = \\|x - y\\|$.
D 1.8	Suite convergente en norme	$x_n, x \in E$, $\lim_{n\to\infty} \\|x_n - x\\| = 0$, x est la limite de la suite.
D 1.9	Suite de Cauchy dans E, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$	x_n, $n \in \mathbb{N}^*$, vecteurs de E. $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \,;\, n, p \geq N_\varepsilon \Rightarrow \\|x_n - x_p\\| \leq \varepsilon$.
D 1.10	Série convergente notée $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$	E espace normé, $u_n \in E$, la suite de terme général $x_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$ est une suite convergente vers $u \in E$, u est la somme de la série.
D 1.11	Série absolument convergente dans un espace normé	E espace normé, $u_n \in E$, la série de terme général $\\|u_n\\|$ est convergente.
D 1.12	Somme directe ou produit direct $E \oplus F$, $E \times F$	E, F espaces normés, $G = E \times F$ ou $E \oplus F$, $G = \{(x, y) \,;\, x \in E, y \in F\}$, $(x, y) + \lambda(x', y') = (x + \lambda x', y + \lambda y')$, $\\|(x, y)\\| = \max(\\|x\\|, \\|y\\|)$ (ou norme équivalente).
D 1.13	Supplémentaires topologiques M, N dans E, $E = M \oplus N$	E espace de Banach, M, N sous-espaces fermés de E, $M \cap N = \{0\}$, $E = M + N$ ($\forall x \in E, \exists y \in M, z \in N \,;\, x = y + z$).
D 1.14	Espace-quotient E/M, $[x]$ ou $\widetilde{x}$	E espace normé, M sous-espace fermé de E, vecteur $[x]$ de E/M : $[x] = \{x + y \,;\, y \in M\}$, $[x + \lambda x'] = [x] + \lambda[x']$ $\\|[x]\\| = \inf\{\\|x + y\\| \,;\, y \in M\}$.
D 1.15	Espaces ℓ^p, $1 \leq p \leq \infty$	Éléments : des suites complexes $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, opération + et $\lambda\times$ usuelles. Éléments et norme : $p < \infty : u_p = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty$, $\\|x\\|_p = (u_p)^{1/p}$. $p = \infty : \\|x\\|_\infty = \sup(\|x_n\| \,;\, n \in \mathbb{N}^*) < \infty$.

Nº	Notion définie	Définition
D 1.16	Espaces $L^p(J)$	$J = [a, b]$, intervalle de $\mathbb{R}$, $L^p(J) = \{f$, classes[1] de fonctions complexes Lebesgue-mesurables sur J ; $\lvert f\rvert^p$ soit intégrable$\}$, $\lVert f\rVert_p = (\int_a^b \lvert f \rvert^p \, dt)^{1/p}$.
D 1.17	Espaces $L^\infty(J)$	$J = [a, b]$, intervalle de $\mathbb{R}$, $L^\infty(J) = \{f \in$ classes[1] de fonctions complexes Lebesgue mesurables bornées sur $J\}$, $\lVert f\rVert_\infty = \sup(\lvert f(x)\rvert ; x \in J)$ (au sens des classes).

P1. Propriétés

Nº	Désignation	Énoncé
P 1.1	Complétude automatique	Tout espace normé E de dimension finie est un espace de Banach.
P 1.2	Somme vectorielle de sous-espaces fermés	M, N sous-espaces d'un espace de Banach E [M sous-espace fermé, N de dimension finie] $\Rightarrow$ [$M + N$ fermé] Si $M \cap N = \{0\}$, $M + N = M \oplus N$.
P 1.3	Norme-quotient	E normé, M sous-espace fermé de E, alors E/M est un espace normé. Pour $[x] \in E/M$, $\lVert [x] \rVert = \inf\{\lVert x\rVert ; x \in [x]\}$ est une norme telle que $\lVert [x] \rVert \leq \lVert x \rVert$.
P 1.4	Inégalité de Minkowski finie	Soit $1 < p < \infty$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites dans $\mathbb{C}$. $N \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow (\sum_{n=1}^N \lvert x_n + y_n\rvert^p)^{1/p}$ $\leq (\sum_{n=1}^N \lvert x_n\rvert^p)^{1/p} + (\sum_{n=1}^N \lvert y_n\rvert^p)^{1/p}$.
P 1.5	Inégalité de Hölder finie	Soit $1 < p, q < \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites dans $\mathbb{C}$. $N \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \sum_{n=1}^N \lvert x_n y_n\rvert \leq$ $\leq (\sum_{n=1}^N \lvert x_n\rvert^q)^{1/q} (\sum_{n=1}^N \lvert y_n\rvert^p)^{1/p}$.
P 1.6	Inégalités de Minkowski	Soit $1 < p < \infty$, $\forall x, y \in \ell^p$, $\lVert x + y\rVert_p \leq \lVert x\rVert_p + \lVert y\rVert_p$, $\forall f, g \in L^p$, $\lVert f + g\rVert_p \leq \lVert f\rVert_p + \lVert g\rVert_p$.
P 1.7	Inégalités de Hölder	Soit $1 < p, q < \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\forall x \in \ell^p$, $\forall y \in \ell^q$, $\sum_{n=1}^\infty \lvert xy\rvert \leq \lVert x\rVert_p \, \lVert y\rVert_q$ $\forall f \in L^p$, $\forall g \in L^q$ $\int \lvert f(x)g(x)\rvert dx \leq \lVert f\rVert_p \, \lVert g\rVert_q$.
P 1.8	Complétude des espaces de Lebesgue	Les espaces ℓ^p, L^p sont des espaces de Banach.
P 1.9	Complétude de la somme directe de deux espaces de Banach	[E, F espaces de Banach] $\Rightarrow$ [$E \bigoplus F$ espace de Banach].

1. Dans l'écriture d'un élément de $L^p(J)$, p fini ou infini, on utilise souvent un représentant de la classe d'un élément f sans changer de notation. Le choix du représentant n'influe pas sur la norme.

Chapitre 2 THÉORÈMES FONDAMENTAUX

D2. Définitions

N°	Notion définie	Définition
D 2.1	Ensemble rare, de première catégorie (maigre), de seconde catégorie (non maigre)	S sous-ensemble d'un espace métrique E ; S rare : son adhérence $\overline{S}$ est d'intérieur vide ; S de première catégorie : réunion dénombrable d'ensembles rares ; S de seconde catégorie : il n'est pas de première catégorie.
D 2.2	Ensemble équicontinu	J espace compact, $C(J)$ espace de Banach des fonctions continues sur J à valeurs dans $\mathbb{C}$ muni de $\|\ \|_\infty$, et H sous-ensemble de $C(J)$. H équicontinu : $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in J$, il existe un voisinage V de x tel que, $\forall y \in V$, $\forall f \in H$, $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$.
D 2.3	Opérateur $T : E \to F$, $\ker(T)$, $\mathrm{Im}(T)$, noyau et image de T	T application linéaire définie sur E, à valeurs dans F $\ker(T) = \{x \in E\ ; Tx = 0\}$ $\mathrm{Im}(T) = \{Tx\ ; x \in E\}$.
D 2.4	Opérateur borné T	Application linéaire continue T définie sur E, à valeurs dans F.
D 2.5	Norme de T, $\|T\|$, $\mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{L}(E)$, sous-multiplicativité	Pour T selon (D 2.4), $\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F\ ; \|x\|_E = 1\}$, $\mathcal{L}(E, F)$, espace des opérateurs vérifiant (D 2.4) muni de la norme ci-dessus. $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$. On a $\|AC\| \leq \|A\|\|C\|$.
D 2.6	Application ouverte	E, F espaces normés, T linéaire de E dans F telle que : $\exists \delta > 0\ ; B_F(0, \delta) \subset T[B_E(0, 1)]$.
D 2.7	Application presque ouverte	E, F espaces normés, T linéaire de E dans F telle que : $\exists \delta > 0\ ; B_F(0, \delta) \subset \overline{T[B_E(0, 1)]}$.
D 2.8	Graphe de T, $\mathcal{G}(T)$	$\mathcal{G}(T) = \{(x, Tx)\ ; x \in E\} \subset E \times F$.
D 2.9	E^*, espace dual de E E^{**}, bidual de E	E^* est l'espace des formes linéaires continues sur E on note, pour $f \in E^*$, $f(x) = \langle x, f\rangle$, $E^{**} = (E^*)^*$.
D 2.10	Orthogonal ou polaire de G, $G^\perp$	E espace normé, $G \subseteq E$, $G^\perp = \{f \in E^*\ ; \forall x \in G, \langle x, f\rangle = 0\}$.

P2. Propriétés

N°	Désignation	Énoncé
P 2.1	Caractérisation des Banach	Un espace normé E est de Banach ssi toute série de E absolument convergente est convergente.
P 2.2	Théorème de Riesz (Frédéric)	E espace normé, la boule unité fermée de E est compacte si et seulement si la dimension de E est finie.

N°	Désignation	Énoncé
P 2.3	Théorème d'Ascoli (ou Ascoli-Arzela)	J espace compact, $C(J)$ espace de Banach des fonctions continues sur J à valeurs dans $\mathbb{C}$ muni de $\| \|_\infty$. H sous-ensemble de $C(J)$; H est relativement compact si et seulement si H est équicontinu et borné : $\sup\{\|f\| ; f \in H\} < \infty$.
P 2.4	Continuité automatique	Si E est un espace normé de dimension finie et F un espace normé, toute application linéaire de E dans F est continue.
P 2.5	Norme d'une application linéaire continue	Soient E, F deux espaces normés et T une application linéaire de E dans F, [T continue] $\Leftrightarrow$ $[\exists h > 0, \forall x \in E, \|Tx\| \leq h\|x\|]$, $\|T\| = \inf\{h$ vérifiant l'inégalité$\}$.
P 2.6	Caractère complet de l'espace des opérateurs	[F espace de Banach] $\Rightarrow$ [$\mathcal{L}(E, F)$ espace de Banach].
P 2.7	Complétude automatique d'un dual	$\forall E$ espace normé, E^* est un espace de Banach.
P 2.8	Sous-espaces complémentés et projections	E espace de Banach, M et N sous-espaces fermés de E ; $[E = M \oplus N] \Leftrightarrow [\exists P = P^2 \in \mathcal{L}(E)$ tel que $P(M) = M$ et $\ker(P) = N$].
P 2.9	Espace-quotient	[E espace de Banach]$\Rightarrow$ [E/M) espace de Banach].
P 2.10	Plongement isométrique dans le bidual	E est plongé dans son bidual E^{**} selon l'identification isométrique $J : \{E \to E^{**} x \mapsto x^{**}\}$, $\forall y^* \in E^*, \langle y^*, x^{**}\rangle = \langle x, y^*\rangle$.
P 2.11	Dual de ℓ^p	$1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $(\ell^p)^* = \ell^q$, par l'identification isométrique $\langle x, f\rangle = \sum_n f_n x_n$ avec $f = (f_n) \in \ell^p$.
P 2.12	Théorème de Baire	Tout espace métrique (E, d) complet est « non maigre » ou [(E, d) complet, Ω_n, $n \in \mathbb{N}$, ouverts denses dans E] $\Rightarrow$ [$\cap(\Omega_n, n \in \mathbb{N})$ est dense dans E] ou [(E, d) espace métrique complet non vide, $E = \cup E_n$, E_n fermés] $\Rightarrow$ [$\exists n_0$ tel que l'intérieur de E_{n_0} est non vide].
P 2.13	Théorème de la borne uniforme de Banach-Steinhaus	E espace de Banach, F espace normé, $(T_\alpha)_{\alpha\in J} \subset \mathcal{L}(E, F)$, J ensemble d'indices. Alors : $[\forall x \in E, \sup\{\|T_\alpha x\| ; \alpha \in J\} < \infty] \Rightarrow$ $[\sup\{\|T_\alpha\| ; \alpha \in J\} < \infty]$.
P 2.14	Application ouverte	E, F espaces normés, T linéaire $E \to F$, [T est ouverte] $\Leftrightarrow$ [L'image de tout ouvert de E est un ouvert de F].
P 2.15	Théorème de l'application ouverte	E, F espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. [T surjective] $\Rightarrow$ [T est une application ouverte].
P 2.16	Théorème d'isomorphisme de Banach	E, F espaces de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$. [T bijective]$\Rightarrow$ [$T^{-1} \in \mathcal{L}(E, F)$].
P 2.17	Théorème du graphe fermé	E, F espaces de Banach, T application linéaire de E dans F. [$\mathcal{G}(T)$ fermé dans $E \times F$] $\Leftrightarrow$ [$T \in \mathcal{L}(E, F)$].

Chapitre 3 Théorème de Hahn-Banach, approches et applications

D3. Définitions

N°	Notion définie	Définition
D 3.1	A ordonné	L'ensemble A est muni d'une relation d'ordre (partiel).
D 3.2	B totalement ordonné	B sous-ensemble d'un ensemble A ordonné, $\forall a, b \in B$, on a $a \leq b$ ou $b \leq a$.
D 3.3	c majorant de B	B sous-ensemble d'un ensemble A ordonné, $c \in A$, $\forall b \in B, b \leq c$.
D 3.4	A inductif	Tout sous-ensemble totalement ordonné de A ordonné admet un majorant.
D 3.5	m maximal dans A ordonné	Ensemble A ordonné, $m \in A$, $[a \in A, m \leq a] \Rightarrow [m = a]$.
D 3.6	Ensemble convexe M	E espace vectoriel réel, $M \subset E$, $\forall x, y \in M, \forall t \in [0, 1], tx + (1 - t)y \in M$.
D 3.7	Ensemble équilibré M	E espace vectoriel, $M \subset E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\|\lambda\| \leq 1$, $\lambda M \subset M$.
D 3.8	Hyperplan H	E espace vectoriel, H sous-espace vectoriel de codimension 1 de E .
D 3.9	Hyperplan affine K	K est le translaté de H par un vecteur $x \in E$.
D 3.10	Variété affine V	V est la translatée d'un sous-espace vectoriel de E par un vecteur $x \in E$.
D 3.11	Forme linéaire f	E espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, f application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

P3. Propriétés

N°	Désignation	Énoncé
P 3.1	Lemme de Zorn	Tout ensemble ordonné, inductif, non vide, admet un élément maximal.
P 3.2	Théorème de prolongement de Hahn-Banach, forme 1	E espace vectoriel réel, p semi-norme sur E, M sous-espace vectoriel de E, g forme linéaire sur M majorée par p ($\forall y \in M, g(y) \leq p(y)$), alors $\exists f$ linéaire sur E, prolongeant g ($f_{\|M} = g$) et majorée par $p(\forall x \in E, f(x) \leq p(x))$.
P 3.3	Théorème de prolongement de Hahn-Banach, forme 2	E espace vectoriel complexe, p semi-norme sur E, M sous-espace de E, g forme linéaire sur M majorée en module par $p(\forall y \in M, \|g(y)\| \leq p(y))$, alors $\exists f$ forme linéaire sur E, prolongeant $g(f_{\|M} = g)$ et majorée en module par $p(\forall x \in E, \|f(x)\| \leq p(x))$.

Nº	Désignation	Énoncé
P 3.4	Théorème de prolongement de Hahn-Banach, forme 3	E espace normé, M sous-espace vectoriel de E, $g \in E^*$, alors $\exists f \in E^*$ telle que $g = f_{\|M}$, $\\|f\\| = \\|g\\|$.
P 3.5	Théorème de séparation de points	E espace normé, $x, y \in E, x \neq y$, alors $\exists f \in E^*$ telle que $\langle x, f\rangle \neq \langle y, f\rangle$.
P 3.6	Séparation de l'origine	E espace normé, $x \in E$ $[x = 0] \Leftrightarrow [\forall f \in E^*, \langle x, f\rangle = 0]$.
P 3.7	Critère pour être dans l'adhérence	E espace normé, M sous-espace vectoriel de E, $x \in E, x \notin \overline{M}$, alors $\exists f \in E^*$ telle que $[\langle x, f\rangle \neq 0, \forall y \in M, \langle y, f\rangle = 0]$.
P 3.8	Caractère normant d'un dual	E espace normé, $x \in E, x \neq 0$. Alors $\exists f \in E^*$ avec $\\|f\\| = 1$ telle que l'on ait $\langle x, f\rangle = \\|x\\|$.
P 3.9	Partie normante A d'un dual	E espace normé, $A \subset S_{E^*}(0, 1)$ telle que : $x \in E \Rightarrow \\|x\\| = \sup_{f\in A} \|\langle x, f\rangle\|$.
P 3.10	Hyperplan	E espace normé, [H hyperplan de E] $\Leftrightarrow$ [$\exists f$ forme linéaire non nulle telle que $H = \ker f$] .
P 3.11	Dichotomie dense-fermé pour un hyperplan	E espace normé, $H = \ker f$ = hyperplan de E ; (i) H est fermé ou dense dans E (ii) [H fermé]$\Leftrightarrow$ [f(P 3.10) continue].
P 3.12	Théorème de Hahn-Banach sous forme géométrique	[E espace normé réel, $G \subset E, G \neq \emptyset$, ouvert convexe] ou [$E$ espace normé complexe, $G \subset E$, $G \neq \emptyset$, ouvert convexe et équilibré], V variété affine, $V \cap G = \emptyset$, alors $\exists H$, hyperplan affine, $H \supset V, H \cap G = \emptyset$.
P 3.13	Séparation au sens large de M et N (cas réel)	E espace normé réel, M, N convexes non vides de E, M ouvert, $M \cap N = \emptyset$, alors $\exists f \in E^*$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tels que $[\forall y \in M, f(y) < \alpha, \forall z \in N, f(z) \geq \alpha]$.
P 3.14	id. (cas complexe)	E espace normé réel, M, N comme en (P 3.13), M équilibré, alors $\exists f \in E^*$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, tels que $[\forall y \in M, \|f(y)\| < \alpha, \forall z \in N, \|f(z)\| \geq \alpha]$.
P 3.15	Séparation au sens strict de M et N (cas réel)	E espace normé réel, M, N convexes non vides de E, M fermé , N compact, $M \cap N = \emptyset$, alors $\exists f \in E^*$, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$, tels que $[\forall y \in M, f(y) \leq \alpha, \forall z \in N, f(z) \geq \beta]$.
P 3.16	id. (cas complexe)	E espace normé complexe, M, N comme en (P 3.14), M équilibré, alors $\exists f \in E^*$, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$, tels que $[\forall y \in M, \|f(y)\| \leq \alpha, \forall z \in N, \|f(z)\| \geq \beta]$.

Chapitre 4 OPÉRATEURS CONTINUS ENTRE ESPACES NORMÉS

D4. Définitions

N°	Notion définie	Définition
D 4.1	B inverse à gauche de A	E, F espaces normés, $A \in \mathcal{L}(E, F), B \in \mathcal{L}(F, E)$, $BA = I$, I identité de $\mathcal{L}(E)$.
D 4.2	C inverse à droite de A	E, F espaces normés, $A \in \mathcal{L}(E, F), C \in \mathcal{L}(F, E)$, $AC = I$, I identité de $\mathcal{L}(F)$.
D 4.3	A inversible, inverse A^{-1}	E, F espaces normés, $A \in \mathcal{L}(E, F)$, $B = C = A^{-1}$ (notations de (D 4.1) et (D 4.2)).
D 4.4	Spectre de A, $\sigma(A)$	E espace normé complexe, $A \in \mathcal{L}(E)$, $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (A - \lambda I)$ non inversible$\}$.
D 4.5	Ensemble résolvant de A, $\rho(A)$	E espace normé complexe, $A \in \mathcal{L}(E)$, $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}\ ; (A - \lambda I)$ inversible$\}$.
D 4.6	Spectre ponctuel de A, $\sigma_p(A)$, et valeurs propres de A	E espace normé complexe, $A \in \mathcal{L}(E)$, λ valeur propre de A : $(A - \lambda I)$ non injectif ; $\sigma_p(A) = \{\lambda$; valeurs propres de $A\}$.
D 4.7	Rayon spectral de A, $r(A)$	E espace normé complexe, $A \in \mathcal{L}(E)$, $r(A) = \sup(\lvert\lambda\rvert; \lambda \in \sigma(A))$.
D 4.8	A' adjoint de A	E, F espaces normés, $A \in \mathcal{L}(E, F)$. $A' \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ est tel que $\forall x \in E, \forall f \in F^*, \langle Ax, f\rangle = \langle x, A'f\rangle$.
D 4.9	$\{A\}'$, commutant de A	E espace normé complexe, $A \in \mathcal{L}(E)$, $\{A\}' = \{X \in \mathcal{L}(E), AX = XA\}$.
D 4.10	F sous-espace invariant pour A	E espace de Banach complexe, $A \in \mathcal{L}(E)$, F sous-espace (fermé) de E, $A(F) \subset F$.
D 4.11	F sous-espace réduisant pour A	E espace de Banach complexe, $A \in \mathcal{L}(E)$, F sous-espace invariant pour A, F admet un supplémentaire topologique invariant pour A.
D 4.12	$A = A_1 \bigoplus A_2$ est une somme directe d'opérateurs	E espace de Banach complexe, $A \in \mathcal{L}(E)$, E_1, E_2 sous-espaces réduisants pour A, $A_1 \in \mathcal{L}(E_1)$, $A_2 \in \mathcal{L}(E_2)$, pour $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, $Ax \overset{def}{=} A_1x_1 + A_2x_2$.
D 4.13	Suite des noyaux (N), ascente $a(A)$	E espace vectoriel, $A : E \to E$ linéaire, $(N) = \{\ker(A^p); p \in \mathbb{N}\}$ et $a(A) = \inf\{p; \ker(A^p) = \ker(A^{p+1})\}$ si cette quantité est finie. Sinon, par convention, $a(A) = +\infty$.
D 4.14	Suite des images (I), descente $d(A)$	E espace vectoriel, $A : E \to E$ linéaire, $(I) = \{\mathrm{Im}(A^p)\ ; p \in \mathbb{N}\}$, et $d(A) = \inf\{p; \mathrm{Im}(A^p) = \mathrm{Im}(A^{p+1})\}$ si cette quantité est finie. Sinon, par convention, $d(A) = +\infty$.
D 4.15	Ascente et descente communes de A	$a(A)$ est la valeur commune de $a(A)$ et $d(A)$ si ces deux valeurs sont finies (suites stationnaires).
D 4.16	A isométrie	E, F espaces normés, $A \in \mathcal{L}(E, F)$, $\forall x \in E$, $\lVert Ax\rVert = \lVert x\rVert$.
D 4.17	A projecteur (ou projection)	E espace normé, $A \in \mathcal{L}(E)$, $A^2 = A$.

P4. Propriétés

N°	Désignation	Énoncé
P 4.1	Norme du transposé	E, F espaces normés, A linéaire de E dans F, $[A \in \mathcal{L}(E, F)] \Leftrightarrow [A' \in \mathcal{L}(F^*, E^*)]$ $\lVert A' \rVert = \lVert A \rVert$.
P 4.2	Propriétés du transposé	$A, B \in \mathcal{L}(E, F)$, $C \in \mathcal{L}(G, E)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ $(A + B)' = A' + B'$; $(\lambda A)' = \lambda A'$, $(AC)' = C'A'$.
P 4.3	Transposition et orthogonalité	E, F espaces de Banach, $A \in \mathcal{L}(E, F)$, $\overline{\mathrm{Im}(A')} = (\ker A)^{\perp}$.
P 4.4	Théorème de l'image fermée	E, F espaces de Banach, $A \in \mathcal{L}(E, F)$, [ImA fermée] $\Leftrightarrow$ Im(A') fermée].
P 4.5	Série de Neumann	E espace de Banach, $A \in \mathcal{L}(E)$, $[\lVert A \rVert < 1] \Rightarrow [(I - A)$ inversible, $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n]$.
P 4.6	Propriétés du spectre	E espace de Banach, $A \in \mathcal{L}(E)$, $\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} ; \lvert \lambda \rvert \leq \lVert A \rVert\}$ $\sigma(A)$ est compact non vide dans $\mathbb{C}$.
P 4.7	Formule du rayon spectral (*cf.* D 4.7)	E espace de Banach, $A \in \mathcal{L}(E)$. Alors : $r(A) = \lim_{n\to\infty} \lVert A^n \rVert^{1/n}$.
P 4.8	Spectre du transposé	E espace vectoriel, A application linéaire de E dans E, $\sigma(A) = \sigma(A')$.
P 4.9	Noyaux itérés (suite (N) et ascente p) Images itérés (suite (I) et descente q)	E espace vectoriel, A application linéaire de E dans E, Si $\ker(A^j) = \ker(A^{j+1})$ alors $\forall n > 0$, $\ker(A^j) = \ker(A^{j+n})$, (id Im($A^k$) (D 4.13), D 4.14) La suite (N) est croissante, la suite (I) est décroissante. Si la suite (N) est constante à partir d'un indice fini p et la suite (I) constante à partir d'un rang fini q, alors $p = q$ (D 4.15).
P 4.10	Ascente et descente	E espace vectoriel, A application linéaire de E dans E d'ascente et de descentes finies valant a. Alors : $E = \ker(A^a) \oplus \mathrm{Im}(A^a)$, et A est bijectif dans Im(A^a).

Chapitre 5 ESPACE DE HILBERT

D5. Définitions

N°	Notion définie	Définition
D 5.1	Produit scalaire dans un espace préhilbertien	H espace vectoriel complexe muni du produit scalaire $\langle\ \rangle$, application $\{H \times H \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle\}$, vérifiant (i) $\forall x \in H, \langle x, x\rangle \geq 0$ (ii) $\forall x, y \in H, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \langle x + \lambda y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \lambda\langle y, z\rangle$ (iii) $\forall x, y \in H, \langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ (complexe conjugué de $\langle x, y\rangle$) (iv) $[\langle x, x\rangle = 0] \Leftrightarrow [x = 0]$.
D 5.2	Norme $\Vert\ \Vert$ associée au produit scalaire	$\Vert x\Vert = \langle x, x\rangle^{1/2}$ pour H selon (D 5.1).
D 5.3	Espace de Hilbert H	Espace préhilbertien H selon (D 5.1), de Banach (D 1.7) pour la norme associée.
D 5.4	x et y orthogonaux, $x \perp y$	H préhilbertien, $x, y \in H, \langle x, y\rangle = 0$.
D 5.5	Sous-ensembles M et N orthogonaux, $M \perp N$	H espace préhilbertien, $M \subset H, N \subset H$, $\forall x \in M, \forall y \in N, \langle x, y\rangle = 0$.
D 5.6	M orthogonal, $M^\perp$	H espace préhilbertien, $M \subset H$, $M^\perp = \{y \in H\,; \forall x \in M, \langle x, y\rangle = 0\}$.
D 5.7	M et N supplémentaires orthogonaux dans H, $H = M \oplus N$ ou $M \oplus^\perp N$ somme directe orthogonale	H est un espace de Hilbert, M et N sont deux sous-espaces fermés de H orthogonaux entre eux, $H = M \oplus N$, on note aussi $H = M \oplus^\perp N$, la norme sur H est équivalente à celle fixée dans (D 1.12).
D 5.8	Projection orthogonale y de x sur M, $y = P_M x$	H espace préhilbertien, M sous-espace vectoriel complet de H, $x \in H$ Pour $H = M \oplus^\perp N$, selon (D 5.7), $x = y + z, y \in M, z \in N$.
D 5.9	Ensemble orthogonal J	H espace préhilbertien, $J \subseteq H$, $\forall x, y \in J, x \neq y$, on a $\langle x, y\rangle = 0$.
D 5.10	Ensemble orthonormal J (ou orthonormé)	H espace préhilbertien, $J \subseteq H$, J orthogonal et $\forall x \in J, \Vert x\Vert = 1$.
D 5.11	Ensemble total J	H espace de Hilbert, $J \subseteq H$, $\overline{\text{Vect}(J)}$, sous-espace vectoriel fermé engendré par J, est H entier.
D 5.12	Base orthonormale B	H espace de Hilbert, B ensemble orthonormal et total.
D 5.13	Espace de Hilbert séparable	H espace de Hilbert, il existe une base orthonormale B au plus dénombrable.

P5. Propriétés

Nº	Désignation	Énoncé
P 5.1	Le fameux théorème de Pythagore	H espace préhilbertien, $x, y \in H$, $[\langle x, y\rangle = 0] \Rightarrow [\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2]$.
P 5.2	Règle du parallélogramme	H espace préhilbertien, $x, y \in H$, $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.
P 5.3	Règle de polarisation	H espace préhilbertien, $x, y \in H$, $4\langle x, y\rangle = \sum \alpha\|x + \alpha y\|^2 ; \alpha = 1, -1, i, -i$.
P 5.4	Inégalité de Schwarz ou bien de Cauchy-Schwarz	H espace préhilbertien, $\forall x, y \in H$, $\lvert\langle x, y\rangle\rvert \leq \|x\|\,\|y\|$ $[\lvert\langle x, y\rangle\rvert = \|x\|\,\|y\| \Leftrightarrow$ x et y sont colinéaires].
P 5.5	Critère d'orthogonalité	H espace préhilbertien, $[\lvert\langle x, y\rangle\rvert = 0] \Leftrightarrow [\forall \lambda \in \mathbb{C}, \|y\| \leq \|\lambda x + y\|]$.
P 5.6	Continuité du produit scalaire	H espace préhilbertien, l'application $\{H \times H \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle\}$ est continue.
P 5.7	Théorème de Riesz	H espace de Hilbert, le dual H^* de H est isométriquement isomorphe à H par l'identification (antilinéaire) $\{x^* \mapsto x, \forall y \in H, \langle y, x^*\rangle = (y \mid x)\}$.
P 5.8	Théorème de la projection	H espace de Hilbert, M sous-ensemble de H convexe et fermé, $\forall x \in H, \exists y \in M$, y unique, tel que $\|x - y\| = \inf(\|x - z\|, z \in M)$.
P 5.9	Orthogonal	H espace de Hilbert, M sous-ensemble de H, $M^\perp$ est un sous-espace fermé de H ; si $N = \overline{\mathrm{Vect}(M)}$, alors $N \cap M^\perp = \{0\}$.
P 5.10	Somme directe orthogonale	H espace de Hilbert,M sous-espace vectoriel de H, $(M^\perp)^\perp = \overline{M}, H = \overline{M} \oplus M^\perp$.
P 5.11	(i) Inégalité de Bessel (ii) Cas d'égalité dans Bessel (iii) Identité de Parseval	H Hilbert, $J = \{e_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$ ensemble orthonormal de H, $M = \overline{\mathrm{Vect}(J)}$ et $x \in H$ et $x_n = \langle x, e_n\rangle, n \in \mathbb{N}^*$. (i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \lvert x_n\rvert^2 \leq \|x\|^2$ (ii) $[x \in M] \Leftrightarrow [\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \lvert x_n\rvert^2]$ (iii) [J est une base orthonormale] $\Leftrightarrow$ $[\forall x \in H, \sum_{n=1}^{+\infty} \lvert x_n\rvert^2 = \|x\|^2]$.
P 5.12	Caractérisation des bases orthonormales	H Hilbert, $J = \{e_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$ ensemble orthonormal de H, [J base orthonormale] $\Leftrightarrow$ $[\{\forall n, \langle x, e_n\rangle = 0\} \Rightarrow \{x = 0\}]$.
P 5.13	Structure de ℓ^2	ℓ^2, espace des suites de carré sommable. $x = (x_n ; n \in \mathbb{N}^*)$ (D 1.15) C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{n=+\infty} x_n \overline{y_n}$ $\{e_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$, $e_n = (\delta_{n,p}, p \in \mathbb{N}^*)$ est une base orthonormale de ℓ^2.
P 5.14	Structure hilbertienne de $L^2([-\pi, +\pi])$	$L^2([-\pi, +\pi])$ (D 1.16) est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$, $\{e_n ; n \in \mathbb{Z}, e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(inx)\}$ est une base orthonormale.
P 5.15	Théorème de Gram-Schmidt	H espace de Hilbert, $\{g_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$, système libre dans H, alors $\exists J = \{e_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$ sous-ensemble orthonormal dans H tel que $\forall N \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_N) = \mathrm{Vect}(g_1, \ldots, g_N)$.

Chapitre 6 Opérateurs continus entre espaces de Hilbert

D6. Définitions

N°	Notion définie	Définition
D 6.1	Adjoint de A, A^*	H, K espaces de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H, K)$ $\forall x \in H, \forall y \in K, \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$.
D 6.2	A auto-adjoint, self-adjoint ou hermitien	H espace de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$, $A = A^*$.
D 6.3	A normal	H espace de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$, $AA^* = A^*A$.
D 6.4	A unitaire	H espace de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$, $AA^* = A^*A = I$.
D 6.5	A projecteur orthogonal	H espace de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$, $A^2 = A, A^* = A$.
D 6.6	A positif, $A \geq 0$	H espace de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$, $\forall x \in H, \langle Ax, x\rangle \geq 0$.
D 6.7	Racine carrée de A, $A^{1/2}$	H espace de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$, $A \geq 0$ $A^{1/2} \geq 0, [A^{1/2}]^2 = A$.
D 6.8	Module de A, $\|A\|$	H, K espaces de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H, K)$ $\|A\| = (A^*A)^{1/2}$.
D 6.9	Écriture polaire de A, $A = UD$	H, K espaces de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H, K)$ $D \geq 0$, U isométrique (D 4.16) sur $\mathrm{Im}(A)$, U est unique si l'on impose $\ker(U) = \ker(A)$.
D 6.10	F orthogonalement réduisant pour A	H espace de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$, F et $F^{\perp}$ sont invariants par A.

P6. Propriétés

Nº	Désignation	Énoncé
P 6.1	Transposé et adjoint	Avec l'identification (P 5.7), $M^{\perp}$ (D 2.10) coïncide avec $M^{\perp}$ (D 5.6) A' (D 4.8) coïncide avec A^* (D 6.1).
P 6.2	Propriétés de l'adjoint	H, K, L espaces de Hilbert, $A, B \in \mathcal{L}(H, K)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $C \in \mathcal{L}(K, L)$, $(A + \alpha B)^* = A^* + \overline{\alpha} B^*$ $(CA)^* = A^* C^*$, $(A^*)^* = A$ Si A est inversible, $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ Si $A \in \mathcal{L}(H)$, $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$.
P 6.3	Orthogonalité	H, K espaces de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H, K)$ $\ker(A) = [\mathrm{Im}(A^*)]^{\perp}$, $\overline{\mathrm{Im}(A)} = [\ker(A^*)]^{\perp}$.
P 6.4	Propriété de C^*-algèbre	H espace de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ $\\|A^*A\\| = \\|A\\|^2$.
P 6.5	Normalité	H, K espaces de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H, K)$ $[A \text{ normal}] \Leftrightarrow [\forall x \in H, \\|Ax\\| = \\|A^*x\\|]$.
P 6.6	Propriétés globales des opérateurs normaux	H espace de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ normal. Alors : (i) $\ker(A) = \ker(A^*) = \ker(A^2)$ (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $(A - \lambda I)$ est normal (iii) Si $\lambda \neq \mu$, $\ker(A - \lambda I) \perp \ker(A - \mu I)$ (iv) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\\|A^n\\| = \\|A\\|^n$, $r(A) = \\|A\\|$.
P 6.7	Racine carrée	H espace de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$, $A \geq 0$ $A^{1/2}$ (D 6.7) existe et est unique ; si B commute avec A, alors B commute avec $A^{1/2}$.
P 6.8	Décomposition polaire maximale	H, K espaces de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H, K)$ On a une variante de (D 6.9) : $D = (A^*A)^{1/2}$, $A = UD$, U ou U^* isométrie.
P 6.9	Spectre d'un auto-adjoint (positif)	H espace de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ Si $A = A^*$, $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ Si $A \geq 0$, $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$.
P 6.10	Calcul de la norme	H espace de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ $\\|A\\| = \sup\{\|\langle Ax, y\rangle\|; x, y \in H, \\|x\\| = \\|y\\| = 1\}$ Si $A = A^*$, $\\|A\\| = \sup\{\|\langle Ax, x\rangle\|; \\|x\\| = 1\}$.
P 6.11	Caractérisation de l'opérateur nul (cas complexe)	H espace de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ $[A = 0] \Leftrightarrow [\forall x \in H, \langle Ax, x\rangle = 0]$.
P 6.12	Caractérisation d'un auto-adjoint	H espace de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ $[A = A^*] \Leftrightarrow [\forall x \in H, \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}]$.

Chapitre 7 Opérateurs compacts

D7. Définitions

N°	Notion définie	Définition
D 7.1	Opérateur A borné de rang fini.	E, F espaces normés, $A \in \mathcal{L}(E, F)$ (D 2.5), et $\mathrm{Im}(A)$ est de dimension finie. Rang de $A \stackrel{def}{=} \dim \mathrm{Im}(A)$.
D 7.2	Espace des opérateurs de rang fini	$\mathcal{K}_0(E, F)$ ensemble des opérateurs bornés de rang fini de E dans F $\mathcal{K}_0(E) = \mathcal{K}_0(E, E)$.
D 7.3	e tensoriel f^* $e \otimes f^*$ (cas Banach)	E, F espaces normés, $e \in E, f^* \in F^*$ e tensoriel f^* : $\{F \to E, x \mapsto \langle x, f^* \rangle e\}$.
D 7.4	e tensoriel f $e \otimes f$ (cas Hilbert)	E, F espaces de Hilbert, $e \in E, f \in F$ e tensoriel f : $\{F \to E, x \mapsto \langle x, f \rangle e\}$.
D 7.5	Opérateur compact A	E, F espaces normés, A linéaire de E dans F telle que $\forall M \subseteq E$, M borné, $A(M)$ est relativement compact (adhérence compacte) dans F.
D 7.6	Espace des opérateurs compacts	E, F espaces normés, $\mathcal{K}(E, F)$ est l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F, sous-espace de l'espace normé $\mathcal{L}(E, F)$ $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$.

P7. Propriétés

N°	Désignation	Énoncé
P 7.1	Forme canonique 1 (cas Banach)	E, F espaces normés, $A \in \mathcal{K}_0(E, F)$, A de rang j, $\exists(e_n, n = 1, \ldots, j)$ libre dans E $\exists(f_n^*, n = 1, \ldots, j)$ libre dans F^* tels que $A = \sum(e_n \otimes f_n^*, n = 1, \ldots, j)$.
P 7.2	Forme canonique 2 (cas Banach)	E, F espaces de Hilbert, $A \in \mathcal{K}_0(E, F)$, A de rang j, $\exists(e_n, n = 1, \ldots, j)$ orthonormé dans E, $\exists(f_n, n = 1, \ldots, j)$ orthonormé dans F, $\exists(\lambda_n, n = 1, \ldots, j)$, $\forall n$, $\lambda_n > 0$ tels que $A = \sum_{n=1}^{j}(\lambda_n e_n \otimes f_n)$. Les λ_n sont les valeurs propres non nulles de $\lvert A \rvert$ comptées selon leur multiplicité (dimension de l'espace propre) ; f_n est vecteur propre relatif à λ_n ; $e_n = Uf_n$ (D 6.9).
P 7.3	Forme canonique 3 (cas Hilbert)	E espace de Hilbert, $A \in \mathcal{K}_0(E)$, A auto-adjoint de rang j, $\exists(e_n, n = 1, \ldots, j)$ orthonormé dans E $\exists(\lambda_n, n = 1, \ldots, j)$, $\forall n$, λ_n réel non nul, tels que $A = \sum(\lambda_n e_n \otimes e_n, n = 1, \ldots, j)$.
P 7.4	Lecture du rang	Tout opérateur ayant la forme décrite en (P 7.1) ou (P 7.2) ou (P 7.3) est borné de rang j.
P 7.5	Transposé d'un produit tensoriel	E, F espaces normés, $e \in E, f^* \in F^*$ $(e \otimes f^*)' = f^* \otimes e$ (identification de $e \in E$ avec un élément de E^{**} selon (P 2.10)).

N°	Désignation	Énoncé
P 7.6	Adjoint d'un produit tensoriel	E, F espaces de Hilbert, $e \in E, f \in F$ $(e \otimes f)^* = f^* \otimes e$.
P 7.7	Rang du transposé	E, F espaces normés, $A \in \mathcal{K}_0(E, F)$, A et A' ont même rang.
P 7.8	Composition avec un produit tensoriel	H espace de Hilbert, $A, B \in \mathcal{L}(H)$, $e, f \in H$. Alors : $A(e \otimes f)B = Ae \otimes B^*f$.
P 7.9	Ensemble des opérateurs compacts	E, F espaces normés, $\mathcal{K}_0(E, F) \subseteq \mathcal{K}(E, F) \subseteq \mathcal{L}(E, F)$.
P 7.10	Stabilité de la notion d'opérateur compact	Toute combinaison linéaire d'opérateurs compacts est un opérateur compact. A compact, S et T linéaires continus, alors AS et TA sont compacts (espaces compatibles avec l'existence du produit).
P 7.11	Idéal des opérateurs compacts	E espace normé, F espace de Banach, $\mathcal{K}(E, F)$ est fermé dans $\mathcal{L}(E, F)$. Si $E = F$, espace de Banach, $\mathcal{K}(E)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(E)$.
P 7.12	Propriété d'approximation	H espace de Hilbert, $\mathcal{K}(H) = \overline{\mathcal{K}_0(H)}$.
P 7.13	Transposé d'un compact	E, F espaces de Banach, $A \in \mathcal{L}(E, F)$ [A compact] $\Leftrightarrow$ [A' compact].
P 7.14	Caractère Fredholm des perturbations compactes de I	E espace normé, $A \in \mathcal{K}(E)$. Alors : (i) $\ker(I - A)$ est de dimension finie (ii) $\mathrm{Im}(I - A)$ est fermé et de codimension finie. (iii) $\mathrm{codim}(\mathrm{Im}(I - A)) = \dim(\ker(I - A))$.
P 7.15	Spectre de A compact	E espace de Banach de dimension infinie, $A \in \mathcal{K}(E)$. Alors : (i) $0 \in \sigma(A)$ (D 4.4) (ii) $\sigma(A)$ est fini ou dénombrable, 0 est le seul point d'accumulation possible (iii) Si [$\lambda \neq 0, \lambda \in \sigma(A)$], alors $\lambda \in \sigma_p(A)$ (D 4.6) et l'espace propre est de dimension finie.
P 7.16	Forme canonique, écriture spectrale	H est un espace de Hilbert, $A \in \mathcal{K}(H)$. (i) Pour A normal, $\exists(\lambda_n)$ suite finie ou infinie de complexes non nuls, de limite 0, $\exists(e_n)$, famille orthonormale d'éléments de H telles que $\forall x \in E, Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$ donc $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n$. Les (λ_n, e_n) sont des couples (valeur propre, vecteur propre). Les λ_n sont les valeurs propres non nulles de A comptées selon leur multiplicité (dimension de l'espace propre). (ii) Pour A quelconque, la forme canonique (P 7.2) étendue à $n \in \mathbb{N}^*$ est valable.

N.B. La « forme canonique » n'est pas unique : facteurs de norme 1 pour les vecteurs ou ambiguïté due à une valeur propre double par exemple. On parlera cependant usuellement de « la forme canonique ».

Chapitre 8 Opérateurs intégraux

D8. Définitions

Nº	Notion définie	Définition
D 8.1	$L^2(J)$	J, intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, éléments f, fonctions de carré sommable, $E = L^2(J)$, espace de Hilbert pour $(f \mid g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$, norme de f, $\|f\|_2$, généralisation pour J, rectangle de $\mathbb{R}^2$.
D 8.2	Opérateur intégral A	$E = L^2([a, b])$, $K \in L^2([a, b] \times [a, b])$ $A : \{E \to E, f \mapsto h, h(x) = \int_a^b K(x, y)f(y)dy\}$.
D 8.3	Noyau de A	A selon (D 8.2), K est le noyau de A.
D 8.4	Équation de Fredholm	E et K selon (D 8.2), $g \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$, f cherchée dans E, équation $\int_a^b K(x, y)f(y)dy - \lambda f(x) = g(x)$.

P8. Propriétés

Nº	Désignation	Énoncé
P 8.1	Norme d'un opérateur à noyau	A de (D 8.2) est un opérateur compact, $\|A\| \le \|K\|_2$.
P 8.2	Noyau de l'adjoint d'un opérateur intégral	Pour A de (D 7.2), A^* est un opérateur de Hilbert-Schmidt de noyau $K^*(x, y) = \overline{K(y, x)}$.
P 8.3	Noyau d'un produit d'opérateurs	A_1, A_2 de Hilbert-Schmidt de noyaux respectifs K_1, K_2, alors $A = A_1A_2$ est de même nature, et son noyau est $K(x, y) = \int_a^b K_1(x, u)K_2(u, y)du$.
P 8.4	Opérateurs auto-adjoints à noyau	Pour A de Hilbert-Schmidt, (i) $[A = 0] \Leftrightarrow [K = 0]$ (ii) $[A$ auto-adjoint$] \Leftrightarrow [\forall x, y, K(x, y) = \overline{K(y, x)}]$.
P 8.5	Décomposition Hilbert-Schmidt d'un noyau	A de Hilbert-Schmidt, A normal, $(\lambda_n, n \in \mathbb{N}^*$ (ou famille finie)), valeurs propres non nulles comptées selon leur multiplicité, (e_n) système orthonormé de vecteurs propres associés, alors (i) $K(x, y) = \sum_n \lambda_n e_n(x)\overline{e_n(y)}$, (ii) $(\|K\|_2)^2 = \sum_n \mid \lambda_n \mid^2$.
P 8.6	Théorème de Mercer	Notations de (P 8.5). Si $A \ge 0$ et K continue sur $J^2 = [a, b] \times [a, b]$, alors les e_n sont continues sur J, la convergence dans (P 8.5 (i)) est absolue et uniforme.
P 8.7	Formule de trace	Les hypothèses sont celles de (P 8.6), alors $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \int_a^b K(x, x)dx$.
P 8.8	Équation de Fredholm revisitée	Pour $\lambda \ne 0$, l'équation de Fredholm (D 8.4) admet au plus un ensemble de solutions $f_0 + H$, H espace vectoriel de dimension finie. Si λ n'est pas un des λ_n de (P 8.5), la solution existe et est unique. Si K est le noyau d'un opérateur de Hilbert-Schmidt normal, la solution est déterminée par $f = \sum_n \langle f, e_n\rangle e_n$, $\sum_n(\lambda - \lambda_n)\langle f, e_n\rangle e_n = \sum_n\langle g, e_n\rangle e_n$.

Chapitre 9 CONVERGENCE FAIBLE ET...

D9. Définitions

Nº	Notion définie	Définition
D 9.1	Ensemble convexe M	E espace vectoriel, $M \subseteq E$, $\forall x, y \in E, \forall t \in [0, 1], tx + (1 - t)y \in E$.
D 9.2	Espace vectoriel topologique $(E, \mathcal{T})$	E espace vectoriel, $(\mathcal{T})$, topologie définie par une famille d'ouverts telle que les opérations d'espace vectoriel soient continues, espace séparé.
D 9.3	$(E, \mathcal{T})$ localement convexe, EVTLC	$(E, \mathcal{T})$ selon (D 9.2) ; il existe une base de voisinages ouverts de 0 formée d'ouverts convexes. On note EVTLC un tel espace.
D 9.4	Ensemble Ext(M) des points extrémaux d'un convexe fermé M	$(E, \mathcal{T})$ selon (D 9.3) ; M convexe fermé dans E. Un point $a \in M$ est extrême (ou extrémal) si $[a \in [x, y] \subseteq M] \Rightarrow [a = x$ ou $a = y]$. $\mathrm{Ext}(M) = \{a; a$ point extrême de $M\}$.
D 9.5	Enveloppe convexe fermée de G, $\overline{\mathrm{co}}(G)$	$(E, \mathcal{T})$ selon (D 9.3) ; $G \subseteq E$, $\overline{\mathrm{co}}(G) = \cap(M \supseteq G; M$ convexe fermé).
D 9.6	Topologie faible ou w-topologie (E, w), $(E, \sigma(E, E^*))$	$(E, \mathcal{T})$ selon (D 9.3) ; une sous-base de voisinages ouverts de x est formée des $V_{f,\varepsilon}(x) = \{y \in E ; \lvert\langle y - x, f\rangle\rvert < \varepsilon\}$, $f \in E^*, \varepsilon > 0$. $\mathcal{T}$ est notée w ou $\sigma(E, E^*)$.
D 9.7	Topologie dite étoile-faible ou encore w^*-topologie sur E^*, (E^*, w^*), ou bien $(E^*, \sigma(E^*, E))$	$(E^*, \mathcal{T})$ selon (D 9.3) ; une sous-base de voisinages ouverts de f est formée des $W_{x,\varepsilon}(f) = \{g \in E^* ; \lvert\langle x, g - f\rangle\rvert < \varepsilon\}$, $x \in E$, $\varepsilon > 0$. $\mathcal{T}$ est notée w* ou $\sigma(E^*, E)$.
D 9.8	x_n tend faiblement vers x, $x_n \overset{w}{\to} x$	$x_n \in E$, la suite (x_n) converge vers x dans $(E, \sigma(E, E^*))$ selon (D 9.6).
D 9.9	f_n tend *-faiblement vers f, $f_n \overset{w*}{\to}$ vers f	$f_n \in E^*$, la suite (f_n) converge vers f dans $(E^*, \sigma(E^*, E))$ selon (D 9.7).
D 9.10	Topologie uniforme ou de la norme sur $\mathcal{L}(E, F) = G$	E, F espaces de Banach selon (D 2.5) Topologie associée à la norme-opérateur sur G.
D 9.11	Topologie SOT ou forte-opérateur sur $\mathcal{L}(E, F) = G$	G est muni de la topologie telle qu'une sous-base de voisinages de A est, pour $x \in E$ et $\varepsilon > 0$ quelconques : $V_{x,\varepsilon}(A) = \{B \in G ; \lVert(B - A)x\rVert < \varepsilon\}$.
D 9.12	Topologie WOT ou faible-opérateur sur $\mathcal{L}(E, F) = G$	G est muni de la topologie telle qu'une sous-base de voisinages de A est ($x \in E$, $f \in E^*$, $\varepsilon > 0$ quelconques) : $V_{x,f,\varepsilon}(A) = \{B ; \lvert\langle(B - A)x, f\rangle\rvert < \varepsilon\}$, où $B \in G$.

P9. Propriétés

Nº	Désignation	Énoncé
P 9.1	Désignation	Dans un EVTLC (D 9.3), l'ensemble des voisinages d'un point x est le translaté par x de l'ensemble des voisinages de 0.
P 9.2	Théorème de Krein-Milman	Dans un EVTLC, si M est convexe et compact, $M = \overline{\text{co}}(\text{Ext}(M))$.
P 9.3	Caractère localement convexe des topologies faibles	$(E, \sigma(E, E^*))$ et $(E^*, \sigma(E^*, E))$, *cf.* (D 9.6) et (D 9.7), sont des EVTLC.
P 9.4	Convergence faible des suites	E espace de Banach, suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans E, $x \in E$, (i) $[x_n \overset{w}{\to} x] \Leftrightarrow [\forall f \in E^*, \langle x_n - x, f\rangle \to 0]$ (ii) Toute suite faiblement convergente est bornée.
P 9.5	Convergence étoile-faible ou préfaible des suites	E espace de Banach, suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans E^*, $f \in E^*$ (i) $[f_n \overset{w*}{\to} f] \Leftrightarrow [\forall x \in E, \langle f_n - f, x\rangle \to 0]$ (ii) Toute suite préfaiblement convergente est bornée.
P 9.6	Théorème d'Alaoglu	E espace normé, La boule unité fermée de (E^*, w^*) est w*-compacte.
P 9.7	Continuité faible et continuité forte	E, F espaces de Banach, A application linéaire de E dans F, $[A \in \mathcal{L}(E, F)] \Leftrightarrow [A$ continue de (E, w) dans $(F, w)]$.
P 9.8	Adhérence faible d'un convexe	E espace de Banach, M sous-ensemble convexe de E, $\overline{M} = \overline{M}^w$ (adhérence dans (E, w)).
P 9.9	Compacité par convergence faible, condition nécessaire	E, F espaces de Banach, $A \in \mathcal{K}(E, F)$ (D 7.6), $[x_n \overset{w}{\to} x] \Rightarrow [Ax_n \to Ax$ au sens de la norme$]$.
P 9.10	Approximation en SOT-topologie	E espace de Hilbert, $\mathcal{K}_0(E)$ (D 7.2) est dense dans $\mathcal{L}(E)$ pour la SOT-topologie.
P 9.11	Compacité testée sur les suites orthonormales	H espace de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$. (i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ orthonormale $\Rightarrow (x_n) \overset{w}{\to} 0$; (ii) $[A \in \mathcal{K}(H)] \Leftrightarrow [\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite orthonormale, $\lim_{n\to\infty}\langle Ax_n, x_n\rangle = 0]$. (iii) $[A \in \mathcal{K}(H)] \Longleftrightarrow [\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite orthonormale, $\lim_{n\to\infty} \|Ax_n\| = 0]$.

Chapitre 10 Algèbres de Banach

D10. Définitions

Nº	Notion définie	Définition
D 10.1	Algèbre normée, Algèbre de Banach	Un ensemble $\mathcal{A}$ est une algèbre normée si (i) il a une structure d'algèbre avec unité e (ii) sa norme satisfait à $\|e\| = 1$ et $\forall a, b \in \mathcal{A}, \|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$. Si de plus $(\mathcal{A}, \| \, \|)$ est un espace de Banach, on dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach.
D 10.2	Algèbre-quotient $\mathcal{A}/\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ algèbre de Banach, $\mathcal{B}$ idéal bilatère fermé de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ est un espace de Banach selon (D 1.7), et une algèbre de Banach. $[ab] = [a]\,[b]$.
D 10.3	a inversible, inverse a^{-1}	$\mathcal{A}$ algèbre de Banach (ou algèbre normée), et $a \in \mathcal{A}$. a inversible à gauche : $\exists b \in \mathcal{A}; ba = e$, a inversible à droite : $\exists c \in \mathcal{A}; ac = e$, a inversible : $\exists b = a^{-1} \in \mathcal{A}; ab = ba = e$.
D 10.4	Spectre de a, $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ ou $\sigma(a)$	$\mathcal{A}$ algèbre de Banach (ou algèbre normée), $a \in \mathcal{A}$. $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (a - \lambda e)$ est non-inversible $\}$.
D 10.5	Ensemble résolvant de a, $\rho_{\mathcal{A}}(a)$ ou $\rho(a)$	$\mathcal{A}$ algèbre de Banach (ou algèbre normée), $a \in \mathcal{A}$. $\rho(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$.
D 10.6	Rayon spectral de a, $r(a)$	$\mathcal{A}$ algèbre de Banach (ou algèbre normée), $a \in \mathcal{A}$. $r(a) = \sup\{\lvert\lambda\rvert; \lambda \in \sigma(a)\}$.
D 10.7	Série de Neumann $S_{\mathcal{A}}(\lambda)$	$\mathcal{A}$ algèbre de Banach, $a \in \mathcal{A}, \lvert\lambda\rvert > \|a\|$. $S_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda e - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} a^n$.
D 10.8	Fonction de a, $f(a)$, $\Omega(a)$	$\mathcal{A}$ algèbre de Banach, $a \in \mathcal{A}$, Ω ouvert de $\mathbb{C}$, $\Omega \supseteq \sigma(a)$, Γ courbe de Jordan d'intérieur Δ, $\sigma(a) \subseteq \Delta \subset \overline{\Delta} \subset \Omega$, et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytique. Alors : $f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda e - a)^{-1} d\lambda$ (intégrale de Riemann vectorielle), et $\Omega(a) = \{f(a) \, ; f$ analytique : $\Omega \to \mathbb{C}\}$.
D 10.9	$C^\star$-algèbre $\mathcal{A}$, adjoint de a, a^*	$\mathcal{A}$ algèbre de Banach munie d'une involution, opération interne $\{a \mapsto a^*\}$ vérifiant $(a+b)^* = a^* + b^*$, $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$, $(ab)^* = b^* a^*$, $(a^*)^* = a$, $\|a^* a\| = \|a\|^2$. a^* est l'adjoint de a.
D 10.10	a auto-adjoint	$\mathcal{A}$ est une $C^\star$-algèbre, $a \in \mathcal{A}$ et $a = a^*$.
D 10.11	a normal	$\mathcal{A}$ est une $C^\star$-algèbre, $a \in \mathcal{A}$ et $a^* a = a a^*$.
D 10.12	a unitaire	$\mathcal{A}$ est une $C^\star$-algèbre, $a \in \mathcal{A}$ et $a^* a = a a^* = e$.
D 10.13	$a \geq 0$, a positif	$\mathcal{A}$ est une $C^\star$-algèbre, $a \in \mathcal{A}$ et $a^* = a$ et $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+$.

P10. Propriétés

N°	Désignation	Énoncé
P 10.1	Propriétés de la série de Neumann	$\mathcal{A}$ algèbre de Banach, $a \in \mathcal{A}$, (i) La série de Neumann (D 10.7) converge vers $(a - \lambda e)^{-1}$ pour $\lvert\lambda\rvert > \lim_{n\to+\infty}(\lVert a^n \rVert)^{1/n})$ (ii) $(e - a)$ est inversible dès que $\lVert a \rVert < 1$ et $(e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$.
P 10.2	Ensemble des inversibles	$\mathcal{A}$ algèbre de Banach, l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{A}$ est un ouvert de $\mathcal{A}$.
P 10.3	Spectre et formule du rayon spectral	$\mathcal{A}$ algèbre de Banach, $a \in \mathcal{A}$. (i) $\sigma(a)$ est compact non vide dans $\mathbb{C}$ (ii) $r(a) = \lim_{n\to+\infty}(\lVert a^n \rVert)^{1/n}) \leq \lVert a \rVert$.
P 10.4		$\mathcal{A}/\mathcal{B}$ selon (D 10.2) est une algèbre de Banach.
P 10.5	Calcul fonctionnel holomorphe	$\mathcal{A}$ algèbre de Banach, $a \in \mathcal{A}$, $\Omega(a)$ est associé à Ω selon (D 10.8). L'ensemble $\mathcal{H}(\Omega)$ des fonctions analytiques sur Ω est muni de sa topologie usuelle. (i) l'application $\{\mathcal{H}(\Omega) \to \mathcal{A}, f \mapsto f(a)\}$ est un homomorphisme d'algèbres continu ; (ii) $\mathcal{H}(\Omega)$ est une algèbre commutative ; (iii) pour $f_p(z) = z^p$, $p \in \mathbb{N}$, $f_p(a) = a^p$.
P 10.6	Théorème de l'image spectrale	Pour f selon (D 10.8), on a $\sigma[f(a)] = f[\sigma(a)] = \{f(\lambda);\, \lambda \in \sigma(a)\}$.
P 10.7	Spectre relatif à une sous-algèbre	$\mathcal{A}$ algèbre de Banach, $\mathcal{B}$ sous-algèbre fermée de $\mathcal{A}$, commutative et maximale (il n'existe pas de sous-algèbre fermée commutative plus grande), $a \in \mathcal{B}$, alors $\sigma_{\mathcal{B}}(a) = \sigma_{\mathcal{A}}(a)$.
P 10.8	Spectre de l'adjoint dans une $C^\star$-algèbre	$\mathcal{A}$ une $C^\star$-algèbre, $a \in \mathcal{A}$, alors (i) $\lVert a^* \rVert = \lVert a \rVert$ (ii) $\sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)}$.
P 10.9	Spectre d'un unitaire dans une $C^\star$-algèbre	$\mathcal{A}$ une $C^\star$-algèbre, $a \in \mathcal{A}$ unitaire. Alors $\sigma(a) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C};\, \lvert\lambda\rvert = 1\}$.
P 10.10	Norme d'un élément normal	$\mathcal{A}$ une $C^\star$-algèbre, $a \in \mathcal{A}$ normal. Alors $r(a) = \lVert a \rVert$.
P 10.11	Spectre d'un auto-adjoint	$\mathcal{A}$ une $C^\star$-algèbre, $a \in \mathcal{A}$ auto-adjoint. Alors $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.
P 10.12	Algèbre des opérateurs	Si E est un espace de Banach, $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre de Banach.
P 10.13	Partition du spectre et calcul fonctionnel	E espace de Banach, $A \in \mathcal{L}(E)$, $\sigma(A) = M \cup N$, union de deux fermés disjoints, alors f donnée au voisinage de $\sigma(A)$ par $[\forall z \in M, f(z) = 0; \forall z \in N, f(z) = 1]$ définit un opérateur $f(A)$, projecteur tel que $f(A)E$ et $(I - f(A))E)$ sont invariants par A.
P 10.14	Algèbre des opérateurs sur un Hilbert	Si H est un espace de Hilbert, $\mathcal{L}(H)$ est une $C^\star$-algèbre.

Partie 2

Exercices

ESPACES NORMÉS

I

1 ÉNONCÉS

Exercice I.1

Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres strictement positifs, et $1 \le p < \infty$. On note respectivement

$$\ell^p_\alpha = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, x_n \in \mathbb{C} \text{ telles que } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |x_n|^p < \infty\},$$

$$\ell^\infty_\alpha = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, x_n \in \mathbb{C} \text{ telles que } \sup_{n\in\mathbb{N}^*}(\alpha_n|x_n|) < \infty\}.$$

ℓ^p_α et ℓ^∞_α sont munis des normes respectives

$||x||_{p,\alpha} = (\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |x_n|^p)^{1/p}$ et $||x||_{\infty,\alpha} = \sup_{n\in\mathbb{N}^*}(|\alpha_n x_n|)$.

(1) Montrer que ℓ^p_α et ℓ^∞_α sont des espaces de Banach (*cf.* D 1.7).

(2) On choisit $\alpha = 1$, suite dont tous les éléments sont égaux à 1. Montrer que si $1 \le p < q \le \infty$, alors $\ell^p_1 \subset \ell^q_1$, avec inclusion stricte et contractante : $||f||_q \le ||f||_p \ \forall f \in \ell^p$.

(3) Soit $c_{0,\alpha} = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}; \lim_{n\to\infty} \alpha_n x_n = 0\}$. Montrer que $c_{0,\alpha}$ muni de la norme $||\ .\ ||_{\infty,\alpha}$ est un espace de Banach.

Exercice I.2

Soit $E = C^1([-1,1])$ l'espace des fonctions complexes continûment dérivables sur $[-1,1]$.

(1) On munit E de la norme uniforme, $||f||_\infty = \sup(|f(x)|; x \in [-1,1])$.

Montrer que $(E, ||.||_\infty)$ n'est pas un espace de Banach (On pourra utiliser la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$).

(2) On munit E de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que $E, \|.\|$ est un espace de Banach (D 1.7).

Exercice I.3

Soit $\omega : \mathbb{R}^+ \to]0, \infty[$ une fonction continue donnée (un « poids »). Soit

$$E_\omega = \{f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C} \text{ telles que } \sup_{x\in\mathbb{R}^+}(\omega(x)|f(x)|) < \infty\}$$

muni de la norme $\|f\|_{\infty,\omega} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+}(\omega(x)|f(x)|)$.

(1) Montrer que E_ω est un espace de Banach pour cette norme.

(2) Soit F_ω le sous-espace de E_ω constitué des fonctions continues. Montrer que F_ω est un sous-espace vectoriel fermé de E_ω.

(3) Soit G_ω le sous-espace de F_ω constitué des fonctions ayant une limite à l'infini. Montrer que G_ω est un sous-espace vectoriel fermé de F_ω.

(4) Soit H_ω le sous-espace de G_ω constitué des fonctions de limite nulle à l'infini. Montrer que H_ω est un sous-espace vectoriel fermé de G_ω.

Exercice I.4 : Preuve de P 2.1

(1) E est un espace normé, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy de E. On suppose qu'il existe une sous-suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ de (x_n) convergente dans E vers y, montrer que $y = \lim_{n\to\infty} x_n$.

(2) E est un espace normé,$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy de E. Montrer qu'il existe une sous-suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ de (x_n) pour laquelle on a l'inégalité suivante :
$\|y_{p+1} - y_p\| \leq 2^{-p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

(3) Montrer qu'un espace normé est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente (*Résultat fondamental ! cf.* P 2.1).

(4) Soit $E = C([-1, 1])$, espace des fonctions continues sur $[-1, 1]$, muni de la norme $\|\,.\,\|_1$. Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ nx & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ 1 & \text{si } x \in [1/n, 1] \end{cases}$$

(i) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans E. Est-elle convergente dans E ?

(ii) On considère la série de terme général $g_n = f_{n+1} - f_n$. Montrer que $\sum_{n=1}^{n=\infty} \|g_n\|_1 < \infty$, mais que la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} g_n$ ne converge pas dans E.

Exercice I.5

Soit $D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| < 2\}$ et soit $H(D)$ l'espace des fonctions $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphes ; on pose $N(f) = \sup_{|z|\leq\frac{1}{2}}(|f(z)|)$.

(1) Montrer que N est une norme sur $H(D)$.

(2) $H(D)$ muni de N est-il un espace de Banach ? (Considérer la série de fonctions de terme général u_n, où $u_n(z) = z^n$, et penser à l'Ex. I.4.)

Exercice I.6

Soit $\alpha \in]0,1]$. On note $J = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \,;\, x \neq y\}$. Pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{C}$, on pose

$$p_\alpha(f) = |f(0)| + \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} ; (x,y) \in J\right\}.$$

Soit $\mathrm{Lip}_\alpha = \{f : [0,1] \to \mathbb{C}$ telles que $p_\alpha(f) < \infty\}$.

(1) Montrer que $\mathrm{Lip}_\alpha \subset C([0,1])$.

(2) Montrer que p_α est une norme sur Lip_α vérifiant :
Pour toute $f \in \mathrm{Lip}_\alpha$, $\|f\|_\infty \leq p_\alpha(f)$.

(3) Montrer que Lip_α est complet pour cette norme (*cf.* D 1.7).

Exercice I.7

Soit Lip_α l'espace de Banach défini dans (Ex I.6), α et β deux nombres tels que $0 < \beta < \alpha \leq 1$. Soit $C([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ et $C^1([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continûment différentiables sur $[0,1]$.

(1) Soient les fonctions $f_\alpha, f_\alpha(x) = x^\alpha$. Pour quelles valeurs de $\gamma \in]0,1]$ sont-elles dans Lip_γ ?

(2) Soit g la fonction continue définie par $g(x) = (\ln(\frac{x}{2}))^{-1}$ si $x \neq 0, g(0) = 0$. Montrer qu'elle n'est dans aucun des Lip_α.

(3) Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = x\ln(x)$ pour $x \neq 0, \varphi(0) = 0$; montrer qu'elle n'est pas dans Lip_1, mais qu'elle est dans Lip_α pour $\alpha \in]0,1[$.

(Pour cela, on pourra observer que $\sup_{t \in]0,1]}(t^{1-\alpha}|\ln t|) \stackrel{def}{=} C_\alpha < \infty$ et utiliser la formule fondamentale du calcul intégral

$$0 < x \leq y \leq 1 \Longrightarrow \varphi(y) - \varphi(x) = \int_x^y \varphi'(t)dt.)$$

(4) Établir les inclusions

$$C^1([0,1]) \subset \mathrm{Lip}_\alpha \subset \mathrm{Lip}_\beta \subset C([0,1]).$$

Montrer que ce sont des inclusions strictes.

Exercice I.8

Soit E un espace normé et M un sous-espace fermé de E. Pour $\widetilde{x} \in E/M$, on note

$$N(\widetilde{x}) = d(x, M) = \inf_{z \in M} \|x + z\| = \inf_{y \in \widetilde{x}} \|y\|.$$

(1) Montrer que N est une norme sur E/M et que, si E est complet, alors E/M muni de la norme $N(.)$ est complet (on peut utiliser la méthode de l'Ex. I.4).

(2) Formuler et prouver une réciproque de (1).

Exercice I.9 : Rigidité des isométries

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $T : E \to E$ une isométrie ($\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|\ \forall x, y \in E$) préservant l'origine ($T(0) = 0$). On se propose de voir si T est linéaire. On notera $\operatorname{diam}(A) = \sup\{\|x - y\|; x, y \in A\} \leq \infty$ le diamètre d'une partie non-vide A de E.

(1) On fixe $a, b \in E$, et on pose $m = \frac{a+b}{2}$. On veut d'abord donner une construction *métrique* de ce milieu m de $[a, b]$. Pour cela, soit

$$E_1 = \left\{ x \in E; \|x - a\| = \|x - b\| = \frac{1}{2}\|a - b\| \right\},$$

et si $n \geq 2$, soit E_n l'ensemble des « centres » de E_{n-1} défini par :

$$E_n = \left\{ x \in E_{n-1}; \|x - y\| \leq \frac{1}{2}\operatorname{diam}(E_{n-1})\ \forall y \in E_{n-1} \right\}.$$

Montrer que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{m\}.$$

(Ind : Montrer par récurrence que $x \in E_n \Longrightarrow a + b - x \in E_n$.)

(2) On suppose T *surjective*. En utilisant (1) et $T(0) = 0$, montrer que

$$T\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{T(a) + T(b)}{2}\ \forall a, b \in E,$$

et conclure que T est additive, puis linéaire.

(3) On suppose $\dim E < \infty$. Montrer que T est automatiquement surjective, et donc linéaire.

(4) Soit $E = c_0$ l'espace des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels de limite nulle avec la norme usuelle (*cf.* Ex. II.7) et $T : E \to E$ (shift non-linéaire) définie par

$$T(x) = (\sin x_0, x_0, x_1, x_2, \ldots).$$

Montrer que T est isométrique et fixe l'origine, mais qu'elle n'est pas linéaire.

2 SOLUTIONS

Exercice I.1

(1) (i) ℓ^p_α **espace normé.**

Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^p_\alpha$, notons $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, X_n = \alpha_n^{1/p} x_n$ et de même $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, Y_n = \alpha_n^{1/p} y_n$.

L'application de l'inégalité de Minkowski (P 1.6) au couple (X, Y) conduit à $\|x + y\|_{p,\alpha} \leq \|x\|_{p,\alpha} + \|y\|_{p,\alpha}$.

Les axiomes d'espace vectoriel et de norme sont alors faciles à vérifier.

(ii) ℓ^p_α **espace normé complet.**

(a) Soit $1 \leq p < \infty$ et $(f_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ une suite de Cauchy de ℓ^p_α. On note $f_m(n)$ le terme de rang n de $f_m \in \ell^p_\alpha$. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Il existe $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$j, k \geq M(\varepsilon) \Longrightarrow \|f_j - f_k\|^p_{p,\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |f_j(n) - f_k(n)|^p \leq \varepsilon^p. \qquad (I.1)$$

Ceci implique que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $j, k \geq M(\varepsilon), |f_j(n) - f_k(n)| \leq \alpha_n^{-1/p}\varepsilon$.

Vu l'arbitraire sur ε, ceci montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(f_m(n))_{m\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc converge vers une limite notée $f(n)$ quand $m \to \infty$. Pour $j, k \geq M(\varepsilon)$, et $N \in \mathbb{N}^*$, on a d'après $(I.1)$:

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n |f_j(n) - f_k(n)|^p \leq \|f_j - f_k\|^p_{p,\alpha} \leq \varepsilon^p, \qquad (I.2)$$

Le passage à la limite dans $(I.2)$, quand $j \to +\infty$ et $k \geq M(\varepsilon)$, donne

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n |f(n) - f_k(n)|^p \leq \varepsilon^p. \qquad (I.3)$$

Maintenant, en faisant tendre N vers l'infini dans $(I.3)$, on obtient

$$k \geq M(\varepsilon) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |f(n) - f_k(n)|^p \leq \varepsilon^p. \qquad (I.4)$$

Cela montre que $f - f_k \in \ell^p_\alpha$, qui est un espace vectoriel, et donc $f \in \ell^p_\alpha$. $(I.4)$ s'interprète alors ainsi :

$$k \geq M(\varepsilon) \Longrightarrow \|f - f_k\|^p_{\ell^p_\alpha} \leq \varepsilon^p.$$

Ceci montre que ℓ^p_α est complet, i.e. est un espace de Banach.

(b) Soit $p = \infty$ et $(f_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ une suite de Cauchy de ℓ^∞_α. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Il existe $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$j, k \geq M(\varepsilon) \Longrightarrow \sup_{n\geq 1}(\alpha_n |f_j(n) - f_k(n)|) = \|f_j - f_k\|_{\infty,\alpha} \leq \varepsilon.$$

Ceci implique que

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, |f_j(n) - f_k(n)| \leq \alpha_n^{-1}\varepsilon. \tag{$I.5$}$$

La suite $(f_m(n))_{m\in\mathbb{N}^*}$ est alors de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc converge vers une limite notée $f(n)$ quand $m \to \infty$. Et le passage à la limite dans $(I.5)$ quand $j \to +\infty$ et $k \geq M(\varepsilon)$ donne successivement

$$\alpha_n|f(n) - f_k(n)| \leq \varepsilon, f - f_k \in \ell_\alpha^\infty, f \in \ell_\alpha^\infty, \|f - f_k\|_{\ell_\alpha^\infty} \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que ℓ_α^∞ est un espace de Banach.

(2) (i) **Inclusion.**

Soit $f = (f(n))_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell_1^p$. On a $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$, d'où $f \in \ell_1^\infty$, ce qui implique $f \in \ell_1^q$ car

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^q = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^p |f(n)|^{q-p} \leq (\|f\|_{\infty,1})^{q-p} \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^p < \infty.$$

Plus précisément, l'inégalité (I.13) qui suit, avec $\alpha = \frac{p}{q} < 1$, montre que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^q\right)^{\frac{p}{q}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^p, \text{ soit } \|f\|_q \leq \|f\|_p.$$

(ii) **L'inclusion est stricte.**

Pour le montrer, choisissons $f = (f(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $f(n) = n^{-1/p}, n \geq 1$. Alors $f \in \ell_1^q \setminus \ell_1^p$; en particulier, $f \in \ell_1^\infty \setminus \ell_1^p$.

(3) $c_{0,\alpha}$ est un sous-espace vectoriel normé de ℓ_α^∞ muni de la norme $\| \ \|_{\infty,\alpha}$. Comme ℓ_α^∞ est un espace de Banach, il suffit de montrer que $c_{0,\alpha}$ est fermé dans ℓ_α^∞.

Soit donc $f \in \overline{c_{0,\alpha}}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in c_{0,\alpha}$ telle que $\|f - g\|_{\infty,\alpha} \leq \varepsilon$ et un entier $M(\varepsilon)$ tel que

$$n \geq M(\varepsilon) \Longrightarrow \alpha_n|g(n)| \leq \varepsilon.$$

L'inégalité triangulaire montre alors que

$$n \geq M(\varepsilon) \Longrightarrow \alpha_n|f(n)| \leq \alpha_n|f(n) - g(n)| + \alpha_n|g(n)| \leq \|f - g\|_{\ell_\alpha^\infty} + \alpha_n|g(n)|$$

$$\leq \varepsilon + \alpha_n|g(n)| \leq 2\varepsilon,$$

si bien que $\alpha_n f(n) \to 0$ et que $f \in c_{0,\alpha}$. CQFD

Exercice I.2

(1) On utilise la suite proposée en montrant qu'elle est de Cauchy et non convergente dans $(E, \|.\|_\infty)$.

De manière évidente, $f_n \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Notons f, $f(x) = |x|$.

$$\text{Pour tout } x \in [-1,1], |f_n(x) - f(x)| = \frac{|x^2 + \frac{1}{n^2} - x^2|}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} \leq \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}.$$

Alors $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. S'il existe $g \in E$ telle que $\|f_n - g\|_\infty \to 0$, on a en particulier pour tout $x \in [-1,1]$, $f_n(x) \to g(x)$ et par suite $f = g$. Mais $f \notin E$! Donc, la suite (f_n) n'est pas convergente dans E.

(2) Soit une suite (f_n) de Cauchy dans $(E, \|.\|)$, alors les deux suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont de Cauchy dans $(C([-1,1]), \|.\|_\infty)$.

Les règles usuelles d'échange limite-dérivation (la convergence uniforme de la suite des dérivées et la convergence en un point de la suite des fonctions entraînent la « dérivation terme à terme » de la suite) permettent d'assurer qu'il existe f C^1 telle que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ et $\lim_{n\to\infty} f_n' = f'$, au sens de $\| \quad \|_\infty$. Donc $f_n \to f$ au sens de $\|.\|$, et $(E, \|.\|)$ est complet (espace de Banach).

Exercice I.3

Commençons par une remarque d'intérêt général (qu'on aurait d'ailleurs pu appliquer à l'Ex. I.1) sous forme du

Fait. *Soit Y un espace de Banach, X un espace normé, et $T : X \to Y$ une isométrie surjective. Alors, X est aussi un espace de Banach.*

Preuve. Soit (x_n) une suite de Cauchy de X. Alors, $(T(x_n))$ est une suite de Cauchy de Y puisque $\|T(x_p) - T(x_q)\| = \|x_p - x_q\|$. Puisque Y est complet, il existe $y \in Y$ tel que $T(x_n) \to y$. Et puisque T^{-1}, qui est aussi une isométrie, est continue, on a $x_n \to T^{-1}(y)$. CQFD.

Appliquons ceci à $X = E_\omega, Y = E_1 \overset{def}{=} E$ correspondant au poids constant égal à 1, et $T(f) = \omega f$. Il est évident (une fois qu'on aura vérifié les axiomes de norme) que $T : E_\omega \to E$ est une isométrie surjective d'inverse T^{-1} donné par $T^{-1}(g) = \frac{1}{\omega} g$. De plus, les sous-espaces considérés se correspondent par cette isométrie :

$$T(E) = E_\omega, T(F) = F_\omega, T(G) = G_\omega, T(H) = H_\omega.$$

Si donc on sait faire le travail pour le poids $\omega = 1$, on l'aura fait automatiquement pour un poids quelconque. C'est pourquoi nous supposerons sans perte de généralité que nous travaillons avec l'espace E et ses sous-espaces F, G, H, même si l'on rencontre « en pratique » (espaces de Bergman, de Dirichlet) des cas où $\omega \neq 1$.

Pour chacun des ensembles E, F, G, H à étudier, la structure d'espace vectoriel complexe est évidente. Il s'agit ensuite de s'assurer de la validité des axiomes de norme (D 1.1), (D 1.2), puis du caractère complet.

(1) **Vérification du caractère de norme :**

(i) $\boldsymbol{\|f\|_\infty \in \mathbb{R}^+}$. f est par définition bornée, donc $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}^+$.

(ii) $\boldsymbol{[\|f\|_\infty = 0] \Leftrightarrow [f = 0]}$.

$$[\|f\|_\infty = 0] \Leftrightarrow [\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f(x)| = 0] \Leftrightarrow [\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = 0] \Leftrightarrow [f = 0].$$

(iii) $\boldsymbol{\forall \lambda \in \mathbb{C}, \|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\, \|\lambda f\|_\infty}$.

$\sup\{|\lambda f(x)|; x \in \mathbb{R}^+\} = |\lambda| \sup\{|f(x)|; x \in \mathbb{R}^+\} = |\lambda|\, \|f\|_\infty$.

(iv) $\boldsymbol{\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty}$.

$$\begin{aligned} \|f + g\|_\infty &= \sup\{|f(x) + g(x)|; x \in \mathbb{R}^+\} \\ &\leq \sup\{|f(x)|; x \in \mathbb{R}^+\} + \sup\{|g(x)|; x \in \mathbb{R}^+\}, \end{aligned}$$

d'où $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

(v) ***E* complet.** Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset E$ une suite de Cauchy, alors

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*; p, q \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow \|f_p - f_q\|_\infty \leq \varepsilon. \quad (I.6)$$

$$\text{D'où, pour tous } p, q \geq N(\varepsilon), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^+, |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon. \quad (I.7)$$

Par conséquent la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc convergente vers une limite $f(x)$. Quand $q \to \infty$ dans $(I.7)$, on obtient

$$\text{Pour tout } p \geq N(\varepsilon), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^+, |f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Cela montre que $f_p - f \in E$ et donc que $f \in E$, puisque E est un espace vectoriel. Maintenant qu'on sait que $f \in E$, l'inégalité précédente se lit :

$$\text{Pour tout } p \geq N(\varepsilon), \|f_p - f\|_\infty \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers f pour la norme $\|\ \|_\infty$.

(2) F est un sous-espace vectoriel de E complet. Il suffit donc de montrer que F est fermé dans E. Mais ceci est évident, car on sait qu'une limite uniforme de fonctions continues est une fonction continue.

(3) Si l'on montre que $G \subset F$ est fermé dans F, on pourra appliquer la question précédente.

(ii) ***G* fermé dans *F*.**

Soit $f \in \overline{G} \cap F$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in G$ telle que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$ et, puisque $g \in G$, $A = A(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\text{Pour tous } x, y \geq A, |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon.$$

L'inégalité triangulaire nous montre alors que

$$x, y \geq A \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(y)| + |g(y) - f(y)|$$
$$\leq 2\|f - g\|_\infty + |g(x) - g(y)| \leq 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Puisque ε est arbitraire, on voit que f vérifie le critère de Cauchy à l'infini, et donc y possède une limite, i.e. $f \in G$. CQFD

(4) H est un sous-espace vectoriel fermé de G.

Ceci est facile : soit $f \in \overline{H} \cap G$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in H$ telle que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$ et, puisque $g \in H, A = A(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $x \geq A, |g(x)| \leq \varepsilon$. L'inégalité triangulaire nous montre alors que

$$x \geq A \Longrightarrow |f(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x)| \leq \|f - g\|_\infty + |g(x)| \leq 2\varepsilon.$$

Exercice I.4

(1) Avec les notations de l'énoncé, soit $\varepsilon > 0$.

$$\text{Il existe } N(\varepsilon) \text{ tel que } n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon. \qquad (I.8)$$

Notons $y_p = x_{n(p)}$, où $(n(p))_{p \in \mathbb{N}^*}$ est une sous-suite croissante de $\mathbb{N}^*$. Il existe un entier $P(\varepsilon)$ tel que

$$p > P(\varepsilon) \Longrightarrow n(p) > N(\varepsilon) \text{ et } \|y_p - y\| \leq \varepsilon.$$

Utilisons ceci pour comparer y à x_n pour n assez grand. Soit donc $n > N(\varepsilon)$ et $p > P(\varepsilon)$. Nous avons via $(I.8)$:

$$\|y - x_n\| \leq \|y - y_p\| + \|y_p - x_n\| \leq 2\varepsilon, \qquad (I.9)$$

ce qui montre que $\lim_{n \to \infty} x_n = y$.

(2) Il s'agit de fabriquer une sous-suite de (x_n) « rapidement » de Cauchy. Pour ceci on utilise le caractère de Cauchy de la suite (x_n) pour $\varepsilon_p = 2^{-p}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $j, k \geq N_p, \|x_j - x_k\| \leq 2^{-p}$.

On pose

$$m_p = \max(N_1, \ldots, N_p) + p \text{ et } y_p = x_{m_p}.$$

Alors, la suite $(m_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et, comme $\min(m_p, m_{p+1}) \geq N_p$, on a $\|y_{p+1} - y_p\| \leq 2^{-p}$.

(3) Deux implications sont à prouver.

(i) Si *E* est complet, toute série absolument convergente est convergente.

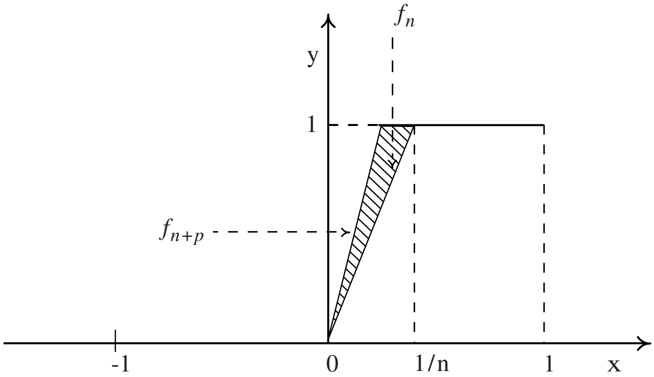
Soit $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ une série absolument convergente. Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \|u_k\|$. La clé est l'inégalité suivante, conséquence évidente de l'inégalité triangulaire :

$$q \geq p \Longrightarrow \|S_q - S_p\| \leq T_q - T_p. \qquad (I.10)$$

Alors, si la série est absolument convergente, $T_p - T_q \to 0$ quand $p, q \to \infty$, et ($I.10$) montre que $S_p - S_q \to 0$ quand $p, q \to \infty$, autrement dit S_n est de Cauchy, et converge.

(ii) **Si toute série de E absolument convergente est convergente, E est complet.** Soit une suite de Cauchy arbitraire $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, il s'agit de montrer qu'elle est convergente. Par (2), il existe une sous-suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ de (x_n) vérifiant $\|y_{p+1} - y_p\| \leq 2^{-p}$, et la série de terme général $y_{p+1} - y_p$ est absolument convergente, donc convergente. Donc, la suite de terme général $y_p = y_1 + \sum_{j=1}^{p-1}(y_{j+1} - y_j)$ est convergente. D'après (1), la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

(4) (i) La réalisation préalable du graphe de f_n montre le résultat.



La suite (f_n) est croissante et pour tout $x \in]0, 1]$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_{n+1} - f_n\|_1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{2n(n+1)}$ (aire du triangle hachuré) ; la suite (f_n) est donc de Cauchy, car la série de terme général égal à $\|f_{n+1} - f_n\|_1$ est convergente.

Soit $g \in E$. On ne peut avoir à la fois $g = 0$ sur $[-1, 0]$ et $g = 1$ sur $]0, 1]$, sinon g serait discontinue en 0 (c'est bien là le hic). Donc, on peut par exemple trouver $t_0 \in]0, 1]$ tel que $g(t_0) \neq 1$ et par continuité un intervalle $J = [a, b] \subset]0, 1]$ contenant t_0, de longueur $l = b - a > 0$, et un nombre $c > 0$ tels que

$$t \in J \Longrightarrow |g(t) - 1| \geq c.$$

Pour $n \geq \frac{1}{a}$, on a $f_n = 1$ sur J, d'où

$$\begin{aligned}\|f_n - g\|_1 &= \int_{-1}^{1} |f_n(t) - g(t)|dt \geq \int_J |f_n(t) - g(t)|dt \\ &= \int_J |1 - g(t)|dt \geq \int_J c dt = cl > 0,\end{aligned}$$

ce qui montre que f_n ne peut converger vers g dans E muni de la norme L^1. L'espace E est donc *non-complet* pour cette norme.

(ii) $\|g_n\|_1 = \frac{1}{2n(n+1)}$ comme on l'a déjà vu. Cette dernière fraction est le terme général d'une série convergente. La série de terme général g_n est donc absolument convergente. Elle est non-convergente dans E car sinon la suite $f_n = f_1 + \sum_{j=1}^{j=n-1} g_j$ convergerait dans E.

Remarque I.1 : Lors de l'étude des séries numériques, on apprend que la convergence absolue entraîne la convergence ; ceci ne reste pas vrai dans un espace normé arbitraire mais la question (1) montre que l'hypothèse « espace de Banach » pour E est nécessaire et suffisante pour que cette implication soit toujours vraie.

Remarque I.2 : Le langage de la convergence absolue a été utilisé dans cet exercice, conformément à la définition (D 1.16), pour les séries de fonctions continues sur $[-1, 1]$. Il convient de faire attention à la terminologie usuelle :

(1) $\sum_n f_n$ absolument convergente dans $(C([-1, 1], \| \|)$, au sens du cours (D 1.16).

(2) $\sum_n f_n$ absolument convergente dans $(C([-1, 1], \| \|_\infty)$, on dit souvent qu'elle est normalement convergente.

(3) Si $x \in [-1, 1]$, $\sum_n |f_n(x)|$ converge, $\sum_n f_n(x)$ est absolument convergente dans l'espace normé $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni de la norme module $| \quad |$.

Exercice I.5

(1) Il faut vérifier les axiomes de norme (D 1.2) :

(i) Pour toute $f \in H(D), N(f) \in \mathbb{R}^+$.

(ii) $[N(f) = 0] \Rightarrow [f = 0]$: Si $N(f) = 0$, alors $f(z) = 0$ pour tout z tel que $|z| \leq \frac{1}{2}$. D'après le théorème des zéros isolés, pour tout $z \in D, f(z) = 0$, i.e. $f = 0$.

(iii) Les autres axiomes sont faciles à vérifier.

(2) Considérons la série de terme général u_n, avec $u_n(z) = z^n$ pour $n \geq 0$ et $z \in D$. Montrons que cette série est absolument convergente, mais non-convergente, dans $(H(D), N)$. Il résultera alors de l'exercice (P 2.1) précédent que $(H(D), N)$ *n'est pas complet*. On a clairement $N(u_n) = 2^{-n}$, donc la série est absolument convergente. Supposons qu'elle converge vers g dans $(H(D), N)$. Cela signifie que $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$ converge vers $g(z)$ uniformément, en particulier simplement, sur l'ensemble $\{z; |z| \leq \frac{1}{2}\} \stackrel{def}{=} A$. Comme par ailleurs $z \in A \Longrightarrow f_n(z) = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \to \frac{1}{1-z}$, on voit que $z \in A \Longrightarrow g(z) = \frac{1}{1-z}$. Par unicité du prolongement analytique, l'égalité reste vraie si $|z| < 1$. Mais cela est impossible ! Car, quand $z \xrightarrow{<} 1$, $g(z)$ tend vers $g(1)$, donc reste bornée, alors que $\frac{1}{1-z} \to +\infty$. Cette contradiction montre que g n'existe pas, et achève la question.

Exercice I.6

(1) Pour f fixée, on note $k = p_\alpha(f)$. La définition de $p_\alpha(f)$ entraîne l'inégalité

$$\text{Pour tous } x, y, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^\alpha.$$

Ceci entraîne la continuité de f.

(2) (i) **Valeur de norme.**

Il s'agit de vérifier la validité des axiomes de norme (D 1.2) :

(a) Pour toute $f \in \mathrm{Lip}_\alpha$, $p_\alpha(f) \in \mathbb{R}^+$;

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $p_\alpha(\lambda f) = |\lambda| p_\alpha(f)$.

Ceci est facile à vérifier.

(b) **$[p_\alpha(f) = 0] \Leftrightarrow [f = 0]$.**

$$[p_\alpha(f) = 0 = |f(0)| + \sup\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}; (x, y) \in J\}]$$
$$\Leftrightarrow [f(0) = 0 \text{ et } \forall (x, y) \in J, |f(x) - f(y)| = 0]$$
$$\Leftrightarrow [\forall (x, y) \in J, f(x) = f(y) = f(0) = 0] \Leftrightarrow [f = 0].$$

(c) **$p_\alpha(f + g) \leq p_\alpha(f) + p_\alpha(g)$.**

$$p_\alpha(f+g) \leq |f(0)| + |g(0)| + \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}; (x, y) \in J\right\}$$
$$+ \sup\left\{\frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|^\alpha}; (x, y) \in J\right\} = p_\alpha(f) + p_\alpha(g).$$

(ii) **$\|f\|_\infty \leq p_\alpha(f)$.**

Pour tout $f \in \mathrm{Lip}_\alpha$, pour tout $x \in [0, 1], |f(x)| \leq |f(0)| + |f(x) - f(0)|$
$\leq |f(0)| + (p_\alpha(f) - |f(0)|)|x|^\alpha$
$\leq |f(0)| + (p_\alpha(f) - |f(0)|) = p_\alpha(f)$. En passant au sup sur $x \in [0, 1]$, on obtient $\|f\|_\infty \leq p_\alpha(f)$.

(3) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de Lip_α, et $\varepsilon > 0$.

$$\text{Il existe } N(\varepsilon) \text{ tel que pour } p, q \geq N(\varepsilon), p_\alpha(f_p - f_q) \leq \varepsilon. \tag{I.11}$$

Comme $\|f_p - f_q\|_\infty \leq p_\alpha(f_p - f_q)$, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace complet $(C([0, 1]), \| \|_\infty)$, et converge donc uniformément vers une fonction f continue.

Il reste à montrer que $f \in \mathrm{Lip}_\alpha$ et que $\lim_{n \to \infty} p_\alpha(f_n - f) = 0$.

Soit p, q entiers $\geq N(\varepsilon)$, et $(x, y) \in J$. D'après (I.11), on a

$$|f_p(0) - f_q(0)| + \frac{|(f_p(x) - f_p(y)) - (f_q(x) - f_q(y))|}{|x-y|^\alpha} \leq p_\alpha(f_p - f_q) \leq \varepsilon.$$

Lorsque $p \geq N(\varepsilon)$ reste fixé et $q \to \infty$, on obtient

$$|f_p(0) - f(0)| + \frac{|(f_p(x) - f_p(y)) - (f(x) - f(y))|}{|x-y|^\alpha}$$
$$= |f_p(0) - f(0)| + \frac{|(f_p(x) - f(x)) - (f_p(y) - f(y))|}{|x-y|^\alpha} \leq \varepsilon.$$

En passant au sup sur $(x, y) \in J$, on voit d'abord que $f_p - f \in \mathrm{Lip}_\alpha$ qui est un espace vectoriel, et donc $f \in \mathrm{Lip}_\alpha$. L'inégalité qu'on vient d'obtenir s'interprète alors en écrivant : $p \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow p_\alpha(f_p - f) \leq \varepsilon$. Ceci achève la preuve de la complétude de Lip_α.

Remarque : Les espaces Lip_α $(0 < \alpha \leq 1)$ sont des espaces de Banach *non-séparables*, i.e. ils ne contiennent pas de partie dénombrable dense. Soit en effet, pour $0 \leq a \leq 1$, f_a définie par

$$f_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, a] \\ (x - a)^\alpha & \text{si } x \in [a, 1]. \end{cases}$$

On a $f_a \in \mathrm{Lip}_\alpha$ d'après $(I.13)$ qui suit, et de plus

$$0 \leq a, b \leq 1 \text{ et } a \neq b \Longrightarrow \|f_a - f_b\|_{\mathrm{Lip}_\alpha} = p_\alpha(f_a - f_b) \geq 1. \tag{$I.12$}$$

En effet, supposant par exemple $a < b$ et posant $g = f_a - f_b$, nous avons

$$p_\alpha(g) \geq \frac{|g(b) - g(a)|}{(b - a)^\alpha} = \frac{(b - a)^\alpha}{(b - a)^\alpha} = 1,$$

puisque (dessiner les graphes de f_a et f_b)

$$g(a) = f_a(a) - f_b(a) = 0 \text{ et } g(b) = f_a(b) - f_b(b) = f_a(b) = (b - a)^\alpha.$$

Cela prouve $(I.12)$, qui à son tour implique la non-séparabilité de Lip_α.

Exercice I.7

(1) Soit $f_\alpha(x) = x^\alpha$.

(i) $\boldsymbol{f_\alpha \in \mathrm{Lip}_\alpha}$**.**

Notons d'abord l'inégalité élémentaire

$$\text{Pour tous } u, v \geq 0, \text{ pour tout } 0 < \alpha \leq 1, (u + v)^\alpha \leq u^\alpha + v^\alpha. \tag{$I.13$}$$

En effet, puisque $\max(\frac{u}{u+v}, \frac{v}{u+v}) \leq 1$, on a successivement

$$1 = \frac{u}{u + v} + \frac{v}{u + v} \leq \left(\frac{u}{u + v}\right)^\alpha + \left(\frac{v}{u + v}\right)^\alpha = \frac{u^\alpha + v^\alpha}{(u + v)^\alpha},$$

ce qui prouve $(I.13)$. Ensuite, si $x, y \in [0, 1]$ et par exemple $y = x + h \geq x$, on voit que

$$|f_\alpha(x) - f_\alpha(x)| = y^\alpha - x^\alpha = (x + h)^\alpha - x^\alpha \leq x^\alpha + h^\alpha - x^\alpha = h^\alpha = |x - y|^\alpha.$$

Ceci montre que $f_\alpha \in \mathrm{Lip}_\alpha$.

(ii) **Si** $\boldsymbol{\alpha \geq \gamma, f_\alpha \in \mathrm{Lip}_\gamma}$**.**

Puisque $(x, y) \in J \Longrightarrow |x - y| \leq 1 \Longrightarrow |x - y|^\alpha \leq |x - y|^\gamma$, on a

$$\text{Pour tout } (x, y) \in J, \ \frac{|f_\alpha(y) - f_\alpha(x)|}{|y - x|^\gamma} \leq \frac{|f_\alpha(y) - f_\alpha(x)|}{|y - x|^\alpha} \leq 1,$$

d'où $f_\alpha \in \mathrm{Lip}_\gamma$.

(iii) **Si $\alpha < \gamma, f_\alpha \notin \mathrm{Lip}_\gamma$.**

On a pour $y = 0$ et $x \neq 0$, $p_\gamma(f_\alpha) \geq \frac{x^\alpha}{x^\gamma} = x^{\alpha-\gamma} \to \infty$ quand $x \to 0$ car $\alpha - \gamma < 0$. D'où $p_\gamma(f_\alpha) = +\infty$ et $f_\alpha \notin \mathrm{Lip}_\gamma$.

(2) La fonction g définie par [$g(x) = (\ln(\frac{x}{2}))^{-1}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$] est continue sur $[0, 1]$. D'autre part pour tout $x \in [0, 1]$, $p_\alpha(g) \geq \frac{g(x)}{x^\alpha}$. Or on a :

$$\text{Pour tout } \alpha > 0, \frac{g(x)}{x^\alpha} = \frac{1}{x^\alpha \ln(\frac{x}{2})} \to +\infty \text{ lorsque } x \to 0^+.$$

D'où $p_\alpha(g) = +\infty$, et $g \notin \bigcup(\mathrm{Lip}_\alpha, 0 < \alpha \leq 1)$.

(3) (i) **$\varphi \notin C^1([0, 1])$.**

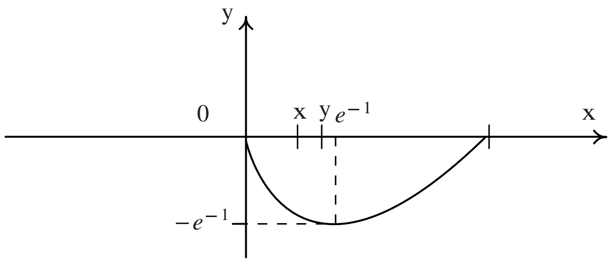
On a l'inclusion $C^1([0, 1]) \subset \mathrm{Lip}_1$ d'après le théorème des accroissements finis. Donc, cette question résultera de celle d'après.

(ii) **$\varphi \notin \mathrm{Lip}_1$.**

On cherche aussi le comportement au voisinage de 0, c'est-à-dire celui de la fonction $\frac{|\varphi(x)-\varphi(0)|}{|x|^1} = |\ln(x)|$. Le second membre tend vers $+\infty$ lorsque $x \to 0$; donc $\varphi \notin \mathrm{Lip}_1$.

(iii) **Pour $\alpha \in]0, 1[, \varphi \in \mathrm{Lip}_\alpha$.**

(a) **Graphe de φ.**



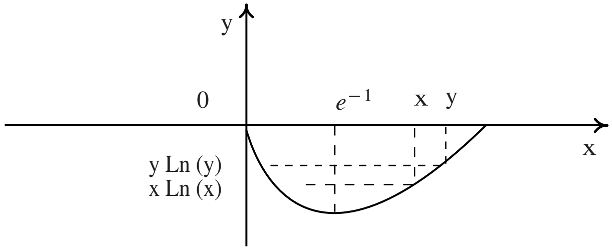
Fonction $\varphi(x) = x \ln x$

La fonction φ est continue sur $[0, 1]$. Sa dérivée, pour $x \neq 0$, est $\varphi'(x) = \ln(x)+1$. Suivant l'indication de l'énoncé, on a pour $0 < x \leq y \leq 1$:

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| = \left|\int_x^y \varphi'(t)dt\right| \leq \int_x^y (|\ln t| + 1)dt$$

$$\leq \int_x^y (1 + C_\alpha t^{\alpha-1})dt = y - x + \frac{C_\alpha}{\alpha}(y^\alpha - x^\alpha) \leq y - x + \frac{C_\alpha}{\alpha}(y - x)^\alpha,$$

en utilisant l'inégalité (I.13) qu'on vient de voir. D'où (en posant $K_\alpha = 1 + \frac{C_\alpha}{\alpha}$ et en notant que $y - x \leq |y - x|^\alpha$) l'inégalité $|\varphi(y) - \varphi(x)| \leq K_\alpha |y - x|^\alpha$, qui prouve bien que, pour $0 < \alpha < 1$, on a $\varphi \in \mathrm{Lip}_\alpha$.



Fonction $\varphi(x) = x \ln x$

Une étude plus précise, mais plus délicate, montrerait que l'on a

$$p_\alpha(\varphi) \leq (\alpha(1-\alpha))^{-1}. \qquad (I.14)$$

Remarque : La fonction φ (qui montre que $\mathrm{Lip}_1 \subsetneq \bigcap_{\alpha<1} \mathrm{Lip}_\alpha$) offre aussi un exemple élémentaire intéressant de fonction de la *classe de Zygmund* Λ définie comme suit ($C = C_f$ désignant une constante dépendant de f) :

$$\Lambda = \{f \in C[0,1]; |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| \leq Ch, \forall\, 0 \leq h \leq x \leq x+h \leq 1\}.$$

Autrement dit, on récupère le côté $O(h)$ dès qu'on passe aux différences secondes. En effet, la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 2 nous donne ici, pour $0 < h < x < x+h \leq 1$, et pour la fonction $f = \varphi$ qui vérifie $f''(u) = \frac{1}{u} \geq 0$:

$$\begin{aligned}|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| &= h^2 \int_0^1 (1-t)(f''(x+th) + f''(x-th))dt \\ &= h^2 \int_0^1 (1-t)\left(\frac{1}{x+th} + \frac{1}{x-th}\right)dt \leq h^2 \int_0^1 (1-t)\left(\frac{1}{h+th} + \frac{1}{h-th}\right)dt \\ &= h \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1+t} + 1\right)dt = (2\ln 2)h.\end{aligned}$$

Et on montre facilement que $\Lambda \subset \bigcap_{0<\alpha<1} \mathrm{Lip}_\alpha$, ce qui redonne les inclusions précédentes. Voici comment : on pose, pour $0 \leq h \leq 1$:

$$\omega(h) = \sup_{x,y\in[0,1],|x-y|\leq h} |f(x) - f(y)|.$$

Puis on part de l'identité

$$f(x+h) - f(x) = \frac{f(x+2h) - f(x)}{2} - \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{2}.$$

En prenant les modules, puis le sup sur x, on en déduit

$$\omega(h) \leq \frac{1}{2}\omega(2h) + \frac{1}{2}Ch \leq \frac{1}{2}\omega(2h) + Ch.$$

En itérant cette propriété, on obtient par récurrence :

$$\omega(h) \leq \frac{1}{2^n}\omega(2^n h) + Cnh \leq \frac{1}{2^n}2\|f\|_\infty + Cnh.$$

En choisissant pour n le plus grand entier tel que $n2^n \leq \frac{1}{h}$ (optimisation par rapport au paramètre n), on obtient l'existence d'une constante $K > 0$, ne dépendant que de f, telle que

$$\omega(h) \leq Kh \ln\frac{1}{h}, \text{ pour tout } 0 < h < \frac{1}{2}.$$

Et cela entraîne immédiatement que $f \in \bigcap_{0<\alpha<1} \mathrm{Lip}_\alpha$.

(4) (i) **$\mathrm{Lip}_\beta \subseteq C([0,1])$.**

Voir Ex. I.6.

(ii) **$\mathrm{Lip}_\alpha \subseteq \mathrm{Lip}_\beta$.**

Si $\beta < \alpha$, alors $|x-y|^{-\beta} \leq |x-y|^{-\alpha}$ donc, si $p_\alpha(f)$ est fini, $p_\beta(f)$ l'est aussi.

(iii) **$C^1([0,1]) \subseteq \mathrm{Lip}_\alpha$.**

On utilise le théorème des accroissements finis et la continuité de f' sur le compact $[0,1]$, qui implique $\sup\{|f'(t)|, t \in [0,1]\} = M < \infty$:

$$\text{Pour tout } x, y \in [0,1], |f(x) - f(y)| \leq M|x-y| \leq M|x-y|^\alpha,$$

car $|x-y| \leq 1$, donc $|x-y| \leq |x-y|^\alpha$.

(iv) **Inclusions strictes.**

Les fonctions étudiées en (1) montrent l'inclusion stricte $\mathrm{Lip}_\alpha \subset \mathrm{Lip}_\beta$.

Les fonctions étudiées en (1) ne sont pas différentiables en $x = 0$, alors elles montrent l'inclusion stricte $C^1([0,1]) \subset \mathrm{Lip}_\alpha$.

La fonction étudiée en (2) est continue sur $[0,1]$, mais n'est dans aucun des Lip_α. Elle établit donc l'inclusion stricte $\mathrm{Lip}_\alpha \subset C([0,1])$.

Exercice I.8

(1) Le seul axiome qui pose problème ici est $N(\widetilde{x}) = 0 \Longrightarrow \widetilde{x} = 0$. Et la validité de cet axiome tient au caractère fermé de M : on voit en effet que

$$N(\widetilde{x}) = 0 \Longrightarrow d(x, M) = 0 \Longrightarrow x \in \overline{M} \Longrightarrow x \in M \Longrightarrow \widetilde{x} = 0.$$

Soit maintenant $(\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une série absolument convergente dans E/M. Pour chaque n, on peut choisir $x_n \in \widetilde{x}_n$ tel que $\|x_n\| \leq N(\widetilde{x}_n) + 2^{-n}$, et on a donc $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$. Comme E est complet, il existe $S \in E$ tel que

$$\lim_{N\to\infty} \|\sum_{n=1}^N x_n - S\| = 0.$$

Si $\widetilde{S}$ est la classe d'équivalence de S, l'inégalité évidente

$$N\left(\widetilde{S} - \sum_{n=1}^{N} \widetilde{x_n}\right) = N\left(\widetilde{S - \sum_{n=1}^{N} x_n}\right) \leq \|S - \sum_{n=1}^{N} x_n\|$$

montre que la série de terme général $\widetilde{x_n}$ converge avec pour somme $\widetilde{S}$. Ainsi, toute série absolument convergente dans E/M est convergente, et on sait (*cf.* Ex. I.4) que cela équivaut à la complétude de E/M.

(2) L'hypothèse « E/M complet » n'est pas suffisante pour montrer que E est complet. Par exemple, si M est de codimension finie dans E, alors E/M est complet car de dimension finie, même si E n'est pas complet. Montrons en revanche que (propriété des trois espaces) :

$$M \text{ et } E/M \text{ complets} \Longrightarrow E \text{ complet.}$$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de Cauchy de E. Alors $(\widetilde{x_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans E/M puisque $N(\widetilde{x_p} - \widetilde{x_q}) = N(\widetilde{x_p - x_q}) \leq \|x_p - x_q\|$.

Puisque E/M est complet, il existe $x \in E$ tel que $N(\widetilde{x_n} - \widetilde{x}) \to 0$ quand $n \to \infty$.

Par définition de la norme-quotient (définition de l'inf), on peut trouver $y_n \in M$ tel que $x_n - x - y_n \to 0$. La suite $x_n - y_n$ est donc de Cauchy dans E (elle converge vers x !), et comme x_n est déjà de Cauchy, la suite y_n est de Cauchy dans M. Elle converge donc vers $y \in M$. Cela montre que $x_n \to x + y$, et E est complet.

Exercice I.9

(1) D'abord, $E_1 \neq \emptyset$ car $m \in E_1$. Ensuite, on a :

$$x \in E_n \Longrightarrow a + b - x \in E_n. \qquad (I.15)$$

En effet, $x \in E_1 \Longrightarrow \|(a+b-x)-a\| = \|x-b\| = \frac{1}{2}\|a-b\|$ et de même $\|(a+b-x)-b\| = \|x-a\| = \frac{1}{2}\|a-b\|$. Maintenant, si (I.15) est vraie pour $n-1$ et si $x \in E_n, y \in E_{n-1}$, on a $a+b-y \in E_{n-1}$, d'où

$$\|(a+b-x)-y\| = \|x-(a+b-y)\| \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{diam}(E_{n-1}), \text{ soit } a+b-x \in E_n,$$

ce qui prouve (I.15) par récurrence. Montrons aussi que $m \in E_n$ pour $n \geq 2$. Supposons montré que $m \in E_{n-1}$ et soit $y \in E_{n-1}$. Alors, $a+b-y \in E_{n-1}$, d'où $\mathrm{diam}(E_{n-1}) \geq \|(a+b-y)-y\| = 2\|m-y\|$, soit encore $\|m-y\| \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{diam}\, E_{n-1}$, ce qui montre que $m \in E_n$. Et cela donne bien le résultat souhaité : soit en effet $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. On a $E_1 \subset \overline{B}(a, \frac{\|a-b\|}{2})$, donc $\mathrm{diam}(E_1) \leq \|a-b\| < \infty$. Et par construction, $\mathrm{diam}(E_n) \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{diam}(E_{n-1})$, donc $\mathrm{diam}(E) = 0$, ce qui veut dire que E est vide ou réduit à un point. Mais on a montré plus haut que $m \in E$, ce qui donne le résultat demandé : $E = \{m\}$. Il est à noter que la complétude de E n'est nullement nécessaire ici.

(2) Les ensembles E_n sont définis à partir des points a et b. Définissons de même des ensembles F_n à partir des points $T(a)$ et $T(b)$. Le caractère isométrique et surjectif de T fait que $F_n = T(E_n)$ comme on le vérifie immédiatement par récurrence. D'où, T étant injective car isométrique :

$$T\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n, \text{ soit } T\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{T(a)+T(b)}{2}. \qquad (I.16)$$

Le reste est facile : prenant $a = 2x, b = 0$ dans (I.16), on obtient $T(2x) = 2T(x)$ pour tout $x \in E$. Puis revenant à (I.16) avec a, b changés en $2a, 2b$, on voit que

$$T(a+b) = \frac{T(2a)+T(2b)}{2} = T(a) + T(b), \forall a, b \in E.$$

Il en résulte que

$$T(rx) = rT(x)\ \forall x \in E, \forall r \in \mathbb{Q},$$

puis $T(rx) = rT(x)\ \forall x \in E, \forall r \in \mathbb{R}$ par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et continuité de T. On a bien montré que T est $\mathbb{R}$-linéaire.

(3) Soit, pour $r > 0$, S_r la sphère de centre 0 et de rayon r. Elle est *compacte* puisque E est de dimension finie. Et puisque

$$\|T(x)\| = \|T(x) - T(0)\| = \|x - 0\| = \|x\|,$$

on voit que T induit une isométrie de S_r dans elle-même, forcément surjective car toute isométrie d'un espace métrique compact dans lui-même est surjective. Il en résulte que $T : E \to E$ est surjective, et on est ramené à la question précédente.

(4) On a par construction $T(0) = 0$, ainsi que, si $x = (x_n), y = (y_n) \in E$:

$$\|T(x) - T(y)\| = \max(|\sin x_0 - \sin y_0|, \|x - y\|).$$

Mais $|\sin x_0 - \sin y_0| \leq |x_0 - y_0| \leq \|x - y\|$, si bien que le sinus n'a aucun effet sur la norme de $T(x) - T(y)$ et que

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|.$$

Par suite, T est une isométrie (non-surjective) préservant l'origine, mais elle n'est pas linéaire à cause du terme en sinus qu'on a mis exprès pour détruire cette linéarité. Pourtant, ici, E est complet.

Remarque : Si l'isométrie surjective T ne préserve pas l'origine, elle est *affine*, comme on le voit en considérant $S(x) = T(x) - T(0)$, isométrie surjective préservant l'origine, donc linéaire.

THÉORÈMES FONDAMENTAUX

II

1 ÉNONCÉS

Exercice II.1

Soit E un espace métrique complet, donc de Baire (Tout G_δ dense, i.e. toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E, est dense dans E, *cf.* P 2.12).

(1) (i) (**Question préliminaire).** Montrer qu'un ouvert non-vide O de E est encore un espace de Baire (**indication :** si (O_n) est une suite d'ouverts de O denses dans O et A un ouvert non-vide de O, considérer les ouverts $\omega_n = O_n \cup \overline{O}^c$ et observer que $\omega_n \cap A = O_n \cap A$).

(ii) On définit la fonction oscillation $\omega(g, .)$ d'une fonction $g : E \to \mathbb{C}$ par la formule (où $\overline{B}(x_0, r)$ est la boule fermée de centre x_0 et de rayon r) :

$$\omega(g, x_0) = \inf_{r>0} \omega_r(g, x_0) \text{ avec } \omega_r(g, x_0) = \sup\{|g(x) - g(y)|; x, y \in \overline{B}(x_0, r)\}.$$

Montrer que g est continue au point x_0 si et seulement si $\omega(g, x_0) = 0$, et que de plus la fonction ω est sous-additive :

$$\omega(g_1 + g_2, x_0) \leq \omega(g_1, x_0) + \omega(g_2, x_0) \text{ pour tous } g_1, g_2, x_0.$$

(iii) Montrer que l'ensemble $O_\varepsilon = \{x; \omega(g, x) < \varepsilon\}$ est ouvert pour tout $\varepsilon > 0$.

(iv) Si O est un ouvert non-vide de E, $g/O = h$ la restriction de g à O et $x_0 \in O$, montrer que

$$\omega(g, x_0) = \omega(h, x_0).$$

Soit maintenant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues : $E \to \mathbb{C}$ qui converge simplement vers une fonction $f : E \to \mathbb{C}$.

On se propose de montrer que l'ensemble des points de continuité de f est un G_δ dense dans E.

Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_{N,\varepsilon} = \{x \in E \text{ tels que } \forall n, p \geq N, |f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon\}.$$

On note $\text{int}(A_{N,\varepsilon})$ l'intérieur de $A_{N,\varepsilon}$.

(2) (i) Montrer que chaque $A_{N,\varepsilon}$ est fermé et que $E = \bigcup_{N=1}^{\infty} A_{N,\varepsilon}$.

(ii) Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{int}(A_{N,\varepsilon}) \neq \emptyset$.

(iii) En déduire que $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \exists V_\varepsilon \subseteq E, V_\varepsilon$ boule ouverte, tels que

$$\forall x \in V_\varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon, |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon, \qquad (II.1)$$

(iv) En déduire que l'ouvert $O_\varepsilon = \{x; \omega(f, x) < \varepsilon\}$ est non-vide pour tout $\varepsilon > 0$.

(3) Montrer plus précisément que l'ensemble $C(f)$ des points de continuité de f s'écrit $C(f) = \cap_{p=1}^{\infty} O_{\frac{1}{p}}$ et que c'est un G_δ dense de E.

(4) En appliquant (3), montrer que :

(i) la fonction caractéristique de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels n'est pas limite simple d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

(ii) si g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors sa dérivée g' est une fonction dont l'ensemble des points de continuité est un G_δ dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice II.2

Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ l'espace des fonctions complexes continues sur $[0,1]$ muni de la norme $\| \|_\infty$. **On se propose de montrer que l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables contient un G_δ dense dans E.**

Soit

$$A_n = \{f \in E \text{ telles que } \exists s \in [0,1]; \forall t \in [0,1], |f(t) - f(s)| \leq n|t - s|\}.$$

(1) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n$ est fermé dans E. On note $B_n = A_n^c$ son complémentaire dans E.

(2) Mettre en évidence des fonctions réelles affines par morceaux situées dans B_n (on pourra s'aider d'un graphe).

(3) Pour $b > 0$, soit $f_b, \forall t \in [0,1], f_b(t) = bt$.

On note $V_\varepsilon(f_b) = \{f \in E; \|f - f_b\|_\infty < \varepsilon\}$.

Montrer que pour $a > n$ et $\varepsilon \leq \frac{a}{4}$, on a $V_\varepsilon(f_{2a}) \subseteq B_n$.

(4) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n$ est dense dans E.

(5) Déduire de l'étude des A_n que l'ensemble (non-borélien) M des fonctions continues nulle part dérivables **contient** B, un G_δ dense dans E, et que toute fonction de E est somme de deux fonctions de B, a fortiori de deux fonctions de M.

(6) On cherche à construire *directement* une fonction continue nulle part dérivable.

Soit la fonction définie, pour $0 < a < 1$ et $b > 0$, par :

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \exp(ib^k t).$$

(i) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) On suppose de plus que b est un entier pair. On fixe le réel t.

Pour n entier ≥ 1, on pose $h_n = \pi b^{-n}$ et $\delta_n = \frac{F(t+h_n)-F(t)}{h_n}$.

Montrer que l'on a

$$\delta_n = -\frac{2}{\pi}a^n b^n + \sum_{k=0}^{n-1} a^k e^{ib^k t}\frac{(e^{ib^k h_n} - 1)}{h_n}.$$

(iii) On ajoute aux hypothèses précédentes la condition $ab > 1 + \frac{\pi}{2}$, et on pose $\delta = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{ab-1} > 0$.

Montrer que l'on a

$$|\delta_n| \geq \frac{2}{\pi}a^n b^n - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^k \geq \delta a^n b^n. \qquad (II.2)$$

(iv) En déduire que F n'est pas dérivable en t et qu'elle est donc partout non dérivable.

Exercice II.3

(1) Soit E un espace normé et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si l'intérieur de F est non-vide, alors $E = F$.

(2) Montrer qu'un espace de Banach de dimension infinie n'est pas de dimension algébrique dénombrable (utiliser le théorème de Baire P 2.12.)

Exercice II.4

(I) Soit E un espace normé et $T \in \mathcal{L}(E)$ (*cf.* D 1.3 et D 2.5).

(1) Montrer que $\ker(T^n)$ est fermé pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) Supposons que E est complet et que, pour tout $x \in E$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \ker(T^n)$. Montrer que T est nilpotent (c'est-à-dire qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $T^d = 0$).

(II) Soit $E = \mathbb{C}[X]$ l'espace des polynômes complexes et notons pour $P \in E$,

$$\|P\| = \sum_{n=0}^{\infty} \|P^{(n)}\|_\infty \qquad (II.3)$$

avec $\|P\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$ et $P^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de P. Vérifier que $\|P\|$ est bien une norme sur E.

Soit $T : E \to E$ défini par $T(P) = P'$, $P \in E$. Vérifier que $T \in \mathcal{L}(E)$.

(i) Montrer que pour tout $P \in E$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P \in \ker(T^n)$.

(ii) Montrer que T n'est pas nilpotent. Expliquer ce résultat (comparer à (I) (2)).

Exercice II.5

Soit $E = \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \in \ell^2; x_i = 0$ sauf pour un nombre fini de $i\}$.

Soit $F = \ell^2$, on note $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ un élément arbitraire de F (D 1.15).

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*, T_n : E \to F$ définie par

$$T_n((x_i)_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ nx_n & \text{si } i = n \end{cases}$$

On note $A = \{T_n, n \in \mathbb{N}^*\}, A_x = \{T_n x, T_n \in A\}$.

Montrer que pour chaque $x \in E$, A_x est borné dans F, mais que A n'est pas borné dans $\mathcal{L}(E, F)$.

Expliquer pourquoi le théorème de Banach-Steinhaus (P 2.13) ne s'applique pas.

Exercice II.6

Soient E, F, G trois espaces normés et U une application bilinéaire de $E \times F$, espace normé produit, dans G.

On note

$\forall x \in E, U_x : F \to G$, définie par $U_x(y) = U(x, y)$ et

$\forall y \in F, U_y : E \to G$, définie par $U_y(x) = U(x, y)$.

(1) On suppose que U est séparément continue, c'est-à-dire que $\forall x \in E$, U_x est continue et $\forall y \in F$, U_y est continue.

Montrer que si E ou F est un espace de Banach, U est continue de $E \times F$ dans G.

(2) Soit $E = F$ l'espace vectoriel ℓ^1 muni de la norme $\| \|_\infty$.

Soit U la forme bilinéaire sur $E \times F$ définie par $U(x, y) = \sum_{n\geq 0} x_n y_n$ où $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des éléments de ℓ^1.

(i) Montrer que U est bien définie et est séparément continue.

(ii) Montrer que U n'est pas continue sur $E \times F$. Expliquer le résultat.

(On peut utiliser les éléments $x^{(k)} \in \ell^1, k \in \mathbb{N}^*$ définis par $x^{(k)} = (x_n^{(k)}) : x_n^{(k)} = 1$ si $n \leq k$, 0 sinon.)

Exercice II.7

On se propose, pour $1 < p < \infty$, de trouver le dual de ℓ^p (*cf.* D 1.15).

Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$ soit convergente pour tout $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p, (1 < p < \infty)$.

(1) Pour N entier ≥ 0, calculer la norme de la forme linéaire $U_N : \ell^p \to \mathbb{C}$ définie par $U_N(y) = \sum_{n=0}^{N} x_n y_n, \forall y \in \ell^p$.

(Utiliser l'inégalité de Minkowski (P 1.4).)

(2) En déduire que $x \in \ell^q$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(Utiliser le théorème de Banach-Steinhaus (P 2.13).)

(3) U est définie sur ℓ^p par $U(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$. Trouver la limite de $\|U - U_N\|$ quand N tend vers l'infini.

(4) Identifier le dual de ℓ^p.

(5) Identifier le dual de ℓ^1.

(6) Identifier le dual de $c_0 = \{x = (x_n)_n;\ x_n \to 0\}$ avec $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n|$.

Exercice II.8

Soit $E = C^1([0,1])$ l'espace des fonctions définies sur $[0,1]$, à valeurs complexes, continûment dérivables, et $F = C([0,1])$ l'espace des fonctions continues définies sur $[0,1]$, à valeurs complexes, tous deux munis de la norme $\| \|_\infty$.

Soit $T : E \to F$ défini par $\forall f \in E, Tf = f'$.

On note $\mathcal{G}(T) = \{(f, Tf); f \in E\}$ le graphe de T.

(1) Montrer que $\mathcal{G}(T)$ est fermé dans $E \times F$.

(2) Montrer que T n'est pas continue

(on pourra utiliser la suite $f_n \in E, f_n(x) = x^n$).

(3) Expliquer le résultat.

Exercice II.9

Soit E, F deux espaces de Banach, et $G = l_\infty(F)$ l'espace vectoriel des suites bornées $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in F$, muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup(\|x_n\|_F; n \in \mathbb{N})$.

(1) Montrer que G est un espace de Banach.

(2) Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications linéaires continues de E dans F, telles que $\forall x \in E,\ \sup(\|T_n x\|_F); n \in \mathbb{N}) < \infty$.

On note U l'application de $E \to G$, définie par $U(x) = y$ où $y = (T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$.

Montrer que le graphe de U est fermé.

(3) En déduire que le théorème de Banach-Steinhaus (P 2.13), dans le cas où les deux espaces E et F sont des espaces de Banach, peut être établi comme conséquence du théorème du graphe fermé (P 2.17).

Exercice II.10

E est l'espace de Banach des fonctions réelles continues sur $[0,1] = I$ muni de la norme uniforme, et $\varphi : I \to I$ est une application continue. On désigne par $T \in \mathcal{L}(E)$ l'opérateur défini par $T(f) = f \circ \varphi$.

(1) Montrer l'équivalence :

$$T \text{ isométrie} \Longleftrightarrow \varphi : I \to I \text{ surjective.}$$

(2) Donner un exemple d'isométrie linéaire $T : E \to E$ non-surjective.

Exercice II.11

E, F sont deux espaces de Banach, et $A \in \mathcal{L}(E, F)$.

On note $M = \ker(A)$ et $H = \mathrm{Im}(A)$. $[x]$ est la classe de x, élément de E/M, $[A]$ est l'application de $E/M \to F$, définie par $[A][x] = Ax$.

(1) Montrer que $[A]$ est linéaire continue et que $\|[A]\| = \|A\|$.

(2) On suppose qu'il existe un sous-espace fermé $K \subseteq F$ tel que $K \cap H = \{0\}$ et $H + K$ est fermé dans F.

(i) Montrer que l'application $B : E/M \times K \to H + K$, définie par $B(([x], z)) = Ax + z$ est linéaire, bijective et continue.

(ii) En déduire que $\mathrm{Im}(A)$ est fermé dans F.

(3) On suppose que $\mathrm{Im}(A)$ est de codimension finie, montrer que $\mathrm{Im}(A)$ est fermé dans F.

(On montrera que si M est un sous-espace fermé d'un espace normé E tel que la dimension de E/M est finie, alors M admet un supplémentaire topologique dans E.)

Exercice II.12

$E = C([0, 1])$ est l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs complexes.

On considère les deux espaces normés $X = (E, \|\ \|_\infty)$ et $Y = (E, \|\ \|_1)$, où $\|f\|_\infty = \sup(|f(t)|\,;\, t \in [0, 1])$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

On désigne par I l'application identité de X dans Y.

(1) Montrer que I est bijective, continue. Quelle est sa norme ?

(2) Montrer que I^{-1} n'est pas continue (on pourra utiliser la suite $f_n(t) = t^n$).

(3) En déduire que Y n'est pas complet.

Exercice II.13

Soit $E = C([0, 1])$ et $\|\ \|$ une norme sur E, tels que $(E, \|\ \|)$ soit un espace de Banach. Supposons que « si $f_n, f \in E$, $\|f_n - f\| \to 0$, alors $f_n(t) \to f(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$ ».

Montrer que les deux normes $\|\ \|$ et $\|\ \|_\infty$ sont équivalentes.

Exercice II.14

Soit E un espace de Banach, M un sous-espace fermé de E.

On note $\forall x \in E$, $[x]$ sa classe dans E/M; $[I]$ est l'opération identité dans E/M (D 1.14).

(1) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(α) M admet un supplémentaire topologique dans E.

(β) L'application $\pi : E \to E/M$ définie par $\pi(x) = [x]$ admet un inverse à droite continu (c'est-à-dire, il existe $S \in \mathcal{L}(E/M, E)$ tel que $\pi S = [I]$).

(2) Montrer que si E/M est topologiquement isomorphe à ℓ^1, alors M admet un supplémentaire topologique (on pourra utiliser (1)).

2 Solutions

Exercice II.1

(1) (i) Soit (O_n) une suite d'ouverts de O denses dans O et A un ouvert non-vide de O. Les O_n et A sont aussi ouverts dans E puisque O est ouvert. On complète O_n en posant $\omega_n = O_n \cup \overline{O}^c$. C'est un ouvert dense de E, car

$$\overline{\omega_n} \supset \overline{O_n} \cup \overline{O}^c = \overline{O} \cup \overline{O}^c = E.$$

De plus, $A \subset O \implies O_n \cap A = \omega_n \cap A$ pour tout n. Puisque E est de Baire, $\bigcap \omega_n$ est dense dans E, donc $(\bigcap \omega_n) \cap A \neq \emptyset$, car A est ouvert non-vide de E. Autrement dit, $(\bigcap O_n) \cap A \neq \emptyset$, ce qui montre que $\bigcap O_n$ est dense dans O (rappelons qu'une partie est dense ssi elle coupe tout ouvert non-vide) et que O est un espace de Baire.

(ii) Si g est continue en x_0, soit $\varepsilon > 0$. Il existe $r > 0$ tel que $x \in \overline{B}(x_0, r) \implies |g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon$. Si donc x et $y \in \overline{B}(x_0, r)$, on a

$$|g(x) - g(y)| \leq |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0) - g(y)| \leq 2\varepsilon, \text{ par suite}$$

$$\omega_r(g, x_0) \leq 2\varepsilon \text{ et } \omega(g, x_0) \leq 2\varepsilon.$$

Puisque ε est arbitrairement petit, cela montre que $\omega(g, x_0) = 0$. La réciproque s'établit de même. Enfin, soit $\varepsilon > 0$. Puisque ω_r décroît avec r, on peut trouver $r > 0$ tel que

$$\omega_r(g_1, x_0) \leq \omega(g_1, x_0) + \varepsilon \text{ et } \omega_r(g_2, x_0) \leq \omega(g_2, x_0) + \varepsilon.$$

Or, $\omega_r(g_1 + g_2, x_0) \leq \omega_r(g_1, x_0) + \omega_r(g_2, x_0)$ par l'inégalité triangulaire, d'où :

$$\omega(g_1 + g_2, x_0) \leq \omega_r(g_1 + g_2, x_0) \leq \omega_r(g_1, x_0) + \omega_r(g_2, x_0)$$

$$\leq \omega(g_1, x_0) + \omega(g_2, x_0) + 2\varepsilon,$$

d'où le résultat demandé puisque ε est arbitrairement petit.

(iii) Soit $x_0 \in O_\varepsilon$. Il existe $r > 0$ tel que $\omega_r(g, x_0) < \varepsilon$. Si $d(x_1, x_0) \leq \frac{r}{2}$ et si $x, y \in \overline{B}(x_1, \frac{r}{2})$, on a $x, y \in \overline{B}(x_0, r)$, d'où $|g(x) - g(y)| \leq \omega_r(g, x_0)$ et par suite $\omega_{\frac{r}{2}}(g, x_1) \leq \omega_r(g, x_0)$, d'où finalement

$$\omega(g, x_1) \leq \omega_{\frac{r}{2}}(g, x_1) \leq \omega_r(g, x_0) < \varepsilon, \text{ soit } x_1 \in O_\varepsilon.$$

Ceci montre que O_ε est ouvert.

(iv) Posons $h = g/O$. On a toujours, par définition : $\omega(h, x_0) \leq \omega(g, x_0)$. Soit maintenant $r > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, r) \subset O$. Alors, si $0 < \rho \leq r$, on a

$$x, y \in \overline{B}(x_0, \rho) \implies |g(x) - g(y)| = |h(x) - h(y)| \leq \omega_\rho(h, x_0), \text{ donc}$$

$$\omega_\rho(g, x_0) \leq \omega_\rho(h, x_0) \text{ puis } \omega(g, x_0) \leq \omega(h, x_0),$$

ce qui donne le résultat.

(2) (i) Pour N et ε fixés, on peut écrire :

$$A_{N,\varepsilon} = \bigcap_{n,p\geq N} F_{n,p} \text{ avec } F_{n,p} = \{x; |f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon\}.$$

Chaque $F_{n,p}$ est fermé car la fonction $f_n - f_p$ est continue, et $A_{N,\varepsilon}$ est fermé comme intersection de fermés. Enfin, si $x \in E$, la suite de complexes $f_n(x)$ est de Cauchy car convergente, et on peut trouver N assez grand pour avoir

$$|f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon \text{ pour tous } p, q \geq N,$$

soit $x \in A_{N,\varepsilon}$, et par suite $E = \bigcup_{N=1}^{\infty} A_{N,\varepsilon}$.

(ii) Les $A_{N,\varepsilon}$, à ε fixé, forment une suite de fermés de E métrique complet, auquel on peut appliquer le théorème de Baire (P 2.12). Il existe donc bien un entier N tel que $A_{N,\varepsilon}$ soit d'intérieur non-vide.

(iii) On choisit donc N_ε tel que $\mathrm{int}(A_{N_\varepsilon,\varepsilon}) \supset V_\varepsilon$, où V_ε est une boule ouverte non-vide. Tous les points de V_ε vérifient $\forall n, p \geq N_\varepsilon, |f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon$. On fait tendre p vers $+\infty$ pour obtenir $(II.1)$.

(iv) Soit $x_0 \in V_\varepsilon$ et $r > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, r) \subset V_\varepsilon$. Posons $n = N_\varepsilon$. Par la sous-additivité de la question (1), nous avons

$$\omega(f, x_0) \leq \omega(f - f_n, x_0) + \omega(f_n, x_0) = \omega(f - f_n, x_0)$$

puisque f_n est continue en x_0, et que son oscillation en ce point est nulle. D'autre part, l'inégalité (II.1) de l'énoncé montre que

$$\omega(f - f_n, x_0) \leq \omega_r(f - f_n, x_0) \leq 2\varepsilon.$$

Tout ceci nous donne

$$\omega(f, x_0) \leq 2\varepsilon < 3\varepsilon \text{ et donc } x_0 \in O_{3\varepsilon}.$$

Ainsi, $O_{3\varepsilon} \neq \emptyset$ et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a aussi bien $O_\varepsilon \neq \emptyset$.

(3) Montrons d'abord l'auto-renforcement

$$O_\varepsilon \text{ est un ouvert dense dans } E.$$

En effet, O_ε est un ouvert non-vide d'après II.(1)(iii). Soit alors O un ouvert non-vide de E, ainsi que $h_n = f_n/O$ et $h = f/O$. Les fonctions (h_n) sont continues sur O, convergent simplement sur O vers h, et O est un espace de Baire comme on l'a vu dans (1)(i), donc la question précédente s'applique, et montre que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\Omega_\varepsilon = \{x_0 \in O; \omega(h, x_0) < \varepsilon\}$ est non-vide. Mais, puisque O est ouvert, on a d'après (1)(iv) : $\Omega_\varepsilon = O_\varepsilon \cap O$, et ainsi $O_\varepsilon \cap O \neq \emptyset$, ce qui montre que O_ε est un ouvert dense dans E. La fin est facile : la relation $C(f) = \bigcap_{p=1}^{\infty} O_{\frac{1}{p}}$ est une conséquence immédiate de la question (1)(ii) et montre bien que $C(f)$, i.e. l'ensemble des points de continuité de f, est un G_δ, dense d'après ce qui précède et d'après le théorème de Baire appliqué une nouvelle fois.

(4) (i) $E = \mathbb{R}$ avec sa métrique usuelle est un espace métrique complet. D'après (3), seules les fonctions continues sur un ensemble dense dans $\mathbb{R}$ peuvent être limites d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Il suffit donc de montrer que l'ensemble des points de continuité de $f = 1_{\mathbb{Q}}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{Q}$, d'intérieur vide dans $\mathbb{R}$, et V un voisinage de x. Il existe $y \in V$, $y \notin \mathbb{Q}$, pour lequel on a $|f(x) - f(y)| = 1$, ce qui montre que x n'est pas un point de continuité de f. On démontre de même que f est discontinue en $x \in \mathbb{Q}^c$. f n'admet aucun point de continuité, ce qui règle la question.

(ii) Par définition de la dérivée, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{g(x+n^{-1}) - g(x)}{n^{-1}} \overset{def}{=} \lim h_n(x).$$

h_n est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Le résultat de (4) est donc applicable. L'ensemble des points de discontinuité de g est un G_δ dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice II.2

(1) Il suffit de montrer que si une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A_n est convergente dans E vers une fonction f, alors $f \in A_n$. Pour chaque k, il existe $t_k \in [0, 1]$ tel que

$$|f_k(t) - f_k(t_k)| \leq n|t - t_k| \text{ pour tout } t \in [0, 1].$$

Modulo extraction, on peut supposer que $t_k \to s \in [0, 1]$ sans perte de généralité, puisque la suite bornée (t_k) contient une sous-suite convergente. Soit maintenant $t \in [0, 1]$ arbitraire. Nous avons l'inégalité :

$$\begin{aligned}|f(t) - f(t_k)| &\leq |f(t) - f_k(t)| + |f_k(t) - f_k(t_k)| + |f_k(t_k) - f(t_k)| \\ &\leq |f(t) - f_k(t) + n|t - t_k| + \|f_k - f\|_\infty.\end{aligned}$$

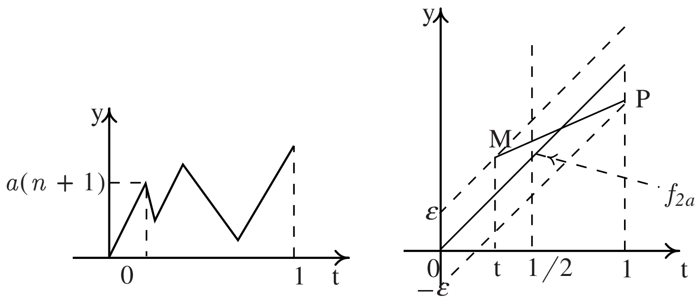
Le passage à la limite dans cette inégalité, quand $k \to \infty$, donne :

$$|f(t) - f(s)| \leq n|t - s| \text{ pour tout } t \in [0, 1],$$

ce qui montre bien que $f \in A_n$, et que A_n est fermé.

(2) Une fonction réelle dérivable à gauche ou à droite en tout point avec une valeur de dérivée (à gauche ou à droite) supérieure à n en valeur absolue est un élément de B_n.

Il y a dans B_n la fonction $f : \{t \mapsto at\}$ avec $a > n$ et toute fonction (continue réelle) dont le graphe est formé d'un nombre fini de segments de pente, en valeur absolue, supérieure à n comme sur le schéma (i) ci-dessous.



(i) (ii)

(3) Soit g vérifiant $\|g - f_{2a}\|_\infty < \varepsilon$; selon le schéma (ii), le graphe de g est dans la bande oblique pointillée.

Pour $t < \frac{1}{2}$ et $s = 1$, la pente la plus faible possible du segment joignant $(t, g(t))$ et $(1, g(1))$ est représentée par le segment $[M, P]$ sur le schéma (ii). Sa pente est $\frac{(2a-\varepsilon)-(2at+\varepsilon)}{1-t} = 2a - \frac{2\varepsilon}{1-t} > a$. Un schéma analogue est valable pour $t \geq \frac{1}{2}$ avec $s = 0$.
Il en résulte que $g \in B_n$ dès que $\varepsilon \leq \frac{a}{4}$.

(4) Soit f un élément arbitraire de E, on cherche à l'approcher à ε près par un élément $g \in B_n$ pour n fixé.

(i) **Découpage de [0, 1].** f est uniformément continue sur $[0, 1]$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe alors α tel que

$$|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (II.4)$$

On adapte à α un découpage régulier de $[0, 1]$ en p intervalles égaux en choisissant p entier tel que $p^{-1} < \alpha$ puis $x_k = \frac{k}{p}, k = 0, 1, \ldots, p$. Dans chaque intervalle $J_k = [x_k, x_{k+1}]$, la variation de f est contrôlée par $(II.4)$.

(ii) **Choix de *g*.** Soit m_k le milieu de J_k. On choisit la fonction g affine sur $L_k = [x_k, m_k]$ et sur $M_k = [m_k, x_{k+1}]$ (donc affine par morceaux), telle que

$$\forall k = 0, \ldots, p, g(x_k) = f(x_k); \forall k = 0, \ldots, p-1, g(m_k) = f(m_k) + \frac{2\varepsilon}{3} \qquad (II.5)$$

approchant f à ε près selon le schéma fait en (2). On sera ensuite amené à choisir p assez grand pour que $g \in B_n$.

(iii) ***g* approche *f*.** Pour $x \in L_k$, notons $x = \theta m_k + (1-\theta)x_k, \theta \in [0, 1]$. Comme g est affine sur L_k, on a d'après $(II.5)$:

$$g(x) = \theta g(m_k) + (1-\theta)g(x_k)$$

$$\text{donc } g(x) - f(x) = \theta[g(m_k) - f(x)] + (1-\theta)[g(x_k) - f(x)] =$$

$$\theta[f(m_k) - f(x)] + (1-\theta)[f(x_k) - f(x)] + \theta\frac{2\varepsilon}{3}.$$

Puis en utilisant (II.4),

$$|g(x) - f(x)| \leq \theta\frac{\varepsilon}{3} + (1-\theta)\frac{\varepsilon}{3} + \theta\frac{2\varepsilon}{3} \leq \varepsilon.$$

On agirait de même dans un intervalle M_k. La fonction g approche donc f à ε près au sens de la distance dans E.

(iv) **Placer $\boldsymbol{g}$ dans $\boldsymbol{B_n}$.** Le résultat précédent est indépendant du choix de p pourvu que l'inégalité $p > \alpha^{-1}$ soit respectée. On peut donc augmenter p si nécessaire pour « faire rentrer » g dans un B_n donné.

On étudie le quotient $\frac{|g(t)-g(s)|}{|t-s|}$. Soit $s \in L_k$, on choisit aussi $t \neq s$ dans L_k, alors le quotient est constant sur L_k, et vaut

$$\left|\frac{g(m_k) - g(x_k}{m_k - x_k}\right| = \left|\frac{f(m_k) - f(x_k) + \frac{2\varepsilon}{3}}{1/2p}\right| > 2p\left(\frac{2\varepsilon}{3} - |f(m_k) - f(x_k)|\right) \geq \frac{2p\varepsilon}{3}$$

par application de (II.4). On obtiendrait le même minorant dans M_k.

Pour n donné, il suffit alors de choisir p tel que $\frac{2p\varepsilon}{3} > n$ pour assurer l'appartenance de g à B_n, et par suite la densité de B_n dans E.

(5) Chaque B_n est ouvert dense dans E d'après (4) et (1). E étant complet, le théorème de Baire (P 2.13) montre que $B \overset{def}{=} \bigcap\{B_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ est un G_δ dense dans E.

Pour répondre à la question, il suffit de prouver que chaque élément de B est une fonction nulle part dérivable. Soit $f \in E$ dérivable en un point $s \in [0,1]$. Alors, la fonction g définie sur $[0,1]$ par

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(t)-f(s)}{t-s} & \text{si } t \neq s \\ f'(s) & \text{si } t = s \end{cases}$$

est continue sur $[0,1]$, donc bornée en module par un entier n assez grand. Et, pour ce n, on a par définition $f \in A_n$, i.e. $f \notin B$, ce qui montre le résultat souhaité par contraposition. Soit enfin $f \in E$. Montrer que $f \in B+B$, c'est montrer que $B \cap (f-B) \neq \emptyset$. Or, on a vu que B était un G_δ dense, il en est donc trivialement de même pour $f - B$. Et puisque E métrique complet est un espace de Baire, l'intersection des deux G_δ denses B et $f - B$ est encore un G_δ dense, et a fortiori est non-vide, CQFD.

On voit ici tout l'intérêt de l'information supplémentaire « contient un G_δ dense » par rapport à la simple information « dense », qui est d'ailleurs une conséquence directe du fait que $M \neq \emptyset$ et du théorème de Weierstrass. En effet, si $f \in E$ et $h \in M$, on peut approcher f par un polynôme P, puis P par $P + \varepsilon h$, et donc f par $P + \varepsilon h \in M$.

Remarque : Une solution alternative pour montrer l'implication $f \in E \Longrightarrow f \in M + M$ serait d'utiliser, au lieu d'un argument topologique (théorème de Baire) un argument de théorie de la mesure. Posons

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2^k \pi t}{k^2} \text{ et } h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2^k \pi t}{k^2}.$$

Alors, on peut montrer que, avec les notations précédentes :

$$\forall f \in C[0,1] = E, f + ag + bh \in B \text{ pour presque tout } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Soit alors $f \in E$ quelconque. En écrivant

$$f = (f + ag + bh) + (-ag - bh) \stackrel{def}{=} \varphi + \psi,$$

on obtient la décomposition souhaitée de f comme somme de deux fonctions de B, a fortiori de deux fonctions de M, pour au moins un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Une solution probabiliste pourrait aussi être donnée, qui utilise la « prévalence » de la propriété : *La trajectoire du mouvement brownien est partout non-dérivable.* Nous renvoyons aux références sur cet exercice.

(6) (i) La condition $0 < a < 1$ entraîne la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série donnant F. Comme chaque terme de la série est une fonction continue, la somme est continue.

(ii) On a par définition

$$\delta_n = \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{ib^k t} \frac{(e^{ib^k h_n} - 1)}{h_n}.$$

Mais on observe que, b étant pair, on a

$$k > n \Longrightarrow e^{ib^k h_n} = e^{i\pi b^{k-n}} = 1; \text{ et } k = n \Longrightarrow e^{ib^k h_n} = e^{i\pi} = -1$$

$$\Longrightarrow e^{ib^n t} \frac{(e^{ib^n h_n} - 1)}{h_n} = -\frac{2b^n}{\pi} e^{ib^n t}.$$

D'où la relation demandée.

(iii) On a $|e^{ib^k h_n} - 1| \leq b^k h_n$. La question précédente et l'inégalité triangulaire donnent donc, puisque $|e^{ib^k t}| = 1$:

$$|\delta_n| \geq \frac{2}{\pi} a^n b^n - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^k = \frac{2}{\pi} a^n b^n - \frac{a^n b^n - 1}{ab - 1} \geq \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{ab - 1}\right) a^n b^n.$$

(iv) Le taux d'accroissement δ_n est non-borné, a fortiori n'a pas de limite, quand $n \to \infty$. La fonction F n'est donc pas dérivable en t.

Remarque : Pour les lecteurs très courageux, voici une preuve par l'absurde du fait que $g(t) = \Im F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \sin(b^k t)$ est également partout non-dérivable, il en serait de même pour la fonction $\Re F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k t)$. La preuve est basée sur le même principe, mais elle est techniquement plus difficile, et il faut envisager *deux* accroissements $h_n = \pi b^{-n}$ et $H_n = 2h_n$; supposons g dérivable en t et considérons les *deux* taux d'accroissement :

$$\delta_n = \frac{g(t + h_n) - g(t)}{h_n} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^k \frac{\sin(b^k t + b^k h_n) - \sin(b^k t)}{b^k h_n} - 2\frac{a^n b^n}{\pi} \sin(b^n t)$$

$$\text{et } \Delta_n = \frac{g(t+H_n)-g(t)}{H_n} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^k \frac{\sin(b^k t + b^k H_n) - \sin(b^k t)}{b^k H_n}.$$

En utilisant l'inégalité élémentaire $|\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} - \cos x| \leq \frac{h}{2}$, on voit qu'on a :

$$\delta_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^k \cos(b^k t) - 2\frac{a^n b^n}{\pi}\sin(b^n t) + e_n \text{ et } \Delta_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^k \cos(b^k t) + E_n$$

avec, en posant $r = \frac{\pi}{ab^2-1}$:

$$|e_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{2k}\frac{h_n}{2} \leq \frac{r}{2}a^n b^n \text{ et } |E_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{2k}\frac{H_n}{2} \leq r a^n b^n.$$

Ensuite, puisque δ_n et Δ_n sont bornées, les relations

$$a^n b^n \cos b^n t = \Delta_{n+1} - \Delta_n + E_n - E_{n+1},\, a^n b^n \sin b^n t = \frac{\pi}{2}(\Delta_n - \delta_n + e_n - E_n)$$

montrent que, après simplification par $a^n b^n$ (avec $ab > 1$), il vient

$$|\cos b^n t| \leq (1+ab)r + \varepsilon_n \text{ et } |\sin b^n t| \leq \frac{3\pi}{4}r + \varepsilon'_n$$

où $\varepsilon_n \to 0$ et $\varepsilon'_n \to 0$. Utilisant l'identité $\cos^2 b^n t + \sin^2 b^n t = 1$ qui remplace $|e^{ib^n t}| = 1$, on a $1 \leq (1+ab)^2 r^2 + \frac{9\pi^2}{16} r^2 < 10(ab)^2 r^2 < 100\frac{(ab)^2}{(ab^2-ab)^2} = \frac{100}{(b-1)^2}$. Si donc cette condition est en défaut (par exemple dès que $ab > 1$ et $b \geq 12$), g sera partout non-dérivable. Des preuves moins directes montrent que g est partout non-dérivable dès que $ab \geq 1$.

N.B. L'exemple de fonction continue et nulle part dérivable donné en (7) est noté dans [V], § 77, p. 160.

C'est un exemple donné initialement par WEIERSTRASS (né en 1815).

Exercice II.3

(1) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Supposons $\operatorname{int}(F) \neq \emptyset$, soit $y \in F$ et $r > 0$ tels que $B(y,r) = \{z \in E; \|y-z\| < r\} \subseteq F$ (*cf.* D 1.4).

Comme F est un espace vectoriel, $[y \in F, z \in F] \Rightarrow [y - z \in F]$. La boule ouverte $B(0,r)$ est donc dans F. Soit $x \in E, x \neq 0$, alors $\frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|} \in B(0,r) \subseteq F$ donc $x \in F$. Ceci signifie que $F = E$.

(2) Supposons que E admet une base algébrique dénombrable $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Notons, pour $p \in \mathbb{N}^*, E_p =$ Vect$\{e_n; n = 1,\ldots,p\}$. Par hypothèse, $E = \bigcup(E_p; p \in \mathbb{N}^*)$. Comme E_p est de dimension finie, donc fermé dans E, par le théorème de Baire il existe p_0 tel que int $(E_{p_0}) \neq \emptyset$. Par (1), $E = E_{p_0}$ et donc la dimension de E est finie. Cette contradiction montre que E ne peut pas être complet.

Exercice II.4

(I) (1) Pour montrer que $\ker(T^n)$ est fermé, il suffit de remarquer que $\ker(T^n) = (T^n)^{-1}(\{0\})$, que T^n est continu et que l'ensemble $\{0\}$ est fermé dans E.

(2) (i) Par hypothèse on a $E = \bigcup_{n\geq 0} \ker(T^n)$. D'après le théorème de Baire (P 2.12), il existe un d pour lequel l'intérieur de $\ker(T^d)$ est non-vide. D'après le résultat de l'Ex. II.3 (1), il existe donc d tel que $\ker(T^d) = E$, c'est-à-dire $T^d = 0$.

(II) Puisque pour tout $P \in E$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P^{(n)} = 0$, la somme $\Sigma_{n\geq 0}\|P^{(n)}\|_\infty$ est une somme finie et donc $\|P\| \in \mathbb{R}^+$. Les autres axiomes de norme se vérifient facilement du fait que $\|P\|_\infty$ est une norme.

Clairement, $\|T(P)\| = \|P'\| = \Sigma_{n\geq 0}\|P^{(n+1)}\|_\infty = \Sigma_{n\geq 1}\|P^{(n)}\|_\infty \leq \|P\|$. Donc, $\|T(P)\| \leq \|P\|$, ce qui montre la continuité de T.

(i) Remarquons que si le degré de P est k, alors $0 = P^{(k+1)} = T^{k+1}(P)$. Par conséquent pour tout $P \in E$, il existe n tel que $P \in \ker(T^n)$, ce qui implique $E = \bigcup_{n\geq 0} \ker(T^n)$.

(ii) Soit $d \in \mathbb{N}$ un entier arbitraire. Soit P un polynôme de degré d, alors $0 \neq P^{(d)} = T^d(P)$, et $T^d \neq 0$. Ceci montre que T ne peut pas être nilpotent.

Explication. Le théorème de Baire (P 2.12) n'est pas applicable, il en résulte que E n'est pas complet.

Exercice II.5

En utilisant la définition de T_n, il est facile de voir que $T_n x \to 0$ pour tout $x \in E$. Ceci montre que l'ensemble A_x est borné pour tout $x \in E$.

Montrons que $\|T_n\| = n$. En effet, clairement $\|T_n\| \leq n$. D'autre part, soit e_n le vecteur de E dont seule la n-ième composante est non nulle et vaut 1. $\|e_n\| = 1$ et $\|T_n e_n\| = n$ donc $\|T_n\| \geq n$ et $\|T_n\| = n$. Ceci montre que l'ensemble A n'est pas borné.

Explication. Le théorème de Banach-Steinhaus (P 2.13) exprime que A est borné si chaque A_x est borné dès que E est un espace de Banach. On n'a pas ici les conclusions de ce théorème ; il en résulte que E n'est pas un espace de Banach.

Exercice II.6

(1) Supposons que E est Banach et F est normé et soit (x_n, y_n) une suite *arbitraire* de $E \times F$ convergente vers $(0, 0)$.

Considérons la suite U_n, définie par $U_n(x) = U(x, y_n)$, $x \in E$. Nous avons $U_n \in \mathcal{L}(E, G)$ car l'application $x \mapsto U(x, y_n)$ est continue.

Puisque l'application $y \mapsto U(x, y)$ est continue, $U_n(x) \to 0$ pour tout $x \in E$.

Or, dans l'espace normé G, toute suite convergente est bornée. Donc pour tout $x \in E$, $\sup_n \|U_n(x)\| < \infty$.

Par le théorème de Banach-Seinhaus (E étant complet), on a $\sup_n \|U_n\| < \infty$.

Donc, il existe $C > 0$ tel que $\|U_n(x)\| \leq C\|x\|$ pour tout $x \in E$ et pour tout $n \geq 0$. D'où

$$\|U(x_n, y_n)\| = \|U_n(x_n)\| \leq C\|x_n\| \to 0.$$

Ceci montre la continuité de U en $(0, 0)$ et comme U est bilinéaire, on a la continuité de U dans $E \times F$.

Dans le cas où E est normé et F est Banach, on utilise le même raisonnement que plus haut pour conclure.

(2) (i) ***U* séparément continue :** $\ell^1 \subset \ell^\infty$ car

$$(x_n)_n \in \ell^1 \iff \sum_{n\geq 0} |x_n| < \infty,$$

ce qui implique que $x_n \to 0$ et que $(x_n)_n$ est bornée.

Soit $x = (x_n)_n$ et $y = (y_n)_n$ dans ℓ^1. Alors

$$|x_n y_n| \leq \|x\|_\infty |y_n| \quad \text{et} \quad |x_n y_n| \leq \|y\|_\infty |x_n|.$$

D'où pour tout $x, y \in \ell^1$,

$$|U(x, y)| \leq \sum_n |x_n y_n| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1 \quad \text{et} \quad |U(x, y)| \leq \sum_n |x_n y_n| \leq \|y\|_\infty \|x\|_1.$$

Tout ceci montre que U est séparément continue de $\ell^1 \times \ell^1$ dans $\mathbb{C}$.

(ii) **Non-continuité de *U* :** Soit la suite $(x, x) = (x^{(k)}, x^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}^*$, proposée dans l'énoncé ($x^{(k)} = (x_n^{(k)}) : x_n^{(k)} = 1$ si $n \leq k$, 0 sinon.). Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $\|(x^{(k)}\|_\infty = 1$ et $U(x, x) = \sum_n (x_n^{(k)})^2 = \sum_{n=1}^k 1 = k$. U transforme donc des suites bornées en des suites non bornées, et elle n'est pas continue.

(b) **Explication.** On ne peut pas appliquer le résultat de (1) car ℓ^1 n'est pas complet pour la norme $\| \,.\, \|_\infty$. Autrement dit, ℓ^1 n'est pas fermé dans ℓ^∞.

Exercice II.7

(1) $U_N(y) = \sum_{n=1}^N x_n y_n$ est une somme finie à laquelle on peut appliquer l'inégalité de Hölder (P 1.5). q est associé à p par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors

$$|U_N(y)| \leq \left(\sum_{j=1}^N |x_j|^q\right)^{1/q} \left(\sum_{j=1}^N |y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^N |x_j|^q\right)^{1/q} \|y\|_p \overset{def}{=} \rho_N \|y\|_p.$$

Ceci établit la continuité de U_N et l'inégalité $\|U_N\| \leq \rho_N$.

On choisit $y = (y_n)_n$ de sorte que $x_n y_n = |x_n|^q$ pour $n \leq N$ et $y_n = 0$ pour $n > N$. Alors $|U_N(y)| = \sum_{n=1}^N |x_n|^q = \rho_N^q$ et

$$\|y\|_p = \left(\sum_{n=1}^N |y_n|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^N |x_n|^{p(q-1)}\right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^N |x_n|^q\right)^{1/p} = (\rho_N)^{\frac{q}{p}}.$$

Il en résulte que

$$\rho_N^q = |U_N(y)| \leq \|U_N\| \|y\|_p = \|U_N\|(\rho_N)^{\frac{q}{p}},\ \text{d'où}\ \|U_N\| \geq (\rho_N)^{q-\frac{q}{p}} = \rho_N,$$

ce qui montre que $\|U_N\| = \rho_N = (\sum_{n=1}^{N} |x_n|^q)^{1/q}$.

(2) Comme la suite $x = (x_n)_n$ vérifie
$\forall y = (y_n)_n \in \ell^p,\ \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n y_n| = M_y < +\infty$, on a

$$\forall y \in \ell^p,\ \forall N \in \mathbb{N},\ |U_N(y)| \leq M_y \text{ et donc } \sup_N |U_N(y)| \leq M_y.$$

Par le théorème de Banach-Steinhaus (P 2.13), $\sup_N \|U_N\| < \infty$, ce qui implique $(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q)^{1/q} < \infty$ et donc $x \in \ell^q$.

(3) Nous avons

$$|(U - U_N)(y)| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} x_n y_n \right|$$
$$\leq \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |y_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^q \right)^{1/q} \|y\|_p.$$

D'où $\|U - U_N\| \leq (\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^q)^{1/q} \to 0$, comme reste d'une série convergente. De plus, $\|U\| = \|(x_n)_n\|_q$.

(4) Soit $f \in (\ell^p)^*$ une forme linéaire continue, et $(e_n)_n$ la « base canonique » de ℓ^p. Alors pour $x = (x_n)_n \in \ell^p$, on a $x = \sum_n x_n e_n$ et donc $f(x) = \sum_n x_n f(e_n)$. Posons $f_n = f(e_n)$. La suite $\varphi = (f_n)_n$ vérifie

$$\forall (x_n)_n \in \ell^p,\ \sum_n |x_n f_n| < \infty.$$

D'après (2), $\varphi \in \ell^q$. Et d'après (3) $\|f\| = \|(f_n)_n\|_q = \|\varphi\|_q$.
Soit $\phi : (\ell^p)^* \to \ell^q$ définie par $\phi(f) = (f_n)_n = \varphi$. L'application ϕ est linéaire et on a

$$\|\phi(f)\|_q = \|(f_n)_n\|_q = \|f\|.$$

Il en résulte que ϕ est une isométrie, en particulier qu'elle est continue et injective. Pour la surjectivité, soit $y = (y_n)_n \in \ell^q$. On pose

$$f(x) = \sum_n x_n y_n,\ x = (x_n)_n \in \ell^p.$$

Alors f est bien définie, linéaire, continue et on a $f_n = f(e_n) = y_n$ d'où $\phi(f) = (y_n)_n = y$.
Finalement, $(\ell^p)^*$ est isométriquement isomorphe à ℓ^q.

Remarque : Par abus de langage, on note $(\ell^p)^* = \ell^q$. En permutant p et q (ce qui préserve la double inégalité $1 < p < \infty$), on a $(\ell^q)^* = \ell^p$.

D'où : $1 < p < \infty \Longrightarrow (\ell^p)^{**} = (\ell^q)^* = \ell^p$. On dit alors que ℓ^p est réflexif.

(5) Soit $f \in (\ell^1)^*$ et $f_n = f(e_n)$ où $(e_n)_n$ la base canonique de ℓ^1. Pour tout entier $n \geq 1$, on a : $|f_n| \leq \|f\|\|e_n\|_1 = \|f\|$.

D'où $(f_n)_n \in \ell^\infty$ et $\|(f_n)_n\|_\infty \leq \|f\|$. Et si $x = (x_n)_n \in \ell^1$ est arbitraire, $f(x) = f(\sum_n x_n e_n) = \sum_n x_n f(e_n) = \sum_n x_n f_n$.

Par suite, $|f(x)| \leq \|(f_n)_n\|_\infty \|x\|_1$ et $\|f\| \leq \|(f_n)_n\|_\infty$.

Donc, $\|f\| = \|(f_n)_n\|_\infty$.

L'application $\phi : (\ell^1)^* \to \ell^\infty$ définie par $\phi(f) = (f_n)_n$ est bien définie, linéaire et $\|\phi(f)\|_\infty = \|(f_n)_n\|_\infty = \|f\|$. Donc ϕ est une isométrie, a fortiori elle est continue et injective. Soit maintenant $y = (y_n)_n \in \ell^\infty$.

On définit f par $f(x) = \sum_n x_n y_n,\ x = (x_n)_n \in \ell^1$.

Alors, f est linéaire et aussi continue, car on a $|f(x)| \leq \sum_n |y_n||x_n| \leq \|y\|_\infty \|x\|_1$.

Ainsi, $f \in (\ell^1)^*$ et $\phi(f) = y$, ce qui montre que ϕ est surjective. Finalement on a montré que $(\ell^1)^*$ est isométriquement isomorphe à ℓ^∞, ce qu'on écrit : $(\ell^1)^* = \ell^\infty$.

(6) Considérons l'espace $c_0 = \{(x_n)_n \in \ell^\infty;\ x_n \to 0\}$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$ et soit $f \in (c_0)^*$. Posons $f_n = f(e_n)$ où $(e_n)_n$ la « base » canonique de c_0. On définit l'éléments $x^{(N)}$ de c_0 par :

$$x_n^{(N)} = \begin{cases} \frac{\overline{f(e_n)}}{|f(e_n)|} & \text{si } n \leq N \text{ et } f(e_n) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} |f(e_n)| = \sum_{n=1}^{N} f(e_n)\left[\frac{\overline{f(e_n)}}{|f(e_n)|}\right] &= f\left(\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{\overline{f(e_n)}}{|f(e_n)|}\right]e_n\right) \\ &= f(x^{(N)}) \leq \|f\|\|x^{(N)}\|_\infty = \|f\|.\end{aligned}$$

D'où $(f_n)_n \in \ell^1$ et $\|(f_n)_n\|_1 \leq \|f\|$.

Pour $x = (x_n)_n \in c_0,\ f(x) = f(\sum_n x_n e_n) = \sum_n x_n f(e_n) = \sum_n x_n f_n$.

Alors $|f(x)| \leq \|x\|_\infty \|(f_n)_n\|_1$ et donc $\|f\| \leq \|(f_n)_n\|_1$, finalement $\|f\| = \|(f_n)_n\|_1$.

L'application $\phi : (c_0)^* \to \ell^1, f \mapsto \phi(f) = (f_n)_n$ est bien définie, linéaire et $\|\phi(f)\|_1 = \|(f_n)_n\|_1 = \|f\|$. C'est donc une isométrie, a fortiori elle est continue et injective. Soit maintenant $y = (y_n)_n \in \ell^1$. On définit

$$f : \ell^1 \to \mathbb{C} \text{ par } f(x) = \sum_n x_n y_n,\ x = (x_n)_n \in c_0.$$

Alors, f est linéaire et continue, car on a $|f(x)| \leq \sum_n |y_n||x_n| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1$.

Ainsi, $f \in (c_0)^*$ et $\phi(f) = y$, ce qui montre que ϕ est surjective.

Finalement on a montré que $(c_0)^*$ est isométriquement isomorphe à ℓ^1, ce qu'on écrit : $(c_0)^* = \ell^1$.

Remarques : (a) On a $\ell^1 \subseteq c_0 \subseteq \ell^\infty$, $(\ell^1)^* = \ell^\infty$ et $(c_0)^* = \ell^1$.

(b) $\ell^1 \subset (\ell^\infty)^*$ mais $(\ell^\infty)^* \neq \ell^1$ (*cf.* Ch. III, Ex. III.2).

(c) c_0 et ℓ^1 sont séparables (i.e. contiennent une partie dénombrable dense), mais ℓ^∞ ne l'est pas.

Exercice II.8

(1) Soit $(f_n, Tf_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G}(T)$ une suite convergente vers (f, g) dans $E \times F$. Alors $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n' = g$. Comme les deux convergences sont uniformes, $g = f'$ et donc $(f, g) = (f, Tf) \in \mathcal{G}(T)$. Ce qui montre que $\mathcal{G}(T)$ est fermé.

(2) Pour la suite (f_n) proposée, on a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n'\|_\infty = n$. Si T est continue, selon (P 2.6), on a $\|T\| \geq \frac{\|f_n'\|_\infty}{\|f_n\|_\infty} = n$. Ceci montre que $\|T\|$ ne peut pas avoir une valeur finie donc que l'application T n'est pas continue.

(3) Le graphe de T est fermé et T n'est pas continue. Le théorème du graphe fermé (P 2.18) est donc en défaut. Puisque on sait que F est complet pour la norme $\|\ \|_\infty$, on conclut que E n'est pas complet pour cette norme.

Exercice II.9

(1) Soit $(x^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de G, avec pour chaque entier p : $x^p = (x_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$ et N entier tel que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p, q \geq N \Longrightarrow \|x^{(p)} - x^{(q)}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n^{(p)} - x_n^{(q)}\| \leq \varepsilon.$$

Chaque suite $(x_n^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ de F est alors de Cauchy dans F, puisque ε est arbitraire. Comme F est complet, elle converge dans F vers un élément $x_n \in F$. On note $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour n fixé, le passage à la limite dans l'inégalité $\|x_n^{(p)} - x_n^{(q)}\| \leq \varepsilon$ quand $q \to \infty$, avec $p \geq N$ fixé, donne

$$p \geq N \Longrightarrow \|x_n^{(p)} - x_n\| \leq \varepsilon. \qquad (*)$$

Cela montre que $x^p - x \in G$ qui est un espace vectoriel, et que donc $x \in G$. L'inégalité $(*)$ s'interprète alors par

$$p \geq N \Longrightarrow \|x - x^{(p)}\| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre bien que G est complet.

(2) Soit $X_p = (x_p, Ux_p) = (x_p, (T_n(x_p)_n)$ une suite de $\mathcal{G}(U)$ convergente dans $E \times G$ vers $X = (x, (y_n)_n)$.

Par définition de la norme dans $E \times G$, selon (D 1.12), on a

$$\|X_p - X\| = \|x_p - x\| + \sup_n \|T_n(x_p) - y_n\|,$$

d'où $x = \lim_{p\to+\infty} x_p$ et $y_n = \lim_{p\to+\infty} T_n(x_p)$. Puisque T_n est continue, $T_n(x) = \lim_{p\to+\infty} T_n(x_p)$. Par unicité de la limite, on a $y_n = T_n(x)$. Ceci montre que $X = (x, (y_n)_n) \in \mathcal{G}(U)$ et par suite que le graphe de U est fermé.

(ii) U est linéaire et définie entre espaces de Banach, son graphe est fermé. D'après le théorème du graphe fermé (P 2.17), U est continue.

(3) Puisque U est linéaire continue, on peut affirmer que :

$$\exists C > 0; \forall x \in E,\ \|U(x)\|_G \leq C\|x\|_E$$

Autrement dit :

$$\exists C > 0; \forall x \in E,\ \sup_n \|T_n(x)\|_F \leq C\|x\|_E;$$

ou encore

$$\exists C > 0; \forall x \in E,\ \forall n \geq 1,\ \|T_n(x)\|_F \leq C\|x\|_E.$$

Donc finalement,

$$\sup_n \|T_n\| \leq C,$$

et on retrouve la conclusion du théorème de Banach-Steinhaus (P 2.13).

Exercice II.10

(1) Soit $f \in E$. Nous avons par définition

$$\|Tf\| = \|f \circ \varphi\| = \sup_{x\in I} |f(\varphi(x))| = \sup_{y\in\varphi(I)} |f(y)|. \qquad (*)$$

Si donc $\varphi(I) = I$, le membre de droite de $(*)$ vaut $\|f\|$ et T est une isométrie. Et si $\varphi(I) = K \neq I$, comme K est compact donc fermé, il existe un intervalle $J \subset I$ non-réduit à un point tel que $J \cap K = \emptyset$. Soit $f \in E$ une fonction non-nulle à support dans J, par exemple une fonction triangle, si bien que f est nulle sur K et que le membre de droite de $(*)$ est nul. Dans ce cas, T n'est même pas injective ! A fortiori, ce n'est pas une isométrie.

(2) Prenons $\varphi : I \to I$ définie par $\varphi(x) = 4x(1-x)$. Cette application est surjective, donc T ci-dessus est une isométrie. Mais les fonctions $g \in \text{Im}(T)$ doivent vérifier la condition de symétrie $g(x) = g(1-x)$ que ne possèdent pas toutes les fonctions de E, et T n'est pas un opérateur surjectif.

Exercice II.11

A est continue, donc $\ker A$ est un sous-espace fermé de E ; ainsi la définition (D 1.14) de l'espace-quotient est valable.

(1) On sait, par (P 2.9), que si E est un espace de Banach et M un sous-espace fermé de E, alors E/M muni de la norme $\|[x]\| = \inf(\|y\|; y \in [x])$ est un espace de Banach.

$[A]$ est bien définie, en effet si $[x] = [y]$ alors $x - y \in \ker(A)$ et donc $Ax = Ay$. La linéarité de $[A]$ est facile à vérifier. $[A]$ est continue, en effet $\forall y \in [x]$, $[A][x] = Ay$ et donc

$$\|[A][x]\| = \|Ay\| \leq \|A\| \inf(\|y\|; y \in [x]) = \|A\| \, \|[x]\|.$$

$\|[A]\| = \|A\|$. Par (iii), on sait que $\|[A]\| \leq \|A\|$.

Pour obtenir l'égalité on utilise la surjection canonique $\pi : E \to E/M$. On a $A = [A].\pi$ et $\|\pi(x)\| = \|[x]\| \leq \|x\|$. Donc $\|\pi\| \leq 1$ et $\|A\| = \|[A]\pi\| \leq \|[A]\|$.

D'où $\|[A]\| = \|A\|$.

(2) (i) Il est facile de vérifier que B est linéaire et bijective.

De plus,

$$\|Ax + z\| \leq \|[A]\| \, \|[x]\| + \|z\| \leq \|[A]\| \max(\|[x]\|, \|z\|) + \max(\|[x]\|, \|z\|),$$

d'où $\|B(([x], z))\| \leq (1 + \|A\|)\|([x], z)\|$. Ceci exprime la continuité de B.

(ii) D'après (i), B est une bijection linéaire continue entre espaces de Banach ; le théorème d'isomorphisme de Banach (P 2.16) montre que son inverse est continue. Donc B transforme un ensemble fermé en un ensemble fermé. Or, $\mathrm{Im}(A) = B(E/M \times \{0\})$. Puisque $E/M \times \{0\}$ est fermé dans $E/M \times K$, $\mathrm{Im}(A)$ est fermé dans $H + K$. Comme $H + K$ est fermé dans F, $\mathrm{Im}(A)$ est fermé dans F.

(3) (i) Montrons d'abord que si M est un sous-espace fermé d'un espace normé E de codimension finie, alors M admet un supplémentaire topologique dans E.

Soit $\{[x_1], [x_2], \ldots, [x_n]\}$ une base de E/M. Soit $x_i \in [x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, alors la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est libre dans E. En effet si $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$ alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i [x_i] = 0$ et donc $\lambda_i = 0$. Soit N le sous-espace engendré par $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Alors la dimension de N est égale à n et si $x \in M \cap N$ alors $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ et $[x] = \sum_{i=1}^n \lambda_i [x_i] = 0$. D'où $\lambda_i = 0$ et donc $x = 0$.

Montrons que $M + N = E$. Soit $x \in E$. Alors $[x] = \sum_{i=1}^n \lambda_i [x_i]$ et donc $[x - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i] = 0$. Il en résulte que $z = x - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in M$ et enfin que $x = z + \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in M + N$.

(ii) Puisque la codimension de $\mathrm{Im}(A)$ est finie, il existe un sous-espace K de F, de dimension finie, donc fermé, tel que $\mathrm{Im}(A) \oplus K = F$. Alors on peut appliquer (2) (ii) et par suite $\mathrm{Im}(A)$ est fermée dans F.

Exercice II.12

(1) Il est clair que I est linéaire et bijective. De plus

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt \leq \sup\{|f(t)|; t \in [0, 1]\} = \|f\|_\infty.$$

Donc I est continue et $\|I\| \leq 1$.

Pour f_0 définie par $\forall t$, $f_0(t) = 1$, on a $\|f_0\|_1 = \|f_0\|_\infty = 1$. Ceci prouve que $\|I\| = 1$.

(2) La non-continuité de $I^{-1} : (E, \| \|_1) \to (E, \| \|_\infty)$. Si I^{-1} était continue, il existerait $C > 0$ tel que

$$\forall f \in E, \|f\|_\infty = \|I^{-1}(f)\|_\infty \leq C\|f\|_1.$$

Soit alors (f_n) la suite de fonctions de E définie par $f_n(t) = t^n$. On a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$. D'où $1 \leq C\frac{1}{n+1}$ et donc $C \geq n + 1$ pour tout n, ce qui est impossible. Cette contradiction montre que I^{-1} n'est pas continue.

(3) On sait que X est un espace complet ; si Y était complet aussi, on pourrait appliquer le théorème d'isomorphisme de Banach (P 2.16). Par conséquent, Y n'est pas complet.

Exercice II.13

Soit $I : E_1 = (E, \| \|_\infty) \to E_2 = (E, \| \|)$ l'application identité. Il est clair que I est linéaire et bijective. Soit maintenant $(f_n, I(f_n))$ une suite du graphe de I convergente vers (f, g) dans $E_1 \times E_2$. Alors

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \text{ et } \|I(f_n) - g\| = \|f_n - g\| \to 0.$$

La première convergence implique clairement $f_n(t) \to f(t)$ si $t \in [0, 1]$. La seconde convergence implique par hypothèse $f_n(t) \to g(t)$ si $t \in [0, 1]$. L'unicité de la limite donne $f(t) = g(t)$ si $t \in [0, 1]$, soit encore $f = g = I(f)$, ce qui montre que le graphe de I est fermé. Puisque E_1 et E_2 sont des Banach, le théorème du graphe fermé (P 2.17) assure que I est continue. Donc il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $f \in E$,

$$\|f\| = \|I(f)\| \leq \alpha\|f\|_\infty.$$

D'autre part, I est bijective, et par le théorème d'isomorphisme de Banach, I^{-1} est continue. Il existe donc $\beta > 0$ tel que pour toute $f \in E$,

$$\|f\|_\infty = \|I^{-1}(f)\|_\infty \leq \beta\|f\|.$$

Autrement dit, les deux normes sont équivalentes.

Exercice II.14

(1) (i) **(α) $\Rightarrow$ (β).**

Soit N un supplémentaire topologique de M dans E. Par (P 2.8) il existe $P \in \mathcal{L}(E)$ tel que $P^2 = P$, $\text{Im}(P) = M$, $\ker(P) = N$.

Soit $Q = I - P$. Alors, $\ker(Q) = M$. Soit $S : E/M \to E$ définie par $S([x]) = Q(x)$ où $x \in [x]$. L'application S est bien définie, car si $x, y \in [x]$, on a $x - y \in M$ et donc $Q(x - y) = 0$, ou encore $Q(x) = Q(y)$. S est clairement linéaire.

D'autre part, $\|S([x])\| = \|Q(x)\| \leq \|Q\| \, \|x\|$ pour tout $x \in [x]$. D'où $\|S([x])\| \leq \|Q\| \inf\{\|x\| \, ; x \in [x]\} = \|Q\| \, \|[x]\|$, ce qui donne la continuité de S.

Puisque $P(x) \in M, \pi(P(x)) = 0$, et on a donc

$$(\pi S)([x]) = \pi(Q(x)) = \pi((I - P)(x)) = \pi(x) - \pi(P(x)) = \pi(x) = [x],$$

c'est-à-dire $\pi S = [I]$.

(ii) **(β) $\Rightarrow$ (α).**

Supposons que $\pi S = [I]$, $\quad S \in \mathcal{L}(E/M, E)$. Posons $N = \mathrm{Im}(S)$.

Montrons que N est fermé. Soit $x_n \in N$ telle que $x_n \to x$ dans E, et $[y_n] \in E/M$ tel que $x_n = S([y_n])$.

Puisque π est continue, $[y_n] = \pi S([y_n]) = \pi(x_n) \to \pi(x) = [x]$.

Par continuité de S, on a $x_n = S([y_n]) \to S([x])$, et par unicité de la limite, $x = S([x]) \in N$, donc N est fermé.

Montrons que $M \cap N = \{0\}$. En effet, si $x \in M \cap N$, il existe $[y] \in E/M$ tel que $x = S([y])$ et $\pi(x) = 0$. Alors $[y] = \pi S([y]) = \pi(x) = 0$, d'où $x = S([y]) = 0$.

Montrons que $M \oplus N = E$. En effet, soit $x \in E$. On a

$$\pi(x) = [x] = \pi S([x]), \text{d'où } \pi(x - S([x])) = 0 \text{ et } z = x - S([x]) \in M.$$

Par conséquent, $x = z + S([x])$ avec $z \in M$ et $S([x]) \in N$, ce qui donne $E = M \oplus N$ avec M et N fermés.

(2) Par hypothèse, il existe $\phi : \ell^1 \to E/M$ isomorphisme bi-continu.

Soit $(e_n)_n$ la base canonique de ℓ^1 et soit $[a_n] = \phi(e_n)$ pour tout n. Puisque ϕ est continue, il existe $C > 0$ tel que $\|[a_n]\|_{E/M} < C$ pour tout n. Alors, par définition d'une borne inférieure, $\forall n \geq 1, \exists a_n \in [a_n] \subseteq E$ tel que $\|a_n\| < C$.

Soit $[x] \in E/M$, alors il existe un unique $x = (x_n)_n \in \ell^1$ tel que $[x] = \phi(x)$.

Soit enfin $S : E/M \to E$ obtenue en posant $S([x]) = \sum x_n a_n$. S est bien définie, car la série de terme général $x_n a_n$ est absolument convergente. De plus :

$$\|S([x])\| = \|\sum x_n a_n\| \leq C \sum |x_n| = C\|x\|_1 < \infty.$$

La linéarité de S étant facile à vérifier, il reste à montrer sa continuité. On a

$$\|x\|_1 = \|\phi^{-1}([x])\|_1 \leq \|\phi^{-1}\|.\|[x]\|_{E/M}.$$

Et donc

$$\|S([x])\| \leq C\|\phi^{-1}\|.\|[x]\|_{E/M},$$

ce qui donne le résultat voulu.

Montrons que $\pi S = I$. En utilisant la continuité de π et de ϕ, on voit que

$$\begin{aligned}\pi S([x]) &= \pi\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \pi(a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n [a_n] = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \phi(e_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \phi(x_n e_n) = \phi\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \phi(x) = [x].\end{aligned}$$

Maintenant pour conclure, on applique (1).

Remarque : La propriété sous-jacente de l'espace l^1, qu'on redémontre essentiellement ici, est la propriété dite « de relèvement », à savoir : pour tout opérateur linéaire continu $u : l^1 \to E/M$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un opérateur linéaire continu $\tilde{u} : l^1 \to E$ tel que

1. $||\tilde{u}|| \leq (1 + \varepsilon)||u||$
2. $u = \pi \circ \tilde{u}$ où π est la surjection canonique : $E \to E/M$. On dit que $\tilde{u}$ est un relèvement continu de u.

Si maintenant on prend pour u un isomorphisme de l^1 sur E/M, et qu'on pose $S = \tilde{u} \circ u^{-1}$, on voit que $\pi \circ S = \pi \circ \tilde{u} \circ u^{-1} = u \circ u^{-1} = [I]$. D'après ce qui précède, M est complémenté dans E.

THÉORÈME DE HAHN-BANACH, APPROCHES ET APPLICATIONS

III

1 ÉNONCÉS

Exercice III.1

Soit E, F deux espaces de Banach, et $T : E \to F$ linéaire.

Montrer qu'on a, E^* et F^* désignant les duaux topologiques de E et F :

$$[T \text{ est continue}] \Leftrightarrow [\forall f \in F^*, f \circ T \in E^*]$$

(Pour $\Leftarrow$ on peut utiliser le théorème du graphe fermé (P 2.17)).

Exercice III.2 : Moyennes de Banach

Soit $E = \ell^1(\mathbb{Z})$ l'espace des séries absolument convergentes $g = (g(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes, muni de la norme ℓ^1 définie par $\|g\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(n)|$, et soit $F = \ell^\infty(\mathbb{Z})$ l'espace des suites bornées $f = (f(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes, muni de la norme $\| \|_\infty$ définie par $\|f\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|$. On sait que F s'identifie au dual de E par la formule (*cf.* D 1.15) :

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)g(n) \ \forall f \in F, \forall g \in E,$$

et on se propose de montrer que E n'est pas *réflexif*, c'est-à-dire qu'il existe des formes linéaires continues sur F qui ne proviennent pas d'un élément de E. Pour des entiers $N \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{Z}$, on définit la forme linéaire $M_N : F \to \mathbb{C}$ de « moyenne d'ordre N » et l'opérateur $T_a : F \to F$ de « translation par a » par les formules :

$$M_N(f) = \frac{1}{2N+1} \sum_{|n|\leq N} f(n) \text{ et } T_a f(n) = f(n+a), \quad \forall f \in F.$$

Soit aussi $e \in F$ définie par $e(n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{Z}$ et V le sous-espace de F constitué des sommes finies (dans lesquelles p dépend de f)

$$f = \lambda_0 e + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j (f_j - T_{a_j} f_j), \text{ avec } \lambda_0, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{C}, a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{Z}, f_1, \ldots, f_p \in F.$$

(1) Montrer que $f \in F$ et $a \in \mathbb{Z} \Longrightarrow |M_N(f - T_a f)| \leq \frac{2|a|}{2N+1} \|f\|_\infty$.

(2) Montrer que $f \in V \Longrightarrow \lim_{N\to\infty} M_N(f) = \lambda_0$ ne dépend pas de la décomposition choisie pour f. On pose $L(f) = \lambda_0$. Montrer que L est une forme linéaire continue sur V et que de plus $\|L\| = L(e) = 1$.

(3) Montrer qu'il existe une forme linéaire continue et positive M sur F (i.e. $f \geq 0 \Longrightarrow M(f) \geq 0$), que l'on appelle une « moyenne de Banach », avec les propriétés suivantes :

$$M(f) = L(f)\ \forall f \in V;\ M(e) = \|M\| = 1;\ M(f) = M(T_a f)\ \forall a \in \mathbb{Z},\ \forall f \in F.$$

(4) Montrer que M ne provient pas d'un élément de E. Ainsi, E n'est pas réflexif.

Exercice III.3

Soit E l'espace vectoriel des fonctions complexes continues sur $[0, 1]$.

On note E_∞ l'espace E muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup(|f(t)|; t \in [0, 1])$.

On note E_1 l'espace E muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$.

(1) Soit A l'application $\{E \to \mathbb{C}, f \mapsto \int_0^1 tf(t)dt\}$.

Montrer que A est un élément de $(E_1)^*$, dual topologique de E_1, et de $(E_\infty)^*$, dual topologique de E_∞ (*cf.* D 2.9).

Dans chacun des espaces considérés, quelle est la norme de A ? Est-elle atteinte pour un vecteur normé, i.e. existe-t-il

$$f \in E \text{ avec } \|f\| = 1, \text{ et } \|Af\| = \|A\|?$$

(2) Soit $g \in E$, on lui associe l'application $A_g : \{E_1 \to \mathbb{C}, f \mapsto \int_0^1 g(t)f(t)dt\}$.

Montrer que A_g est un élément de $(E_1)^*$. Quelle est sa norme ? Est-elle atteinte ? Même question en considérant A_g comme élément de $(E_\infty)^*$.

(3) Soit B l'application donnée par $\{E \to \mathbb{C}, f \mapsto \int_{0+}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}}dt\}$.

Montrer que B est bien définie sur E, mais n'est pas continue.

Exercice III.4

E est un espace de Banach, E^* désigne son dual (topologique). Si M est un sous-ensemble de $E, M^\perp = \{f \in E^*, \forall y \in M, \langle y, f\rangle = 0\}$ est l'orthogonal, ou le polaire, de M (D 2.10).

(1) Soient F, G deux sous- espaces de Banach de E, tels que $E = F \oplus G$ (*cf.* D 1.12). Montrer que $E^* = F^\perp \oplus G^\perp$.

(2) **Un exemple :** E est l'espace des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à 3, et $(e_j, e_j(x) = x^j, j = 0, 1, 2, 3)$ est sa base usuelle.

La norme sur E est définie par :

$$\|P\| = \max(|a|, |b|, |c|, |d|) \text{ si } P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3. \qquad (III.1)$$

L'identité de la division euclidienne par $D, D(x) = x(x-1)$ est écrite

$$P = DQ + R \qquad (III.2)$$

$$\text{et on pose :} \quad F = \{R; P \in E\}, G = \{DQ; P \in E\}.$$

(i) Montrer que $E = F \oplus G$. Quelle est la norme de la projection associée $A : \{E \to E, P \mapsto R\}$? (On trouvera $\|A\| = 3$).

(ii) Quels sont les sous-espaces $F^\perp$et $G^\perp$?

Exercice III.5

Soit $K = [-1, 1]^n$ le cube unité de $\mathbb{R}^n$ et $S = \{\sigma = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n); \varepsilon_j = \pm 1\}$ l'ensemble de ses sommets. Montrer que tout point $x \in K$ peut s'écrire comme une combinaison convexe de sommets

$$x = \sum_{\sigma \in S} \lambda_\sigma \sigma \text{ avec } \lambda_\sigma \geq 0 \text{ et } \sum_{\sigma \in S} \lambda_\sigma = 1.$$

Exercice III.6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $f, f_1, f_2, \ldots, f_n$ des formes linéaires sur E.

Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k$ où $\alpha_k \in \mathbb{K}$,

(b) Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in E, |f(x)| \leq \alpha \max_k |f_k(x)|$,

(c) $\bigcap_{k=1}^n \ker(f_k) \subseteq \ker(f)$.

(Pour prouver (c) $\Rightarrow$ (a), on pourra considérer $T : E \to \mathbb{K}^n$ définie par $T(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$.)

Exercice III.7

Soit E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit l'application $\pi : \{E \to E/\ker T, x \mapsto \widetilde{x}\}$ et $S : \{E/\ker T \to F, \widetilde{x} \mapsto Tx\}$, où $\ker T = \{x \in E; Tx = 0\}$ (On observera que $T = S \circ \pi$).

(1) Montrer que S est bien définie et continue. Quelle est sa norme ?

(2) On suppose T surjective.

(i) Montrer que S est une bijection.

(ii) En déduire une démonstration du « Théorème de l'application ouverte » (P 2.15) en utilisant le « Théorème d'isomorphisme de Banach » (P 2.16), et les résultats de l'Ex. II.11.

Exercice III.8

Soit E un espace normé et M un sous-espace vectoriel de E. $\overline{M}$ désigne l'adhérence de M dans E.

(1) Montrer que $\overline{M} = \bigcap\{\ker(f); f \in E^* \text{ et } M \subseteq \ker(f)\}$.

(2) En déduire que M est dense dans E si et seulement si toute forme linéaire continue sur E qui s'annule sur M s'annule sur E. Avec des symboles :

$$\overline{M} = E \Longleftrightarrow M^\perp = \{0\}.$$

Exercice III.9

Soit E un espace de Banach et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de E.

(1) Justifier l'implication :

si $x_n \to x$ dans E, alors pour toute $f \in E^*$, $\langle x_n, f\rangle \to \langle x, f\rangle$.

(2) Montrer que si E est de dimension finie la réciproque de l'implication de (1) est valable, mais que, dans le cas général, elle est fausse (construire un exemple).

(3) Supposons que

$$\text{Il existe } x \in E \text{ tel que pour toute } f \in E^*, \langle x_n, f\rangle \to \langle x, f\rangle.$$

Montrer que $x \in \overline{\mathrm{Vect}(x_n, n \geq 0)}$ (adhérence du sous-espace vectoriel engendré par $\{x_n, n \geq 0\}$).

Exercice III.10

Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ l'espace des fonctions complexes continues sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme : $\|f\|_\infty = \sup(|f(x)|; x \in [0,1])$. Soit M le sous-espace vectoriel de E formé des polynômes.

(1) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel N de E tel que $M \cap N = \{0\}$ et $E = M + N$ (utiliser le lemme de Zorn P 3.10).

Dans la suite, un tel N est fixé.

(2) Soit $\phi : E \to \mathbb{C}$ définie par

$$\phi(f) = \begin{cases} \sum_{j=0}^n ja_j & \text{si} \quad f = \sum_{j=0}^n a_j x^j \in M \\ 0 & \text{si} \quad f \in N \\ \phi(k) & \text{si} \quad f = k + u, k \in M, u \in N \end{cases}$$

Montrer que ϕ est une forme linéaire non continue sur E.

(3) Soit $g \in N, g \neq 0$, et $T : E \to E$ défini par $Tf = f - \phi(f)g$. Montrer que T est linéaire, bijectif, non continu de E dans E.

(4) Pour $f \in E$, on note $\|f\|_T = \|Tf\|_\infty$.

(i) Montrer que $\| \ \|_T$ est une norme sur E et que E muni de cette norme est un espace de Banach.

(ii) Les normes $\| \ \|_T$ et $\| \ \|_\infty$ sont-elles équivalentes sur E ?

Exercice III.11

(1) Soit $E = C([0, 1])$ l'espace de Banach des fonctions complexes continues sur $[0, 1]$ avec la norme du sup, et $D = \{z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| < 1\}$. Pour $z \in D$ et $t \in [0, 1]$, on pose : $f_z(t) = \frac{1}{1-zt}$. Montrer que $f_z \in E$ et que f_z s'écrit comme un série convergente (dans E) :

$$f_z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \varphi_n, \text{ avec } \varphi_n(t) = t^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \varphi_n \in E.$$

(2) Soit $L \in E^*$, le dual topologique de E, et $F : D \to \mathbb{C}$ définie par $F(z) = L(f_z)$. Montrer que,

$$\text{pour tout } z \in D, F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} L(\varphi_n) z^n.$$

(3) Soit $(z_k)_{k\geq 1}$ une suite de points distincts de D, avec $\sup_k |z_k| = r < 1$, ainsi que $M = \mathrm{Vect}(f_{z_k}, k \geq 1)$. On se propose de montrer que M est dense dans E, en utilisant le critère de l'Ex. III.8. Soit donc $L \in E^*$ nulle sur M, et $F(z) = L(f_z)$ la fonction associée.

(i) Montrer que $F(z_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

(ii) Montrer que $L(\varphi_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Montrer que $L = 0$ et conclure.

2 SOLUTIONS

Exercice III.1

(i) $\Rightarrow$: Il s'agit simplement du produit de composition de deux applications continues, c'est une application continue.

(ii) $\Leftarrow$: Selon la suggestion de l'énoncé, comme E et F sont des espaces de Banach, le théorème du graphe fermé (P 2.17) exprime que T est continue dès que son graphe est fermé dans $E \times F$.

Soit donc $((x_n, Tx_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de ce graphe convergeant vers (x, y), ou encore $x_n \to x$ et $Tx_n \to y$. Il convient d'établir que $y = Tx$. Soit $f \in F^*$. Puisque $f \circ T$ est continue, on a

$$\lim_{n\to\infty}(f \circ T)(x_n) = (f \circ T)(x).$$

Soit encore, selon l'écriture usuelle (D 1.24) :

$$\lim_{n\to\infty}\langle Tx_n, f\rangle = \langle Tx, f\rangle.$$

Comme f est continue, on a aussi : $\lim_{n\to\infty}\langle Tx_n, f\rangle = \langle y, f\rangle$, et par identification : $\langle y, f\rangle = \langle Tx, f\rangle$ pour tout $f \in F^*$.

Or, on sait que (*cf.* (P 3.5)) :

$$y_1, y_2 \in F \text{ et } \langle y_1, f\rangle = \langle y_2, f\rangle \text{ pour tout } f \in F^* \Longrightarrow y_1 = y_2.$$

Il résulte donc de ce qui précède que $y = Tx$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice III.2

(1) Supposons par exemple $a \geq 1$. Un calcul immédiat donne, après simplification :

$$M_N(f - T_a f) = \frac{1}{2N+1}\left(\sum_{-N\leq n<-N+a} f(n) - \sum_{N<n\leq N+a} f(n)\right).$$

En prenant les modules et en majorant $|f(n)|$ par $\|f\|_\infty$ dans cette somme de $2a$ termes, on obtient l'inégalité de l'énoncé.

(2) Soit $f = f = \lambda_0 e + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j(f_j - T_{a_j} f_j) \in V$. Nous avons donc

$$M_N(f) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j M_N(f_j - T_{a_j} f_j) \text{ d'où d'après (1)}$$

$$|M_N(f) - \lambda_0| \leq \sum_{j=1}^{p} |\lambda_j| \frac{2|a_j|}{2N+1} \|f_j\|_\infty.$$

Ceci montre que $\lim_{N\to\infty} M_N(f) = \lambda_0$ existe si $f \in V$, on note cette limite $L(f)$, et que de plus

$$f \in V \Longrightarrow |L(f)| \leq \|f\|_\infty \text{ puisque } |M_N(f)| \leq \|f\|_\infty \ \forall f \in F.$$

Enfin, l'égalité $e = \lambda_0 e$ avec $\lambda_0 = 1$ montre que $L(e) = \lambda_0 = 1$.

(3) **Un prolongement de *L*.** La forme linéaire L est continue sur V et de norme 1 ; par le théorème de Hahn-Banach (P 2.3), elle admet un prolongement $M \in (\ell^\infty)^* = F^*$ de même norme. Ce prolongement a toutes les propriétés requises, puisque $M(e) = \|M\| = 1 \Longrightarrow M \geq 0$ et puisque par définition :

$$f \in V \Longrightarrow M(f) = L(f); f \in V \text{ et } a \in \mathbb{Z} \Longrightarrow M(f - T_a f) = L(f - T_a f) = 0,$$

la dernière égalité venant du fait que $f - T_a f = 0 \times e + f - T_a f$ et que donc $L(f - T_a f) = 0$.

(4) Supposons que M est « donnée par un élément de E », c'est-à-dire qu'il existe $g \in E$ telle que $M(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)g(n) \ \forall f \in F$. La relation de la question (3), $M(T_1 f) = M(f)$, se traduit par

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+1)g(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)g(n-1) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)g(n) \ \forall f \in F.$$

Par identification, on en déduit

$$\ldots g(-n) = g(-n+1) = \ldots = g(0) = g(1) = \ldots g(n-1) = g(n) = \ldots$$

d'où $g(n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$ et $g = 0$, puisque $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(n)| < \infty$. Mais nous avons alors $M(e) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e(n)g(n) = 0$ alors que $M(e) = 1$! Cette contradiction montre que M ne peut pas provenir de E. Le dual de F est donc strictement plus grand que E.

Exercice III.3

(1) A est naturellement linéaire.

(i) ***A* sur E_∞.**

On note $A = A_\infty$.

$|\int_0^1 tf(t)dt| \leq \|f\|_\infty |\int_0^1 tdt = \frac{1}{2}\|f\|_\infty$, donc, d'après (P 1.4), A_∞ est continue et $\|A\|_\infty \leq \frac{1}{2}$. L'utilisation de la fonction $f_0 : \{t \mapsto 1\}$ montre que $\|A\|_\infty = \frac{1}{2}$ et est atteinte pour le vecteur normé f_0.

(ii) ***A* sur E_1.**

On note $A = A_1$. L'inégalité permettant d'utiliser (P 1.4) est ici

$|\int_0^1 tf(t)dt| \leq \|f\|_1 \sup\{t \in [0,1]\} = \|f\|_1$. Elle conduit à la continuité de A_1 et à la majoration $\|A\|_1 \leq 1$.

Si f normée est telle que $|Af| = 1$, les inégalités précédentes doivent être des égalités. Ceci est évidemment impossible puisque sous le signe $\int$ on devrait pouvoir remplacer t

par 1 donc avoir f à support réduit au point $t = 1$. Cela ne conduit qu'à la fonction nulle, puisque f est continue.

Par contre on peut *approcher* 1 en choisissant f à support proche de 1. Par exemple

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1 - \varepsilon \\ 2\varepsilon^{-2}(t - 1 + \varepsilon) & \text{si } t > 1 - \varepsilon \end{cases}$$

(faire le graphe) est telle que $\|f_\varepsilon\|_1 = 1$ et $\int_0^1 t f_\varepsilon(t)dt = \int_{1-\varepsilon}^1 t f_\varepsilon(t)dt \geq 1 - \varepsilon$.

On obtient : pour tout $\varepsilon > 0$, $\frac{\|Af_\varepsilon\|_1}{\|f_\varepsilon\|_1} \geq \frac{1-\varepsilon}{1}$, donc $\|A\|_1 = 1$, bien que la norme de A ne soit atteinte sur aucun vecteur.

(2) La question (1) est un cas particulier de (2). On cherche le même type de majoration.

(i) **A_g continue.**

Puisque g est continue sur $[0, 1]$, intervalle compact de $\mathbb{R}$, elle est bornée. Sa borne supérieure (en module) est $\|g\|_\infty$.

$|A_g(f)| = |\int_0^1 g(t)f(t)dt| \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$.
A_g est donc bornée, c'est un élément de $(E_1)^*$ de norme majorée par $\|g\|_\infty$.

(ii) **$\|A_g\|$.**

On cherche à établir l'égalité $\|A_g\| = \|g\|_\infty$. On peut supposer g non identiquement nulle. Soit $0 < \varepsilon < \|g\|_\infty$. Puisque la fonction g est continue sur un ensemble compact, elle atteint sa borne supérieure $\|g\|_\infty$ en un point t_0 : $|g(t_0)| = \|g\|_\infty$. Soit $J = [t_1, t_2]$ un intervalle infini (i.e. $t_1 < t_2$) contenant t_0, assez petit pour que g vérifie $t \in J \Longrightarrow |g(t)| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon > 0$. Puis soit u une fonction continue positive, par exemple une fonction triangle, nulle hors de J et telle que $\|u\|_1 = 1$; on choisit alors f ainsi (argument de $\overline{g}$ « localisé ») :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\overline{g(t)}}{|g(t)|} u(t) & \text{si } t \in J \\ 0 & \text{si } t \notin J \end{cases}$$

On observe que $f \in E_1$ et que $|f(t)| = u(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$, par suite $\|f\|_1 = \|u\|_1 = 1$. On a donc

$$\begin{aligned} \|A_g\| &\geq \left| \int_0^1 f(t)g(t)dt \right| = \left| \int_J f(t)g(t)dt \right| = \int_J |g(t)|u(t)dt \\ &\geq (\|g\|_\infty - \varepsilon) \int_J u(t)dt = \|g\|_\infty - \varepsilon. \end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient bien $\|A_g\| = \|g\|_\infty$. Mais on remarque que, sauf si le maximum de $|g(t)|$ est atteint sur un intervalle non réduit à un point, la norme de A_g n'est pas atteinte.

Pour la norme de A_g comme élément de $(E_\infty)^*$, on procède de façon analogue : d'abord, $|A_g(f)| = |\int_0^1 f(t)g(t)dt| \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$, d'où $\|A_g\| \leq \|g\|_1$. Ensuite, pour $\varepsilon > 0$, on considère $f = f_\varepsilon \in E_\infty$ définie par $f(t) = \frac{\overline{g(t)}}{|g(t)|+\varepsilon}$, qui vérifie $\|f\|_\infty \leq 1$. On a donc

$$\begin{aligned}\|A_g\| \geq |A_g(f)| &= \int_0^1 \frac{|g(t)|^2}{|g(t)|+\varepsilon}dt \geq \int_0^1 \frac{|g(t)|^2-\varepsilon^2}{|g(t)|+\varepsilon}dt \\ &= \int_0^1 (|g(t)|-\varepsilon)dt = \|g\|_1 - \varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui implique $\|A_g\| = \|g\|_1$, en faisant tendre ε vers 0.

(3) L'application B n'est pas de la catégorie étudiée en (2) puisque la continuité en 0 de la fonction g n'est pas assurée.

(i) ***B* est bien définie.**

Comme f est continue sur $[0, 1]$, elle est bornée. Si $\|f\|_\infty = a$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\int_\varepsilon^1 \frac{|f(t)|}{\sqrt{t}}dt \leq a\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt \leq 2a$; donc, ε étant arbitrairement petit, l'intégrale (généralisée) de $\frac{f(t)}{\sqrt{t}}$ sur $]0, 1]$ est *absolument* convergente, et par suite convergente : l'intégrale $\int_{0+}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}}dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}}dt$ a bien un sens.

(ii) ***B* n'est pas continue.**

Si B était continue, intuitivement elle se prolongerait à l'espace $L^1([0, 1])$, en particulier on pourrait définir $B(f)$ pour $f(t) = t^{-\frac{1}{2}}$, ce qui serait absurde, car $\int_0^1 \frac{1}{t}dt = \infty$. Mais, à cause de la valeur $t = 0$, $f \notin E_1$. On a donc envie de tronquer la fonction f précédente et de considérer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in E_1$ définie ainsi :

$$\text{Pour tout } t \in [0,1],\ f_n(t) = \min(n, t^{-\frac{1}{2}}).$$

Nous avons, d'une part, $\|f_n\|_1 \leq \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}dt = 2$, et d'autre part, $Bf_n \geq \int_{\frac{1}{n^2}}^1 \frac{1}{t}dt = 2\log n$, puisque $t \geq \frac{1}{n^2} \implies f_n(t) = t^{-\frac{1}{2}}$. Ceci montre que B, linéaire, n'est pas bornée sur les parties bornées de E_1, et n'est donc pas continue.

Exercice III.4

(1) La justification de l'écriture de E^* sous forme de somme directe topologique (D 1.17, D 2.10) demande plusieurs contrôles.

(i) **$M^\perp$ sous-espace fermé.** (valable pour $M = F$ ou $M = G$).

On remarque pour cela que, si $x \in M$, alors l'application x^{**} définie par x^{**} $\{E^* \to \mathbb{C}, f \mapsto \langle x, f\rangle\}$ est linéaire continue (plongement de E dans E^{**} selon (P 2.10)), et qu' on a par définition

$$M^\perp = \bigcap_{x\in M} \ker x^{**}.$$

Ceci montre que $M^{\perp}$ est un sous-espace fermé de E^*.

(ii) $\boldsymbol{F^{\perp} \cap G^{\perp} = \{0\}}$.

Soit $x \in E$, il existe $y \in F, z \in G$ uniques tels que $x = y+z$. Soit maintenant $f \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$, alors $\langle y, f\rangle = 0$ et $\langle z, f\rangle = 0$, donc $\langle x, f\rangle = 0$.

Ceci montre que f annule tous les vecteurs de E. On obtient $f = 0$.

(iii) $\boldsymbol{F^{\perp} + G^{\perp}}$ **remplit** $\boldsymbol{E^*}$.

Soit $h \in E^*$, on cherche à lui associer des éléments $f \in F^{\perp}, g \in G^{\perp}$ de sorte que $h = f+g$.

Pour cela, si $x = y + z$ selon la notation de (ii), on utilise la projection $P\,\{E \to E, x \mapsto y\}$. C'est un élément de $\mathcal{L}(E)$.

L'application composée $hP = h \circ P$ appartient à E^* et pour tout $z \in G$, on a $Pz = 0$, donc $h(Pz) = \langle z, hP\rangle = 0$. $g = hP$ est ainsi un élément de $G^{\perp}$.

De même pour tout $y \in F, h(I - P)y = 0$. Soit $f = h(I - P) \in F^{\perp}$.

On a obtenu l'écriture $h = f + g$ cherchée. Ceci assure le caractère de sommme directe algébrique de $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$.

(iv) $\boldsymbol{F^{\perp} + G^{\perp} = F^{\perp} \oplus G^{\perp} = E^*}$.

La définition de f et g entraîne la continuité des applications $h \mapsto f$ et $h \mapsto g$, donc la valeur de somme directe topologique permettant d'écrire $G^* = F^{\perp} \oplus G^{\perp}$. (On peut aussi affirmer ce caractère de somme directe topologique en utilisant la proposition (P 2.8) ; l'espace de Banach est somme directe algébrique de sous-espaces fermés, donc est automatiquement somme directe topologique.)

(2) (i) On vérifie le caractère de norme de la norme proposée ; il s'agit de la norme $\| \|_{\infty}$ dans un espace vectoriel de dimension 4 relativement à la base $(e_j, j = 0, 1, 2, 3)$.
Si $e_j(x) = x^j$, $(III.2)$ conduit à la relation

$$P(x) = x(x - 1)(c + d + dx) + (a + (b + c + d)x),$$

soit encore

$$R = ae_0 + (b + c + d)e_1 \text{ et } DQ = P - R = -(c + d)e_1 + ce_2 + de_3.$$

On a alors

$$\|R\| = \max(|a|, |b + c + d|) \leq \max(|a|, (|b| + |c| + |d|))$$
$$\leq 3 \max(|a|, |b|, |c|, |d|) = 3\|P\|.$$

Donc $\|A\| \leq 3$. L'égalité est obtenue si $a = b = c = d = 1$, d'où $\|A\| = 3$.

(ii) E^* sera muni de la base duale $(e^j, j = 0, 1, 2, 3), \langle e_k, e^j\rangle = \delta_{k,j}$, où δ est le symbole de Kronecker. Pour $f = \Sigma_{j=0}^{3} f_j e^j$, on a $\|f\| = \Sigma_{j=0}^{3} \mid f_j \mid$.

$R(x) = a + (b + c + d)x$ parcourt tous les polynômes de degré ≤ 1 lorsque P parcourt l'ensemble des polynômes de degré ≤ 3, donc

$$F = \mathrm{Vect}(e_0, e_1) \text{ et } F^\perp = \mathrm{Vect}(e^2, e^3).$$

$$\langle DQ, f\rangle = -(c+d)f_1 + cf_2 + df_3 = c(f_2 - f_1) + d(f_3 - f_1),$$

donc $G^\perp$ est constitué des f tels que $f_2 - f_1 = 0$ et $f_3 - f_1 = 0$, soit $G^\perp = \mathrm{Vect}(e^0, e^1 + e^2 + e^3)$.

On vérifie l'égalité $E^* = F^\perp \oplus G^\perp$ par l'égalité

$$\mathrm{Vect}(e^2, e^3, e^0, e^1 + e^2 + e^3) = \mathrm{Vect}(e^0, e^1, e^2, e^3).$$

Exercice III.5

Il s'agit d'une application possible du théorème de Hahn-Banach géométrique. Rappelons un énoncé de ce théorème : « Soit L un convexe compact d'un espace vectoriel normé E et x un point de E. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes » (*cf.* P 3.13) :

1. $x \in L$
2. Pour toute forme linéaire continue $f \in E^*$, on a l'inégalité

$$f(x) \leq \sup_{l\in L} f(l) \overset{def}{=} M. \tag{*}$$

Soit ici $L = \mathrm{co}(S)$ l'enveloppe convexe des 2^n sommets

$$\sigma = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$

de K. C'est un ensemble compact comme image continue de l'espace compact $J = \{\mu = (\mu_\sigma)_{\sigma\in S}\ ;\ \mu_\sigma \geq 0, \sum_{\sigma\in S} \mu_\sigma = 1\} \subset \mathbb{R}^S$ par l'application F définie ainsi

$$F(\mu) = \sum_{\sigma\in S} \mu_\sigma \sigma \text{ si } \mu = (\mu_\sigma) \in J,$$

et la question posée revient à montrer que $x \in K \Longrightarrow x \in L$. Soit maintenant f une forme linéaire (automatiquement continue) sur $\mathbb{R}^n$. On sait qu'il existe $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}$ tels que $f(y) = \sum_{j=1}^n f_j y_j$, $\forall y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour tester $(^*)$ et conclure que $x \in L$, on majore le premier membre et on minore le second membre du mieux qu'on peut.

(1) (i) **Majoration du premier membre.** Nous avons évidemment

$$f(x) = \sum_{j=1}^n f_j x_j \leq \sum_{j=1}^n |f_j|\,|x_j| \leq \sum_{j=1}^n |f_j|.$$

(ii) **Minoration du second membre.** Soit $\varepsilon_j = \pm 1$ des signes tels que $\varepsilon_j f_j = |f_j|$ et soit $\tau = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in S$. Alors, on a

$$M \geq f(\tau) = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j f_j = \sum_{j=1}^n |f_j| \geq f(x), \text{CQFD}.$$

Exercice III.6

(i) **(*a*) ⇒ (*b*).**

Si $f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$ où $\alpha_k \in \mathbb{K}$, alors pour tout $x \in E$, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x)$, donc

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|\, |f_k(x)| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|\right) \max_k(|f_k(x)|) \stackrel{def}{=} \alpha \max_k(|f_k(x)|).$$

(ii) **(*b*) ⇒ (*c*).**

Supposons que pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leq \alpha \max_k(|f_k(x)|)$. Alors, pour $x \in \cap_{k=1}^{n} \ker(f_k)$, on a $\max_k(|f_k(x)|) = 0$, et donc $|f(x)| \leq \alpha \times 0 = 0$, i.e. $x \in \ker f$.

(iii) **(*c*) ⇒ (*a*).**

Soit $T : E \to \mathbb{K}^n$ définie par $T(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, et soit G un supplémentaire du sous-espace vectoriel $T(E)$. Définissons une forme linéaire l sur $T(E)$ par la formule

$$l(T(x)) = f(x) \text{ pour tout } x \in E.$$

On notera que l est définie sans ambiguité : en effet, on a par hypothèse

$$T(x) = T(y) \Longrightarrow x - y \in \bigcap_{k=1}^{n} \ker f_k \Longrightarrow x - y \in \ker f \Longrightarrow f(x) = f(y).$$

Il en résulte aussi que l est linéaire sur $T(E)$: en effet,

$$u = T(x), v = T(y) \in T(E) \Longrightarrow u + v = T(x + y),$$

ce qui nous permet d'écrire $l(u + v) = f(x + y)$, soit $l(u + v) = f(x) + f(y) = l(u) + l(v)$ et l est additive. On montre de même qu'elle est homogène. On la prolonge en une forme linéaire, toujours notée l, sur $\mathbb{K}^n$ tout entier par la formule

$$l(T(x) + g) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in E, \quad \text{pour tout } g \in G.$$

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $\alpha_k = l(e_k)$, on a alors la relation $l(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k$ pour tous $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{K}$ et en particulier

$$l(T(x)) = f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x) \text{ pour tout } x \in E, \text{ soit } f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k.$$

(En d'autres termes, $f \in \mathrm{Im}(T^*)$, où T^* est le transposé de T. En effet, on vérifie facilement que l'on a

$$T^*((\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k.)$$

Exercice III.7

On note N la norme dans $E/\ker T$ et $\| \ \|$ la norme dans E ou F.

(1) L'exercice II.11 montre que l'application π est bien définie et linéaire continue.

(i) ***S* bien définie.**

S est bien définie car $S\widetilde{x}$ est indépendant du choix de l'élément $x \in \widetilde{x}$. En effet :

$$u \in \ker T \implies T(x+u) = Tx \implies S\widetilde{x} = T(x+u).$$

(ii) ***S* continue.**

Selon (D 1.21), $N(\widetilde{x}) = \inf(\|x+u\|; u \in \ker T)$.

$S\widetilde{x} = T(x+u)$, donc $\|S\widetilde{x}\| \leq \|T\| \, \|x+u\|$.

En prenant l'inf du membre de droite relativement aux $u \in \ker T$, on obtient $\|S\widetilde{x}\| \leq \|T\| N(\widetilde{x})$. Comme S est linéaire, ceci établit la continuité de S d'après (P 1.4) et l'inégalité $\|S\| \leq \|T\|$.

(iii) **Norme de *S*.**

On a par définition $T = S \circ \pi$. D'où en prenant les normes opérateur des deux membres :

$$\|T\| \leq \|S\| \, \|\pi\| \leq \|S\|,$$

puisqu'on a trivialement $\|\pi\| \leq 1$. D'où $\|S\| = \|T\|$.

(2) (i) On doit établir que S est injective et surjective.

(a) ***S* surjective.** Par la définition de S, S et T ont les mêmes images ; alors S est surjective.

(b) ***S* injective.** $[S\widetilde{x} = 0] \Leftrightarrow [Tx = 0] \Leftrightarrow [x \in \ker T] \Leftrightarrow [\widetilde{x} = 0]$.

(ii) Par (P 2.15), on doit prouver que si E et F sont deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective, alors T est une application ouverte (D 1.11).

Le théorème d'isomorphisme de Banach (P 2.16) dit ceci : si G et F sont deux espaces de Banach et S une bijection continue de G dans F, alors S est un isomorphisme (elle a un inverse continu).

T vérifie les hypothèses de (2). S est alors une bijection continue entre $G = E/\ker T$ et F. Or, E est un espace de Banach et $G = E/\ker T$ aussi (*cf.* Ex. II.11). On peut appliquer le théorème d'isomorphisme de Banach (P 2.16), et S admet un inverse continu ; si Ω est un ouvert de G, $(S^{-1})^{-1}(\Omega) = S(\Omega)$ est donc un ouvert de F ; ceci montre que S est une application ouverte.

On revient ensuite à T en écrivant $T = S \circ \pi$.

π est une application ouverte surjective ((P 2.15) et (Ex. II.11)), ainsi que S. Par composition, T est aussi ouverte.

Exercice III.8

(1) On note I l'ensemble des $f \in E^*$ telles que $\ker f \supset M$, et $G = \cap_{f \in I} \ker f$.

(i) $\boldsymbol{\overline{M} \subseteq G}$.

f est une application continue, donc $\ker(f)$ est un sous-espace fermé de E ; l'inclusion $M \subseteq \ker(f)$ implique $\overline{M} \subseteq \ker(f)$. Ainsi l'inclusion $\overline{M} \subseteq G$ est vraie.

(ii) $\boldsymbol{G \subseteq \overline{M}}$.

Soit $y \notin \overline{M}$, dans $H_y = \mathrm{Vect}(y, \overline{M})$ on définit g linéaire telle que $\langle y, g\rangle = 1$ et pour tout $z \in \overline{M}, \langle z, g\rangle = 0$. g est continue (P 3.7) et, par le théorème de Hahn-Banach (P 3.4), g est prolongeable en un élément $f \in E^*$. $\ker(f)$ contient M et ne contient pas y, donc $y \notin G$. On a l'inclusion cherchée.

(2) On a donc montré en (1) que

$$\bigcap_{f \in I} \ker f = \overline{M}.$$

L'égalité $\overline{M} = E$ équivaut donc à l'égalité $\ker f = E$ pour tout $f \in I$, donc à l'égalité $f = 0$ pour tout $f \in I$, ce qui prouve l'équivalence demandée.

Exercice III.9

(1) On applique la définition de la norme de f :

$$|\langle x_n - x, f\rangle| \leq \|f\| \, \|x_n - x\|.$$

Ceci entraîne l'implication demandée.

(2) (i) **Espace de dimension finie.**

Soit $(e_1, \dots, e_d)$ une base de E, et $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$ la base duale, composée de formes linéaires continues, puisque E est de dimension finie. Si une suite (x_n) de E vérifie $\langle x_n, f\rangle \to \langle x, f\rangle$ pour tout $f \in E^*$, on a

$$x_n = \sum_{k=1}^{d} \langle x_n, \varphi_k\rangle e_k \to \sum_{k=1}^{d} \langle x, \varphi_k\rangle e_k = x,$$

ce qui établit l'équivalence demandée.

(ii) **Cas de contradiction.**

Il convient de chercher un exemple d'espace de dimension infinie. Soit par exemple ℓ^2 muni de sa base (hilbertienne) canonique $(e_n, n \in \mathbb{N}^*)$ où $e_n = (e_n(j))_{j \in \mathbb{N}^*}$ avec $e_n(n) = 1$ et $e_n(j) = 0$ si $j \neq n$. On sait que le dual de ℓ^2 s'identifie à ℓ^2 (P 2.11) ; un élément $f \in (\ell^2)^*$ est donné par la suite de nombres complexes $f_j = \langle e_j, f\rangle$ telle que l'on ait

$\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^2 < \infty$. Considérons alors la suite des e_n : nous avons $\langle e_n, f\rangle = f_n \to 0$, cependant la suite des e_n n'est pas convergente puisqu'elle n'est pas de Cauchy : on a en effet $\|e_n - e_p\| = \sqrt{2}$ pour $n \neq p$.

(3) Soit $F = \overline{\text{Vect}(x_n, n \geq 0)}$, et soit y un vecteur de E extérieur à F : il existe alors $f \in E^*$ tel que $\langle y, f\rangle = 1$ et, pour tout $x \in F, \langle x, f\rangle = 0$ (P 3.7).

Pour cet f, on a $\langle x, f\rangle = \lim_n \langle x_n, f\rangle = \lim_n 0 = 0$, donc x est distinct de y. Ceci est réalisé pour tout y non dans F et montre donc que $x \in F$.

Exercice III.10

(1) Il s'agit d'un résultat de cours : d'après le lemme de Zorn (*cf.* P 3.1), tout sous-espace M d'un espace vectoriel E possède un supplémentaire N.

(2) (i) **ϕ linéaire.**

Sur $E = M + N$, on note $f = k + u, k \in M, u \in N$.

L'application projection $\{E \to M, f \mapsto k\}$ est linéaire.

Soit $k(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ et $k'(x) = \sum_{j=0}^{n} a'_j x^j$. Il est clair que

$$z \in \mathbb{C} \Longrightarrow \phi(k + zk') = \sum_{j=0}^{n} j(a_j + za'_j) = \phi(k) + z\phi(k').$$

L'application $\{M \to \mathbb{C}, k \mapsto \phi(k)\}$ est donc linéaire, et $\phi : \{E \to \mathbb{C}\}$ aussi.

(ii) **ϕ non continue.**

Par (P 2.5), il suffit de montrer que ϕ n'est pas bornée sur la boule unité B de E. Or, soit $f_n, f_n(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$. On a $\|f_n\|_\infty = 1$, donc $f_n \in B$, mais $\phi(f_n) = n$ peut être arbitrairement grand, donc ϕ n'est pas continue.

(3) (i) **T linéaire.**

L'application $\{E \to E, f \mapsto \phi(f)g\}$ est linéaire comme ϕ, donc T est linéaire.

(ii) **T bijective.**

Comme $g \in N, \phi(g) = 0$ donc $Tg = g$. On a alors l'égalité $T(f + \phi(f)g) = Tf + \phi(f)g = f$ pour tout $f \in E$, et T est surjective. On a d'autre part :

$$Tf = 0 \Longrightarrow f = \phi(f)g \Longrightarrow \phi(f) = \phi(f)\phi(g) = \phi(f) \times 0 = 0 \Longrightarrow f = 0.$$

On a obtenu $\ker(T) = \{0\}$, c'est-à-dire que T est injective.

(iii) **T non continue.**

$(T - I)f = \phi(f)g$, donc $\|(T - I)f\| = |\phi(f)|\,\|g\|$.

Si T est continue, $T - I$ l'est aussi et il existe une constante $c > 0$ telle que $\|(T - I)f\| \leq c\|f\|$ pour tout $f \in E$, autrement dit $|\phi(f)| \leq \frac{c}{\|g\|}\|f\|$, et donc ϕ est continue, ce qui est contradictoire.

(4) (i) (a) **Caractère de norme.**

$\|Tf\|_\infty \geq 0$ donc $\|f\|_T \geq 0$.

T est linéaire, $\| \ \|_\infty$ est une norme, et

$$\|f + f'\|_T = \|Tf + Tf'\|_\infty \leq \|f\|_T + \|f'\|_T$$

et enfin, pour $z \in \mathbb{C}$, $\|zf\|_T = |z| \, \|f\|_T$.

Comme T est injective, $\|f\|_T = 0 \Leftrightarrow f = 0$, et $\| \ \|_T$ est bien une norme.

(b) **Caractère complet.** Par définition, T est une isométrie linéaire de $(E, \| \ \|_T)$ sur le Banach $(E, \| \ \|_\infty)$. Et comme on l'a déjà vu dans l'Ex. I.3, un espace normé linéairement isométrique à un espace de Banach est lui-même de Banach.

(ii) **Normes non équivalentes.**

Si les normes sont équivalentes, l'application identité de $(E, \| \ \|_\infty)$ dans $(E, \| \ \|_T)$ est continue, et il existe une constante h telle que l'on ait

$$\text{Pour tout } f \in E, \|f\|_T = \|Tf\|_\infty \leq h\|f\|_\infty.$$

Cette inégalité entraînerait la continuité de T, qui n'a pas lieu. Les normes ne sont donc pas équivalentes. On a même un exemple intéressant de deux normes à la fois *banachiques et non-comparables* sur E. Car si elles étaient comparables, elles seraient équivalentes contrairement à ce qui précède, par exemple d'après le théorème de l'application ouverte. Un tel exemple paraît difficile à trouver sans l'emploi du lemme de Zorn (P 3.1).

Exercice III.11

(1) Pour $z \in D$ et $t \in [0, 1]$, on a :

$$f_z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \varphi_n(t),$$

la série du membre de droite convergeant normalement (puisque nous avons $\|z^n \varphi_n\|_\infty = |z|^n$), donc uniformément, sur $[0, 1]$. On a donc, au sens de la norme de E, l'égalité demandée $f_z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \varphi_n$.

(2) Soit $z \in D$ fixé. La série $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \varphi_n$ converge dans E et L est linéaire, continue sur E, donc on peut intervertir les signes L et $\sum_0^\infty$ et on a

$$F(z) = L(f_z) = L\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \varphi_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n L(\varphi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} L(\varphi_n) z^n.$$

(3) On a successivement :

(i) Par hypothèse $F(z_k) = L(f_{z_k}) = 0$.

(ii) Soit $K = \{z; |z| \leq r\}$, compact de D puisque $r < 1$. La fonction F s'annule sur la suite infinie (z_k) de points de K qui a (Bolzano-Weierstrass) un point d'accumulation dans K. D'après l'analyticité de F, somme de série entière convergente dans D (principe de *l'unicité* du prolongement analytique), F est nulle sur D, donc tous les coefficients $L(\varphi_n)$ de cette série entière sont nuls.

(iii) Soit $V = \mathrm{Vect}\,(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$. D'après le théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass, V est dense dans E. D'après la partie facile de l'Ex. III.8, $L = 0$ puisque L est nulle sur V. On a ainsi montré que

$$M^{\perp} = \{0\}, \text{ ou encore : pour tout } L \in E^*, L = 0 \text{ sur } M \Longrightarrow L = 0.$$

D'après la partie difficile de ce même exercice, on conclut que $\overline{M} = E$, ce qu'il fallait démontrer. Notons que les fonctions $(f_z)_{|z| \leq r < 1}$ forment un exemple intéressant de système *hypertotal* de E, en ce sens que *toute* partie infinie de ces fonctions est totale dans E, comme on vient de le voir.

IV OPÉRATEURS CONTINUS ENTRE ESPACES NORMÉS

1 ÉNONCÉS

Exercice IV.1

Soient E et F deux espaces normés avec $E \neq \{0\}$.

Montrer que [F complet] $\Leftrightarrow$ [$\mathcal{L}(E, F)$ complet].

Exercice IV.2

Soit $E = \ell^2$ (D 1.15), $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée dans $\mathbb{C}$ et $M = \sup_n |\lambda_n|$. Soit $T : \ell^2 \to \ell^2$ définie par : $Tx = y$, avec $y = (\lambda_n x_n)_{n\geq 1}$ si $x = (x_n)_{n\geq 1} \in E$.

(1) Montrer que T est linéaire, continue, et calculer sa norme (*cf.* P 2.5).

(2) Montrer que si l'ensemble $\{|\lambda_n|, n \geq 1\}$ est minoré par un nombre strictement positif, alors T est bijective.

Préciser dans ce cas T^{-1} et déterminer sa norme.

(3) On suppose que l'un des λ_n est nul. Montrer que T n'est ni injective ni surjective et que $\overline{\mathrm{Im}(T)} \neq E$.

(4) On suppose que $\forall n \geq 1, \lambda_n \neq 0$ et $\inf(|\lambda_n|, n \geq 1) = 0$. Montrer que T est injective mais non surjective et que $\overline{\mathrm{Im}(T)} = E$.

(5) Quel est le spectre de T ?

Exercice IV.3

Soit, pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}^*)$ (*cf.* D 1.15) et $T : \ell^p \to \ell^p$ le « backward » shift défini par : $T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$.

(1) Montrer que $T \in \mathcal{L}(\ell^p)$ et calculer la norme de T.

(2) Déterminer $\sigma(T)$, et préciser les sous-espaces propres (D 10.4).

Exercice IV.4 : Propriétés du shift unilatéral

Soit $H = \ell^2$, et (e_j) la base hilbertienne canonique de H, i.e. e_j est la suite dont tous les éléments sont nuls sauf celui de rang j qui vaut 1. On note $H_0 = \mathrm{Vect}\{e_n; n \in \mathbb{N}^*\}$.

$S_0 : H_0 \to H_0$ est l'application linéaire définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_0 e_n = e_{n+1}$, puis prolongée à H_0 par linéarité.

(1) Montrer que S_0 peut être prolongée de manière unique sur H entier comme application linéaire continue S de H dans H. Montrer que S (le shift unilatéral) est isométrique. Quelle est sa norme ?

(2) Montrer qu'il existe un élément T de $\mathcal{L}(H)$ tel que $TS = I$, mais que S n'est pas inversible dans $\mathcal{L}(H)$.

(3) Montrer que, pour $\mu \in \mathbb{C}$, l'équation en $x, Sx = \mu x$ n'admet que la solution $x = 0$.

(4) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $Sx - \lambda x = e_p$.

(5) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| \neq 1$. Montrer que $r = \inf\{\|(S - \lambda I)x\|; \|x\| = 1\}$ est strictement positif. En déduire que $\mathrm{Im}(S - \lambda I)$ est un sous-espace fermé de H.

(6) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| = 1$.

Étudier la suite $((S - \lambda I)f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $f_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=1}^{n} \lambda^{-p} e_p$.

En déduire que $G = \mathrm{Im}(S - \lambda I)$ n'est pas fermé dans H.

(7) Montrer que le spectre $\sigma(S)$ de S est le disque unité fermé. On étendra ce résultat à une isométrie non-surjective quelconque dans l'Ex. V.6.

Exercice IV.5

Soit $E = \mathbb{C}[X]$ l'espace des polynômes complexes et notons pour $P \in E$,

$$\|P\| = \sum_{n=0}^{\infty} \|P^{(n)}\|_\infty$$

avec $\|P\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$ et $P^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de P. Alors $\|P\|$ est une norme sur E et l'application $T : E \to E$ définie par $T(P) = P'$, est linéaire continue (voir Ex. II.4). Montrer que $\sigma(T) = \{0\}$ et $\sigma_{\mathrm{sur}}(T) = \emptyset$, où $\sigma_{\mathrm{sur}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(T - \lambda I) \neq E\}$ est le *spectre surjectif* de T. Ceci est en violent contraste avec le cas des espaces de Banach, comme on le verra dans l'Ex. IV.12.

Exercice IV.6

Soit E un espace de Banach et $T, S \in \mathcal{L}(E)$.

(1) (i) Montrer que si $TS = ST$, alors TS est inversible si et seulement si T et S sont inversibles.

(ii) Montrer par un exemple que si $TS \neq ST$, (i) peut être faux.

(2) Montrer que si P est un polynôme complexe, alors

$$\sigma(P(T)) = P(\sigma(T)) \stackrel{def}{=} \{w = P(z);\ z \in \sigma(T)\}.$$

Exercice IV.7

Soit $E = \mathcal{C}([0,1]$ muni de la norme $\| \|_\infty$ et pour $f \in E$, on définit

$$Tf(x) = \int_0^x K(x,t)f(t)dt$$

où $K(\ ,\ ) \in \mathcal{C}([0,1] \times [0,1])$. Soit $M = \sup_{0\leq x,t\leq 1} |K(x,t)|$.

(1) Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$.

(2) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $|T^n f(x)| \leq \frac{M^n}{n!} x^n \|f\|_\infty$.
En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $\|T^n\| \leq \frac{M^n}{n!}$.

(3) Déterminer le spectre de T.

Exercice IV.8 : Opérateur de Volterra

Soit $E = \mathcal{C}([0,1]$ muni de la norme $\| \|_\infty$ et pour $f \in E$, on définit

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

(1) (i) Montrer que, pour $n \geq 1$, on a $T^n f(x) = \int_0^x K_n(x,t)f(t)dt$ où $K_n(x,t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$.
(ii) En déduire la valeur de la norme $\|T^n\|$, $n \geq 1$.

(2) Calculer la somme $\sum_{n\geq 1} T^n$.

(3) Résoudre l'équation $(I - T)f = g$, où $g \in E$.

Exercice IV.9

Pour X, Y espaces de Banach, on note $\mathcal{L}(X,Y)$ l'ensemble des applications linéaires continues de X dans Y, puis $I(X,Y)$ le sous-ensemble de celles qui sont injectives d'image fermée, et $S(X,Y)$ le sous-ensemble de celles qui sont surjectives. E, F sont deux espaces de Banach, E^*, F^* leurs duaux topologiques. Lorsque $T \in \mathcal{L}(E,F)$, on note $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ son transposé.

(1) Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Établir l'équivalence

$$[T \in I(E,F)] \iff [\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in E, \|Tx\| \geq \alpha \|x\|].$$

(2) Montrer que $I(E, F)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E, F)$.

(3) Montrer les équivalences suivantes :

$$T \in S(E, F) \Longleftrightarrow T^* \in I(F^*, E^*). \qquad (IV.1)$$

$$T \in I(E, F) \Longleftrightarrow T^* \in S(F^*, E^*). \qquad (IV.2)$$

(4) Montrer que $S(E, F)$ est aussi un ouvert de $\mathcal{L}(E, F)$.

Exercice IV.10

Soit E, F des espaces de Banach. On conserve les notations de l'Ex. IV.9. On note B_X la boule unité fermée de l'espace normé X.

(1) Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Im (T) est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace d'arrivée

(b) $\exists C > 0$ tel que $\forall y \in B_{\mathrm{Im}(T)}, \exists x \in E$ avec $y = Tx$ et $\|x\| \leq C\|y\|$

(c) $\exists C > 0$ tel que $\forall y \in \mathrm{Im}(T), \exists x \in E$ avec $y = Tx$ et $\|x\| \leq C\|y\|$.

(2) Montrer (autre approche que celle de l'Ex. IV.9) que l'ensemble $S(E, F)$ forme un ouvert (éventuellement vide) de $\mathcal{L}(E, F)$.

(3) Donner des exemples de Banach séparables de dimension infinie E, F tels que $I(E, F) = \emptyset$ ou(et) $S(E, F) = \emptyset$.

Exercice IV.11

(1) Soit E un espace normé et $\mathcal{GL}(E) = \{T \in \mathcal{L}(E); T^{-1} \in \mathcal{L}(E)\}$.

Montrer que si E est complet alors $\mathcal{GL}(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E)$ et que l'application $T \mapsto T^{-1}$ de $\mathcal{GL}(E)$ dans $\mathcal{GL}(E)$ est continue.

(2) Soit $E = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}; x_n \in \mathbb{C}, x_n = 0$ sauf pour un nombre fini de $n\}$ muni de la norme $\| \ \|_p$, $p \geq 1$ et soit $T : E \to E$ (shift unilatéral) défini par

$$T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots).$$

(i) Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$.

(ii) Montrer que $\forall \varepsilon > 0, I - \varepsilon T$ n'est pas surjective.

(iii) En déduire que $\mathcal{GL}(E)$ n'est pas ouvert dans $\mathcal{L}(E)$.

Exercice IV.12

Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, E) = \mathcal{L}(E)$. On rappelle que, avec les notations des exercices 9 et 10, en posant $S(X) = S(X, X)$ ainsi que $I(X) = I(X, X)$, on a les équivalences

$$T \in S(E) \Longleftrightarrow T^* \in I(E^*)$$
$$T \in I(E) \Longleftrightarrow T^* \in S(E^*).$$

(1) En déduire que $\sigma_{\mathrm{ap}}(T) = \sigma_{\mathrm{sur}}(T^*)$,

où $\sigma_{ap}(T) = \{\lambda;\ T - \lambda I$ n'est pas injectif à image fermée$\}$ est le « spectre approximatif » de T.

(2) Le but de la question est de montrer que $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{\mathrm{ap}}(T)$ et aussi que $\sigma_{\mathrm{sur}}(T) \neq \emptyset$.

(a) Soit $\lambda \in \partial\sigma(T)$ et $\lambda_n \notin \sigma(T)$ tel que $\lambda_n \to \lambda$. Montrer que

$$\|(T - \lambda_n I)^{-1}\| \to \infty \text{ quand } n \to \infty.$$

(b) Montrer que $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ap}}(T)$.

(c) En déduire que $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{\mathrm{ap}}(T)$.

(d) Montrer qu'on a $\sigma_{\mathrm{sur}}(T) \neq \emptyset$, comme annoncé.

Exercice IV.13

Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$. On dira que T vérifie l'équation de Daugavet si $\|I + T\| = 1 + \|T\|$ (*cf.* aussi Ex. VIII.10).

Montrer que si $\|T\| \in \sigma(T)$ (*cf.* D 10.13), alors T vérifie l'équation de Daugavet.

2 Solutions

Exercice IV.1

(i) $\Rightarrow$:

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E,F)$ et soit $\varepsilon > 0$.

$$\exists N(\varepsilon) \text{ tel que } p \geq 0, n \geq N(\varepsilon) \text{ entraîne } \|A_{n+p} - A_n\| \leq \varepsilon,$$

et donc $\|(A_{n+p} - A_n)x\| \leq \|A_{n+p} - A_p\| \, \|x\| \leq \varepsilon\|x\|$ pour tout $x \in E$, ce qui montre que la suite $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans F complet, et converge donc vers une limite $A(x) = Ax$, qui dépend linéairement de x puisque c'est le cas de chaque A_n.

Lorsque p tend vers l'infini à n fixé dans l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\|(A - A_n)x\| \leq \varepsilon\|x\| \,;$$

il en résulte que $A - A_n \in \mathcal{L}(E,F)$, donc que $A \in \mathcal{L}(E,F)$. Il en résulte aussi que, dans les mêmes conditions sur n, $\|A - A_n\| \leq \varepsilon$. Ceci exprime que A est la limite de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathcal{L}(E,F)$.

(ii) $\Leftarrow$:

Supposons $\mathcal{L}(E,F)$ complet. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de Cauchy dans F, et soit $x_0 \in E$, $\|x_0\| = 1$. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in E^*$ telle que $\|f\| = f(x_0) = \|x_0\| = 1$. Soit maintenant, l'application $A_n = y_n \otimes f : E \to F$, définie par $A_n x = f(x) y_n$. Alors $A_n \in \mathcal{L}(E,F)$. De plus,

$$A_n - A_p = (y_n - y_p) \otimes f \text{ et } \|A_n - A_p\| = \|y_n - y_p\| \, \|f\| = \|y_n - y_p\|.$$

Ceci montre que la suite (A_n) est de Cauchy. Par hypothèse elle converge dans $\mathcal{L}(E,F)$ vers une limite A.

Par ailleurs $A_n x_0 = f(x_0) y_n = y_n$ et donc $\lim_n y_n = \lim_n A_n x_0 = A x_0$. On a ainsi établi que la suite $(y_n)_n$ est convergente, et que F est complet.

Exercice IV.2

(1) (i) La linéarité de T est évidente. Soit $M = \sup_{n\geq 1} |\lambda_n|$.

Si $x = (x_n)_n \in \ell^2$, alors

$$\|Tx\|_2^2 = \sum_{n\geq 1} |\lambda_n x_n|^2 \leq M^2 \sum_{n\geq 1} |x_n|^2 = M^2 \|x\|_2^2.$$

D'où $Tx \in E$ et $\|Tx\|_2 \leq M\|x\|_2$, ce qui montre que T est continue et que $\|T\| \leq M$. Soit $(e_n)_n$ la base hilbertienne canonique de E. Alors pour tout n, $\|Te_n\|_2 = |\lambda_n| \leq \|T\|$. D'où $M \leq \|T\|$, puis $\|T\| = M$.

(2) Soit $a = \inf_{n\geq 1} |\lambda_n|$. On suppose $a > 0$. Alors
$\|Tx\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n x_n|^2 \geq a^2 \|x\|^2$.

Donc $Tx = 0$ implique $x = 0$; T est injective.

Remarquons d'abord que pour tout n, $\lambda_n \neq 0$. Soit $y = (y_n)_n \in E$ et $x = (\frac{y_n}{\lambda_n})_n$. Alors pour tout n, on a $|\frac{y_n}{\lambda_n}|^2 \leq \frac{1}{a^2}|y_n|^2$, d'où $x \in E$ et $Tx = y$. Ceci montre que T est surjective et donc inversible et $T^{-1}y = x$ avec $y = (y_n)_n \in E$ et $x = (\frac{y_n}{\lambda_n})_n \in E$.

(3) Supposons $\lambda_p = 0$ pour un entier p. On note e_p la suite dont le seul élément non nul est de rang p et vaut 1. Alors $Te_p = 0$ et T n'est pas injective. Elle n'est pas non plus surjective, car il facile de voir que si $(x_n)_n \in \mathrm{Im}(T)$ alors $x_p = 0$, si bien que $e_p \notin \mathrm{Im}(T)$.

On a $\mathrm{Im}(T) \subseteq \{(x_n)_n \in E;\ x_p = 0\} \overset{def}{=} F_p \neq E$. Pour montrer que $\mathrm{Im}(T)$ n'est pas dense dans E, il suffit de montrer que F_p est fermé dans E. Soit pour cela $f : E \to \mathbb{C}$ la forme linéaire définie par $f((x_n)_n) = x_p$. Elle est continue, car $|f((x_n)_n)| = |x_p| \leq \|(x_n)_n\|_2$. Donc

$$F_p = \ \ker(f) \text{ est fermé dans } E.$$

(4) (i) Si tous les λ_n sont non nuls, l'étude précédente montre que si $y = Tx$, alors $x_n = (\lambda_n)^{-1}y_n$; T est donc injective. Elle montre aussi que chaque e_n, image de $(\lambda_n)^{-1}e_n$, est dans $\mathrm{Im}(T)$, qui est donc dense dans E.

T n'est pas surjective car sinon, par le théorème d'isomorphisme de Banach, T^{-1} serait continue. Or, d'après (1), on aurait

$$\|T^{-1}\| = \sup_n \frac{1}{|\lambda_n|} = \frac{1}{\inf_n |\lambda_n|} = +\infty!$$

(5) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x = (x_n)_n \in E, (T - \lambda I)x = z$, avec $z_n = (\lambda_n - \lambda)x_n$.

Notons $S = T - \lambda I, \mu_n = \lambda_n - \lambda$. La suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. Les résultats des questions précédentes sont donc applicables.

Si $\lambda = \lambda_p$ pour un p, alors λ est une valeur propre de T (puisque S n'est pas injective, d'après (3)).

Soit $\Lambda = \overline{\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}^*\}}$; $\forall \lambda \in \Lambda$ on est soit dans le cas précédent, soit dans celui de (4) pour la famille $\{\mu_n; n \in \mathbb{N}^*\}$. S est donc non surjective, ce qui montre que $\Lambda \subseteq \sigma(T)$.

Si $\lambda \notin \Lambda, d(\lambda, \Lambda) = a > 0$; S satisfait donc aux hypothèses de (2), et elle est inversible.

On a montré que $\sigma(T) = \Lambda$ et $\sigma_p(T) = \{\lambda_n; n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice IV.3

Rappelons que

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \text{ si } p < \infty \text{ et } \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}^*}(|x_n|) \text{ si } p = \infty.$$

On note $e_n, n \in \mathbb{N}^*$, la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui de rang n qui vaut 1. Pour $p < \infty$, les e_n forment une « base » de ℓ^p, c'est-à-dire :

$$x = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} x_n e_n\right).$$

On remarque que $Te_1 = 0$ et que $n \geq 2 \Longrightarrow Te_n = e_{n-1}$.

(1) Pour $p < \infty$ et $x = (x_n)_n \in \ell^p$, on a

$$\|Tx\|_p^p = \sum_{n\geq 2} |x_n|^p \leq \sum_{n\geq 1} |x_n|^p = \|x\|_p^p.$$

La linéarité étant évidente, on a montré que $Tx \in \ell^p$, T est continue et $\|T\| \leq 1$.
De plus, $\|T\| \geq \|Te_2\|_p = \|e_1\|_p = 1$, d'où $\|T\| = 1$.

(2) On a $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leq \|T\|\} = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leq 1\}$.
Si $|\lambda| < 1$ alors la suite $x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$ est dans ℓ^p et l'on a
$(T - \lambda I)x_\lambda = (\lambda, \lambda^2, \ldots) - \lambda(1, \lambda, \lambda^2, \ldots) = 0$.
Donc

$$\{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| < 1\} \subseteq \sigma_p(T) \subseteq \sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leq 1\}.$$

Et comme le spectre est fermé, $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leq 1\}$.
D'autre part, si $\lambda \in \sigma_p(T)$ alors $(T - \lambda I)x = 0$ avec $0 \neq x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^p$. On voit facilement que $x_n = \lambda^{n-1}x_1$. Cela implique $|\lambda| < 1$ et $x = x_1 x_\lambda$.
Par conséquent, $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| < 1\}$ et pour $\lambda \in \sigma_p(T)$, le sous-espace propre associé à λ est engendré par le vecteur x_λ. Il est de dimension un.
Pour $p = \infty$, le même raisonnement que plus haut montre que $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,;$ $|\lambda| \leq 1\}$. En effet, pour $|\lambda| = 1$, $x_\lambda \overset{def}{=} (1, \lambda, \lambda^2, \ldots) \in \ell^\infty$.

Exercice IV.4

(1) (i) Pour $y = \sum_{n=1}^p y_n e_n \in \operatorname{Vect}\{e_n; n \in \mathbb{N}^*\}$, $S_0 y = \sum_{n=1}^p y_n e_{n+1}$ et

$$\|S_0 y\|^2 = \sum_{n=1}^p |y_n|^2 = \|y\|^2. \qquad (IV.3)$$

S_0 est donc une isométrie (D 4.16) et elle est continue.
Puisque $\operatorname{Vect}\{e_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans ℓ^2, S_0 se prolonge de manière unique en une application S. Si $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n \in \ell^2$ et si pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note $x_{(N)} = \sum_{n=1}^N x_n e_n$, on a $\lim_N \|x - x_{(N)}\| = 0$ et

$$Sx = \lim_N S_0 x_{(N)} = \sum_{n=1}^\infty x_n e_{n+1}. \qquad (IV.4).$$

Les égalités $(IV.3)$ et $(IV.4)$ entraînent que S est aussi une isométrie. Sa norme est égale à 1.

(2) (i) Soit T_0 l'application définie sur $\operatorname{Vect}\{e_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ par $T_0 e_1 = 0$ et $T_0 e_n = e_{n-1}$ pour $n \geq 2$.

Pour $x = \sum_{n=1}^{N} x_n e_n$,

$$T_0 x = \sum_{n=2}^{N} x_n e_{n-1} \text{ et } \|T_0 x\| \leq \left(\sum_{n=2}^{N} |x_n|^2 \right)^{1/2} \leq \|x\|.$$

L'application T_0 est donc continue, et se prolonge en une application $T : \ell^2 \to \ell^2$. D'autre part, pour tout $n \geq 1$, $TSe_n = e_n$. Donc $TS = I$ et d'ailleurs $T = S^*$ comme c'est le cas pour toute isométrie S.

Si S était inversible, T le serait aussi et $T^{-1} = S$. Mais T n'est pas injective, puisque $Te_1 = 0$!

(3) Soit $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ tel que $Sx - \mu x = 0$. Cela entraîne :

$$0 = Sx - \mu x = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n e_{n+1} - \mu x_n e_n) = \sum_{n=2}^{\infty} (x_{n-1} - \mu x_n) e_n - \mu x_1 e_1. \qquad (IV.5).$$

Si $\mu = 0$, il faut annuler chaque x_n, et la seule solution est $x = 0$.

Si $\mu \neq 0$, on doit avoir $x_1 = 0$ puis tous les autres x_n nuls. La seule solution est encore $x = 0$. S n'admet donc aucune valeur propre.

(4) Pour $\lambda \in \mathbb{C}, p \in \mathbb{N}$, considérons l'équation $Sx - \lambda x = e_p$. Puisque par (IV.5), $S - \lambda I$ est injectif, elle a au plus une solution.

(i) $\boldsymbol{\lambda = 0}$**.** Si $p = 1$, il n'y a pas de solution. Si $p > 0$, la solution est donnée par $x = e_{p-1}$.

(ii) $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$**.**

$$e_p = Sx - \lambda x = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n e_{n+1} - \lambda x_n e_n) = \sum_{n=2}^{\infty} (x_{n-1} - \lambda x_n) e_n - \lambda x_1 e_1. \qquad (IV.6)$$

Si $p = 1$ alors les x_n vérifient

$$x_1 = -\lambda^{-1}, \quad \forall n > 1, x_n = \lambda^{-1} x_{n-1} = -\lambda^{-n}. \qquad (IV.7)$$

La série de terme général $|x_n|^2$ est convergente si et seulement si $|\lambda| > 1$. Dans ce cas, la solution est donnée par $x = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} e_n$.

Si $p \geq 2$, les x_n vérifient

$$\begin{cases} x_{n-1} - \lambda x_n = 0, \text{ donc } x_n = 0 & \text{si } n < p \\ x_{p-1} - \lambda x_p = 1, \text{ donc } x_p = -\lambda^{-1} & \text{si } n = p \\ x_n = \lambda^{-1} x_{n-1} = -\lambda^{-(n-p+1)} & \text{si } n > p \end{cases}$$

Comme dans le cas précédent, il existe une solution seulement si et seulement si $|\lambda| > 1$, et cette solution est donnée par

$$x = -\sum_{n=p}^{\infty} \lambda^{-(n-p+1)} e_p.$$

(5) On a $\|Sx\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$. On utilise l'inégalité du triangle pour écrire

$$\forall x \in H, \quad \|(S - \lambda I)x\| \geq \||\lambda| - 1|\, \|x\| \tag{$IV.8$}$$

On voit alors que

$$r = \inf\{\|(S - \lambda I)x\|;\ \|x\| = 1\} \geq \||\lambda| - 1| > 0.$$

Cela implique que $\operatorname{Im}(S - \lambda I)$ est fermée selon un raisonnement qui sera détaillé dans l'Ex. IV.9.

(6) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$. Pour $f_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=1}^{n} \lambda^{-p} e_p$, on a

$$(S - \lambda I) f_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{p=1}^{n} \lambda^{-p} e_{p+1} - \sum_{p=1}^{n} \lambda^{-(p-1)} e_p \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} (\lambda^{-n} e_{n+1} - e_1).$$

Donc, $\|f_n\| = 1$ et $\|(S - \lambda I) f_n\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$. Cela implique que $\operatorname{Im}(S - \lambda I)$ n'est pas fermée. Là aussi, nous renvoyons à l'Ex. IV.9.

(7) Par (1), $\|S\| = 1$. Donc $\sigma(S) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leq 1\}$.

D'après (4), $e_1 \notin \operatorname{Im}(S - \lambda I)$ si $|\lambda| < 1$. Donc $S - \lambda I$ n'est pas surjective si $|\lambda| < 1$, d'où la double inclusion

$$\{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| < 1\} \subseteq \sigma(S) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leq 1\}.$$

Et comme $\sigma(S)$ est fermé, $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \leq 1\}$.

Exercice IV.5

$\ker(T - \lambda I) = \{0\}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$. En effet, si $\lambda \neq 0$ alors $(T - \lambda I)P = 0$ implique $P' = \lambda P$. Ceci implique que le degré de P' est égal à celui de P et donc $P = 0$.

Si $\lambda = 0$, alors $TP = P' = 0 \iff P$ est constant et donc $\ker(T) \neq \{0\}$.

D'autre part, si $Q \in E$ alors l'équation $(T - \lambda I)P = Q$ admet une solution polynôme, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. En effet, si $\lambda = 0$, il n'y a qu'à prendre pour P un polynôme primitif de Q. Et si $\lambda \neq 0$, on a pour unique solution la série de Neumann P 10.1 (convergente car T est localement nilpotent)

$$P = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n Q}{\lambda^{n+1}}.$$

On constate en effet que

$$T(P) - \lambda P = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^n Q}{\lambda^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n Q}{\lambda^n} = Q.$$

Finalement, $\sigma_{\text{sur}}(T) = \emptyset$ et $\sigma(T) = \{0\}$. Comparer à l'Ex. IV.12.

Exercice IV.6

(1) (i) Supposons T et S inversibles, alors le produit TS est inversible et l'on a $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$.

Maintenant si $TS = ST$ est inversible, alors il existe A tel que $A(TS) = (TS)A = I$. D'où $(AT)S = S(TA) = I$, $(AS)T = T(SA) = I$ et par suite T et S sont inversibles, ayant un inverse à droite et un inverse à gauche.

(ii) Dans l'exercice IV.4 précédent, on a $TS = I$ donc le produit TS est inversible, mais ni S ni T ne le sont.

(2) Soit $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les racines du polynôme $P(z) - w$. Alors nous avons

$$P(z) - w = c(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n) \text{ et par suite}$$

$$P(T) - wI = c(T - z_1 I)(T - z_2 I)\ldots(T - z_n I).$$

En effet, si les $\sigma_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} z_{i_1} \ldots z_{i_k}$, pour $1 \le k \le n$, désignent les fonctions symétriques élémentaires des racines de

$$Q(z) \stackrel{def}{=} P(z) - w = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = c(z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \sigma_2 z^{n-2} \pm \ldots),$$

nous avons (*par définition pour les deux premières égalités*)

$$Q(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k = c(T^n - \sigma_1 T^{n-1} + \sigma_2 T^{n-2} \pm \ldots) = c(T - z_1 I)\ldots(T - z_n I),$$

la dernière égalité s'obtenant de droite à gauche par un développement du produit $(T - z_1 I)\ldots(T - z_n I)$.

Comme les $T - z_k I$, $k = 1, \ldots, n$ commutent, il résulte de (1) que $P(T) - wI$ est inversible si et seulement si $T - z_k I$ est inversible pour $k = 1, \ldots, n$.

Donc si $w \in \sigma(P(T))$, $P(T) - wI$ n'est pas inversible, et il existe z_k tel que $T - z_k I$ ne soit pas inversible (i.e. $z_k \in \sigma(T)$). Puisque z_k est racine de $P(z) - w$, on a $P(z_k) = w$. Ceci montre que $\sigma(P(T)) \subseteq P(\sigma(T))$.

Pour l'autre inclusion, soit $w = P(z') \in P(\sigma(T))$ avec $z' \in \sigma(T)$. Alors $P(z') - w = 0$ et donc $z' = z_k$, une des racines du polynôme $P(z) - w$. Il en résulte que $P(T) - w = c(T - z_1 I)(T - z_2 I)\ldots(T - z' I)\ldots(T - z_n I)$. Comme $T - z' I$ n'est pas inversible, d'après (1) $P(T) - wI$ ne l'est pas non plus, et ainsi $w \in \sigma(P(T))$.

Ceci montre que $P(\sigma(T)) \subseteq \sigma(P(T))$ et finalement

$$\sigma(P(T)) = P(\sigma(T)).$$

Exercice IV.7

(1) La linéarité de T est évidente. Pour $x, x_0 \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}|Tf(x) - Tf(x_0)| &= \Big| \int_0^{x_0} [K(x,t) - K(x_0,t)]f(t)dt + \int_{x_0}^{x} K(x,t)f(t)dt \Big| \\ &\leq \|f\|_\infty \int_0^{x_0} |K(x,t) - K(x_0,t)|dt + M\|f\|_\infty |x - x_0|.\end{aligned}$$

D'où $|Tf(x) - Tf(x_0)| \to 0$ quand $x \to x_0$ et donc $Tf \in E$.
D'autre part, on a

$$|Tf(x)| \leq Mx\|f\|_\infty. \qquad (IV.9)$$

D'où $\|Tf\| \leq M\|f\|_\infty$, et $T \in \mathcal{L}(E)$ avec $\|T\| \leq M$.

(2) Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a $|T^n f(x)| \leq \frac{M^n}{n!} x^n \|f\|_\infty$.
C'est vrai pour $n = 1$, par (IV.9). Supposons la formule vraie pour n. On a :

$$|T^{n+1} f(x)| = |\int_0^x K(x,t)T^n f(t)dt| \leq M \int_0^x |T^n f(t)|dt \leq \frac{M^{n+1}}{n!} \|f\|_\infty \int_0^x t^n dt$$

$$\text{soit } |T^{n+1} f(x)| \leq \frac{M^{n+1}}{n!} \frac{x^{n+1}}{n+1} \|f\|_\infty = \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} \|f\|_\infty.$$

Donc pour tout $n \geq 1$, on a $|T^n f(x)| \leq \frac{M^n}{n!} \|f\|_\infty x^n$, et ainsi $\|T^n\| \leq \frac{M^n}{n!}$.

(3) D'après (2), on a $\|T^n\|^{1/n} \leq \frac{M}{(n!)^{1/n}}$. Montrons alors que nous avons $u_n = (n!)^{1/n} \to +\infty$. En effet, $e^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} \geq \frac{n^n}{n!}$, d'où $n! \geq \frac{n^n}{e^n}$ et $u_n \geq \frac{n}{e}$.
Par conséquent, le rayon spectral $r(T)$ de T, dont la valeur est donnée par $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leq M \lim_{n\to\infty} u_n^{-1}$, est nul et $\sigma(T) = \{0\}$ (*cf.* P 10.3).

Exercice IV.8

(1) (i) Démontrons le résultat par récurrence. Pour $n = 1$, on a bien $K_1(x,t) = 1$.
Supposons le résultat vrai pour un $n \geq 1$, c'est-à-dire que $K_n(x,t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ et donc

$$T^n f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt$$

$$\text{et } T^{n+1} f(x) = \int_0^x (T^n f)(t)dt = \int_0^x \left[\int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u)du \right] dt.$$

En échangeant l'ordre d'intégration, on obtient

$$T^{n+1}f(x) = \int_0^x f(u)\left[\int_u^x \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}dt\right]du = \int_0^x \frac{(x-u)^n}{n!}f(u)du.$$

(ii) On a $|T^n f(x)| \leq \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}|f(t)|dt \leq \|f\|_\infty \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{x^n}{n!}\|f\|_\infty$.
D'où $\|T^n\| \leq \frac{1}{n!}$.
Maintenant, pour $f_0(t) = 1$ pour tout $t \in [0,1]$, on obtient

$$T^n f_0(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt = \frac{x^n}{n!},$$

d'où $\|T^n f_0\|_\infty = \frac{1}{n!}$, et finalement $\|T^n\| = \frac{1}{n!}$.

(2) On a $\sum_{n\geq 1}\|T^n\| = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!} = e-1$. Comme E est complet, la série $\sum_{n\geq 1} T^n$ est convergente et on a pour tout p entier :

$$\sum_{n=1}^p T^n f(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^p \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right) f(t)dt.$$

Soit $S : E \to E$ définie par, $Sf(x) = \int_0^x e^{x-t}f(t)dt$. Clairement, $S \in \mathcal{L}(E)$ et de plus

$$\begin{aligned}\left|\left(S - \sum_{n=1}^p T^n\right)f(x)\right| &\leq \int_0^x |e^{x-t} - \sum_{n=1}^p \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!})|\,|f(t)|dt \\ &\leq \|f\|_\infty \int_0^x |e^{x-t} - \sum_{n=1}^p \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!})|dt\end{aligned}$$

d'où, en faisant le changement de variable $u = x - t$, l'inégalité

$$\begin{aligned}|\left(S - \sum_{n=1}^p T^n\right)f(x)| &\leq \|f\|_\infty \int_0^x |e^u - \sum_{n=1}^p \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}|du \\ &\leq \|f\|_\infty \sup_{0\leq u\leq 1} |e^u - \sum_{n=1}^p \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}|.\end{aligned}$$

Donc, $\|S - \sum_{n=1}^p T^n\| \leq \sup_{0\leq u\leq 1}|e^u - \sum_{n=0}^{p-1}\frac{u^n}{n!}|$.
Comme la série $\sum_{n\geq 0}\frac{u^n}{n!}$ converge uniformément vers e^u sur tout compact de $\mathbb{R}$, il vient $S = \sum_{n\geq 1} T^n$ en faisant tendre p vers l'infini.

(3) En passant à la limite dans

$$(I-T)\left(\sum_{n=0}^{p} T^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{p} T^n\right)(I-T) = I - T^{p+1},$$

$$\text{on obtient } (I-T)^{-1} = \sum_{n\geq 0} T^n = I + S.$$

Soit maintenant $g \in E$, alors on a $f = (I-T)^{-1}g = (I+S)g$.
Soit encore $f(x) = g(x) + e^x \int_0^x e^{-t}g(t)dt$.

Exercice IV.9

(1) (i) **Implication ⇒.**

Supposons T injectif d'image fermée, et soit $G = \mathrm{Im}(T)$. G est un sous-espace vectoriel fermé de F complet, donc un espace de Banach. L'application $\widetilde{T} : E \to G$, définie par $x \mapsto Tx$ est une application linéaire continue bijective entre espaces de Banach. Par le théorème d'isomorphisme de Banach (P 2.16), elle admet un inverse continu, donc il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in E, \|x\| \leq C\|Tx\| \overset{def}{=} \frac{1}{\alpha}\|Tx\|.$$

(ii) **Implication ⇐.**

Supposons maintenant que

$$\forall x \in E, \|Tx\| \geq \alpha\|x\|.$$

Si $Tx = 0$ on a $x = 0$, et T est injective. Soit $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de Cauchy de $\mathrm{Im}(T)$. Alors

$$\forall p, q \in \mathbb{N}^*, \|Tx_p - Tx_q\| \geq \alpha\|x_p - x_q\|,$$

donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans E. Comme E est complet, elle converge vers une limite $x \in E$. Puisque T est continue, on voit que

$$\lim_{n\to+\infty} Tx_n = Tx \in \mathrm{Im}(T).$$

L'image de T est donc complète, a fortiori fermée dans F.

(2) Soit $T \in I(E,F)$. Par (1), il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in E, \|Tx\| \geq \alpha\|x\|$. Soit $U \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $\|T-U\| < \frac{\alpha}{2}$ et $x \in E$. Alors on a

$$\begin{aligned}\|Ux\| &= \|(U-T)x + Tx\| \geq \|Tx\| - \|(T-U)x\| \\ &\geq \alpha\|x\| - \|T-U\|\,\|x\| \geq \left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)\|x\| = \frac{\alpha}{2}\|x\|.\end{aligned}$$

Ainsi $\forall x \in E,\ \|Ux\| \geq \frac{\alpha}{2}\|x\|$. On déduit de (1) que $U \in I(E,F)$. Ceci montre que la boule ouverte de centre T et de rayon $\frac{\alpha}{2}$ est dans l'ensemble $I(E,F)$, qui est donc ouvert dans $\mathcal{L}(E,F)$.

(3) Supposons d'abord $T \in S(E, F)$. Par le théorème de l'application ouverte (P 2.15), il existe $C > 0$ tel que $B_F \subset T(CB_E)$. Si maintenant $y^* \in F^*$, on obtient successivement

$$\begin{aligned}\|T^*y^*\| &= \sup_{x\in B_E} |T^*y^*(x)| = \sup_{x\in B_E} |y^*(Tx)| = \sup_{z\in TB_E} |y^*(z)| \\ &\geq \sup_{y\in \frac{1}{C}B_F} |y^*(y)| = \frac{1}{C}\|y^*\|.\end{aligned}$$

D'après la question (1), cela implique $T^* \in I(F^*, E^*)$.
Supposons maintenant $T^* \in I(F^*, E^*)$. D'après (1), il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\|T^*y^*\| \geq \alpha\|y^*\|, \ \forall y^* \in F^*. \tag{IV.10}$$

Posons $C = \frac{1}{\alpha}$ et fixons $r \in]0, 1[$. Nous allons d'abord montrer l'inclusion

$$B_F \subset CT(B_E) + rB_F. \tag{IV.11}$$

En réalité, nous allons montrer l'inclusion plus forte

$$B_F \subset C\overline{T(B_E)} \tag{IV.12}$$

mais l'inclusion plus faible (IV.11) nous suffira à conclure que

$$B_F \subset \frac{C}{1-r}T(B_E) \tag{IV.13}$$

et en particulier que $T \in S(E, F)$, ce qui établira l'équivalence (IV.1). D'après Hahn-Banach (*cf.* P 3.14), (IV.12) revient à montrer que si $y \in B_F$, on a

$$|y^*(y)| \leq \sup_{z\in CT(B_E)} |y^*(z)|. \tag{IV.14}$$

Or, le membre de droite de (IV.14) vaut, via (IV.10) :

$$C \sup_{x\in B_E} |y^*(Tx)| = C \sup_{x\in B_E} |T^*y^*(x)| = C\|T^*y^*\| \geq \|y^*\|$$

tandis que, puisque $y \in B_F$, le membre de gauche de (IV.14) est majoré par $\|y^*\|$, ce qui prouve (IV.14) et (IV.12), a fortiori (IV.11). Pour passer de (IV.11) à (IV.13), *on emploie un argument de série qui sera détaillé dans l'exercice suivant, et qu'on se contente donc d'esquisser ici* : soit $y \in B_F$; on construit par récurrence une suite (x_n) de points de norme $\leq C$ telle que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\|y - \sum_{j=1}^{n} r^{j-1}Tx_j\| \leq r^n. \tag{IV.15}$$

Ensuite, la série $\sum_{j=1}^{\infty} r^{j-1}x_j$ est absolument convergente dans E complet, donc converge vers $x \in E$ tel que

$$\|x\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} Cr^{j-1} = \frac{C}{1-r},$$

si bien que $y = Tx$ avec $\|x\| \leq \frac{C}{1-r}$, ce qui prouve (IV.13) sachant (IV.11). Tournons-nous maintenant vers l'équivalence (IV.2). Nous ne pouvons pas raisonner par dualité, car les espaces E, F n'ont aucune raison d'être réflexifs, c'est-à-dire de coïncider avec leurs biduaux.

(a) Supposons que $T \in I(E, F)$ et soit $T_0 = T : E \to \mathrm{Im}(T)$. Alors T_0 est bijectif entre espaces de Banach, et donc inversible.

Soit maintenant $x^* \in E^*$. La forme linéaire $y \mapsto \langle x^*, T_0^{-1} y\rangle$ est continue sur $\mathrm{Im}(T)$, et par le théorème de Hahn-Banach P 3.4, elle se prolonge en $y^* \in F^*$ telle que $\langle y^*, y\rangle = \langle x^*, T_0^{-1} y\rangle \forall y \in \mathrm{Im}(T)$. En particulier, avec $y = Tx$:

$$x \in E \Longrightarrow \langle T^* y^*, x\rangle = \langle y^*, Tx\rangle = \langle x^*, T_0^{-1} T x\rangle = \langle x^*, x\rangle.$$

L'élément $x \in E$ étant arbitraire, on en déduit $x^* = T^* y^*$, et comme $x^* \in E^*$ est quelconque, on a bien montré que T^* est surjectif : $T^* \in S(F^*, E^*)$.

(b) Supposons ensuite que $T^* \in S(F^*, E^*)$. Par le théorème l'application ouverte, il existe $C > 0$ tel que $B_{E^*} \subseteq C T^*(B_{F^*})$. On pose $\alpha = \frac{1}{C}$.

Soit $x \in E$, alors en utilisant deux fois le théorème de Hahn-Banach P 3.4, dans E et dans F, nous avons :

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \sup_{y^* \in B_{F^*}} |\langle y^*, Tx\rangle| = \sup_{y^* \in B_{F^*}} |\langle T^* y^*, x\rangle| = \sup_{z^* \in T^* B_{F^*}} |\langle z^*, x\rangle| \\ &\geq \frac{1}{C} \sup_{x^* \in B_{E^*}} |\langle x^*, x\rangle| = \alpha \|x\|. \end{aligned}$$

D'où $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$, et $T \in I(E, F)$ par la question (1). L'équivalence (IV.2) est établie.

(4) Cette question sera également traitée dans l'Ex. IV.10, voici une solution alternative : soit

$$\Phi : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(F^*, E^*), \phi(T) = T^*.$$

L'application Φ est continue, car c'est une isométrie. D'autre part, les équivalences de la question (3) permettent d'écrire :

$$S(E, F) = \Phi^{-1}\big(I(F^*, E^*)\big). \qquad (IV.16)$$

Mais $I(F^*, E^*)$ est ouvert d'après la question (2), donc (IV.16) montre que $S(E, F)$ est ouvert, comme image inverse d'un ouvert par une application continue.

Exercice IV.10

(1) **(a) ⇒ (b).**

Supposons que $G = \mathrm{Im}(T)$ est fermé. Puisque F est un espace de Banach, G en est aussi un. Soit $T : E \to G$ définie par $x \mapsto Tx$. Alors T est surjective entre espaces de Banach, et nous pouvons invoquer le théorème de l'application ouverte P 2.15, qui nous fournit un $\delta > 0$ tel que $\delta B_{\mathrm{Im}(T)} \subseteq T(B_E)$, ce qui implique $B_{\mathrm{Im}(T)} \subseteq \frac{1}{\delta} T(B_E)$. On prend $C = \frac{1}{\delta}$.

(b) ⇒ (c).

Soit maintenant, $0 \neq y \in \mathrm{Im}(T)$, alors $\frac{y}{\|y\|} \in B_{\mathrm{Im}(T)} \subseteq CT(B_E)$. Donc il existe $x' \in E$ tel que $\|x'\| \leq C$ et $\frac{y}{\|y\|} = T(x')$. D'où, avec $x = \|y\|x'$, les relations $y = T(x)$ et $\|x\| = \|y\|\,\|x'\| \leq C\|y\|$.

(c) ⇐ (a).

Cette question a déjà été traitée en détail dans (1) de l'Ex. IV.9.

(2) Supposons T surjective. D'après (1), on a

$$\exists C > 0 \text{ tel que } B_F \subset CT(B_E).$$

Sans perte de généralité, quitte à remplacer T par $\frac{T}{C}$, on peut supposer $C = 1$. Soit $0 < r < 1$ et soit $U \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $\|T - U\| < r$. Montrons que U est surjective.

Soit $y = y_1 \in B_F$. Alors $\exists\, x_1 \in B_E$ tel que $Tx_1 = y_1$ (on a supposé $C = 1$).

Soit $y_2 = (T - U)x_1$. On voit que

$$\|y_2\| = \|(T - U)x_1\| \leq \|T - S\|\,\|x_1\| \leq r.$$

Donc, $\exists\, x_2 \in E;\ Tx_2 = y_2,$ et $\|x_2\| \leq r$.

Par récurrence, on construit une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ telle que

$$Tx_n = y_n \text{ et } y_{n+1} = (T - U)x_n;\ \|y_{n+1}\| \leq r^n;\ \|x_{n+1}\| \leq r^n.$$

On a alors pour chaque entier $n \geq 1$ la relation

$$y = y_1 = Ux_1 + Ux_2 + \ldots + Ux_n + y_{n+1}.$$

Mais puisque $\|x_{n+1}\| \leq r^n$, la série $\sum_{n\geq 1} x_n$ est convergente car absolument convergente dans E complet, soit $x = \sum_{n\geq 1} x_n$ sa somme. On a clairement $Ux = y$. Ceci montre que U est surjective. Et par conséquent l'ensemble $S(E, F)$ des surjections linéaires continues forme un ouvert de $\mathcal{L}(E, F)$, résultat qu'on a vu dans l'Ex. IV.9 par une autre méthode.

(3) Cette question est posée à titre culturel, pour attirer l'attention du lecteur sur le fait que les ouverts $I(E, F)$ et $S(E, F)$ peuvent être tous deux vides, même dans des cas « plausibles ». Soit par exemple $E = \ell^q, F = \ell^p$ avec $1 \leq p < q < \infty$, des Banach séparables de dimension infinie. D'après un *théorème de Pitt*, tout opérateur $T : E \to F$ est compact, donc ne saurait être injectif d'image fermée : $I(E, F) = \emptyset$. Il n'est pas non plus surjectif, car son image ne contient aucun sous-espace fermé G de dimension infinie (*cf.* Ex. VII.17). *Voici une preuve directe de cette assertion* : soit $G \subset \mathrm{Im}T$ puis $E_0 = T^{-1}(G)$ et $T : E_0 \to G$, une surjection, donc. Par le théorème de l'application ouverte (D 2.6 et P 2.14), applicable puisque E_0 et G sont des Banach, il existe une constante $C > 0$ telle que $B_G \subset CT(B_{E_0})$, où B_G et B_{E_0} désignent les boules unité fermées des espaces considérés.

Soit alors (y_n) une suite de B_G. Soit $x_n \in E_0$ telle que l'on ait $\|x_n\| \leq C$ et $T(x_n) = y_n$. Puisque T est compacte, il existe une suite extraite $(x_{n_j})_{j\geq 1}$ telle que $(T(x_{n_j}))_{j\geq 1} = (y_{n_j})_{j\geq 1}$ converge. Ainsi, toute suite de B_G admet une sous-suite convergente, ce qui montre que B_G est compacte et que donc (F. Riesz !) $\dim G < \infty$.

Exercice IV.11

(1) Soit $T \in \mathcal{GL}(E)$. Pour $S \in \mathcal{L}(E)$, $S = T + (S - T) = T[I + T^{-1}(S - T)]$. Par (P 4.5) S est inversible dès que $\|T^{-1}(S - T)\| < 1$, a fortiori dès que $\|S - T\| < \|T^{-1}\|^{-1}$. Ceci définit une boule ouverte, voisinage de T dont tout élément est inversible, ce qui montre que $\mathcal{GL}(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E)$.

D'autre part, si $T \in \mathcal{GL}(E)$ est fixé et $\|S - T\| < \|T^{-1}\|^{-1}$, alors

$$\|I - T^{-1}S\| = \|T^{-1}(T - S)\| \leq \|T^{-1}\|\,\|T - S\| < 1,$$

ce qui montre que $T^{-1}S$ est inversible avec de plus :

$$\|(T^{-1}S)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|I - T^{-1}S\|} \leq \frac{1}{1 - \|T^{-1}\|\,\|T - S\|}.$$

Puisque $S = T(T^{-1}S)$ avec T, $T^{-1}S$ inversibles, S est inversible aussi et

$$S^{-1} = (T^{-1}S)^{-1}T^{-1}.$$

D'où

$$\|S^{-1}\| \leq \|(T^{-1}S)^{-1}\|\,\|T^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \|T^{-1}\|\,\|T - S\|}.$$

$$\text{On a } S^{-1} - T^{-1} = (I - T^{-1}S)S^{-1} = T^{-1}(T - S)S^{-1}.$$

D'où

$$\|S^{-1} - T^{-1}\| \leq \|T^{-1}\|\,\|T - S\|\,\|S^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|^2}{1 - \|T^{-1}\|\,\|T - S\|}\|T - S\|.$$

Ceci montre la continuité de l'application $T \mapsto T^{-1}$.

(2) $T \in \mathcal{L}(E)$ et $\|T\|_p \leq 1$ de façon évidente.

(i) $(I - \varepsilon T)x = (x_1, x_2 - \varepsilon x_1, \ldots, x_n - \varepsilon x_{n-1}, \ldots) \stackrel{def}{=} T_\varepsilon x$.
Il suffit de montrer qu'il existe un élément $y \in E$ qui n'est pas un $T_\varepsilon x$, $x \in E$. Soit $y = (1, 0 \ldots, 0, \ldots)$. Si $y = T_\varepsilon x$, alors $x_1 = 1, x_2 = \varepsilon, \ldots, x_n = \varepsilon^{n-1}, \ldots x$ a donc tous ses termes d'indice ≥ 2 non nuls. Ce n'est pas un élément de E.

(ii) I est inversible. Dans tout voisinage de I, il y a un $I - \varepsilon T$; donc I n'admet pas de voisinage ouvert inclus dans $\mathcal{GL}(E)$, et $\mathcal{GL}(E)$ n'est pas un ouvert de $\mathcal{L}(E)$. On n'a plus ici l'hypothèse « E est complet », qui nous avait permis d'appliquer (P 4.5).

Exercice IV.12

(1) D'après les rappels, on a $\lambda \notin \sigma_{\text{ap}}(T) \iff \lambda \notin \sigma_{\text{sur}}(T^*)$.
Donc, $\sigma_{\text{ap}}(T) = \sigma_{\text{sur}}(T^*)$ et de même $\sigma_{\text{ap}}(T^*) = \sigma_{\text{sur}}(T)$.

(2) (a) Supposons au contraire (quitte à prendre une sous-suite) qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout n, $\|(T - \lambda_n I)^{-1}\| \leq C$, et soit n assez grand pour que $|\lambda_n - \lambda| < \frac{1}{C}$. Alors

$$\|(T - \lambda I) - (T - \lambda_n I\| = |\lambda - \lambda_n| < \frac{1}{\|(T - \lambda_n I)^{-1}\|}.$$

Mais alors $T - \lambda I$ est inversible. Cette contradiction montre qu'on a bien

$$\lim_{n\to\infty} \|(T - \lambda_n I)^{-1}\| = \infty.$$

(b) Soit $\|x_n\| = 1$ tel que $\alpha_n = \|(T - \lambda_n I)^{-1} x_n\| > \|(T - \lambda_n I)^{-1}\| - \frac{1}{n}$.
On a $\alpha_n \to \infty$, et si on pose $y_n = \frac{1}{\alpha_n}(T - \lambda_n I)^{-1} x_n$, on voit que $\|y_n\| = 1$ et que

$$(T - \lambda I)y_n = (T - \lambda_n I)y_n - (\lambda - \lambda_n)y_n = \frac{1}{\alpha_n} x_n - (\lambda - \lambda_n)y_n.$$

D'où $\|(T - \lambda I)y_n\| \leq \frac{1}{\alpha_n} + |\lambda - \lambda_n|$. On a donc construit une suite normée (y_n), $\|y_n\| = 1$ telle que $\|(T - \lambda I)y_n\| \to 0$. Ceci montre que $(T - \lambda I) \notin I(E)$, et ainsi $\lambda \in \sigma_{\text{ap}}(T)$.

(c) est une conséquence immédiate de (a) et (b).

(d) Par connexité, un compact non-vide du plan complexe a au moins un point-frontière, donc en appliquant la question (c) à T^*, on obtient l'existence d'un $\lambda \in \partial\sigma(T^*) \subset \sigma_{\text{ap}}(T^*)$. Et d'après (a), on a aussi $\lambda \in \sigma_{\text{sur}}(T)$, ce qui répond à la question. On comparera avec profit ce résultat à celui de l'Ex. IV.5.

Exercice IV.13

Suppose que $\|T\| \in \sigma(T)$. Puisque $\sigma(T) \subseteq \overline{B}(0, \|T\|)$, $\|T\| \stackrel{def}{=} M$ appartient à la frontière du spectre de T. Par l'Ex. IV.12, $\|T\| \in \sigma_{ap}(T)$, le spectre approximatif de T. Il existe donc, par définition, une suite $(x_n)_n$ avec

$$\|x_n\| = 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} \|Tx_n - Mx_n\| = 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\|I + T\| &\geq \|(I + T)x_n\| = \|(x_n + Mx_n) + (Tx_n - Mx_n)\| \\ &\geq \|(1 + M)x_n\| - \|Tx_n - Mx_n\| = 1 + M - \|Tx_n - Mx_n\|.\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient $\|I + T\| \geq 1 + M = 1 + \|T\|$. L'autre inégalité étant évidente, on a $\|I + T\| = 1 + \|T\|$.

ESPACE DE HILBERT

V

1 ÉNONCÉS

Exercice V.1

Soit E l'espace préhilbertien des fonctions complexes continues sur $[0, 1]$, muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ et de la norme $\| \|_2$ associée, et E_0 le sous-espace de E constitué des fonctions d'intégrale nulle sur $[0, 1]$. On considère maintenant le *couple d'espaces préhilbertiens* suivant :

$H = \{f \in E\ ; f(1) = 0\}$,

$H_0 = E_0 \cap H = \{f \in E\ ; f(1) = \int_0^1 f(t)dt = 0\}$.

(1) Montrer que H_0 est un sous-espace vectoriel fermé propre de H.

(2) Soit $f_1 \in E$ définie ainsi : pour tout $t \in [0, 1]$, $f_1(t) = t - \frac{1}{2}$.
   (i) Montrer que $E = \mathrm{Vect}(H, f_1)$, et $E_0 = \mathrm{Vect}(H_0, f_1)$.
   (ii) Montrer que $f_1 \in \overline{H_0}$ (adhérence dans E).

(3) $H_0^\perp$ désigne l'orthogonal de H_0 dans H (*cf.* D 5.6).
Montrer que $H_0^\perp = \{0\}$.

(4) Expliquer le résultat de (3).

Exercice V.2

Soit $E = C([a, b]), a < b, a, b \in \mathbb{R}$, espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes continues sur $[a, b]$, muni du produit scalaire induit par $\mathcal{L}^2([a, b])$. Soit $c \in]a, b[$ et $F_c = \{f \in E\ ; f_{|\,[a,c]} = 0\}$ ($f_{|\,[a,c]}$ désigne la restriction à l'intervalle $[a, c]$ de la fonction f).

(1) Montrer que F_c est un sous-espace fermé de E et déterminer $F_c^\perp$.

(2) Montrer que $F_c \oplus F_c^\perp \neq E$.

(3) Expliquer.

Exercice V.3

(1) Soit H un espace de Hilbert et $T : H \to H$ une application linéaire. Montrer que si pour tous $x, y \in H, \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$, alors T est continue (utiliser le théorème du graphe fermé P 2.17).

(2) Soit $K = \{P$, polynôme sur $\mathbb{C}\}$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)\overline{Q(t)}dt. \tag{V.1}$$

et $H = \{P \in K$ tels que $P(0) = P(1) = 0\}$, sous-espace préhilbertien de K.

Soit $T : H \to K$ l'application linéaire définie par $T(P) = iP'$.

Montrer que T vérifie $\langle T(P), Q\rangle = \langle P, T(Q)\rangle$ pour tous $P, Q \in H$, mais que T n'est pas continue. Commenter la différence avec la question (1).

Exercice V.4

(1) Soient M et N deux sous-espaces orthogonaux d'un espace de Hilbert H. Montrer que $M \oplus N$ est fermé si et seulement si M et N sont fermés.

(2) Soit $H = \ell^2$ (*cf.* D 1.15), ainsi que

E l'adhérence dans H du sous-espace engendré par $(e_{2n}, n \geq 1)$, et

F l'adhérence dans H du sous-espace engendré par $(e_{2n} + \frac{1}{n}e_{2n+1}, n \geq 1)$

où $(e_n, n \geq 1)$ est la base canonique de H.

(i) Montrer que $E \cap F = \{0\}$.

(ii) Montrer que $E + F$ n'est pas fermé dans H.

Exercice V.5 : Théorème de Grothendieck

$C([0, 1])$ désigne l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes continues sur $[0, 1]$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| \,;\, t \in [0, 1]\}$. C'est aussi un sous-espace préhilbertien du Hilbert $L^2([0, 1])$ (avec l'abus de langage habituel), dont la norme sera notée $\|\ \|_2$ et le produit scalaire $\langle f, g\rangle$. Le but de l'exercice est de montrer, sous une forme quantitative, qu'un sous-espace vectoriel $F \subseteq C([0, 1])$ qui est fermé dans $L^2([0, 1]) = E$ est nécessairement de dimension finie.

(1) Montrer que F est fermé dans $C([0, 1])$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$. En utilisant le théorème d'isomorphisme de Banach (P 2.16)), en déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\text{Pour tout } f \in F, \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty \leq \alpha\|f\|_2. \tag{V.2}$$

(2) Soit n un entier, et $\{f_1, \ldots, f_n\}$ une suite orthonormale de F.

(i) Montrer que pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$,

$$\|\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n\|_2^2 = |\lambda_1|^2 + \ldots + |\lambda_n|^2. \tag{V.3}$$

En utilisant (V.2), montrer que

$$\text{Pour tout } t \in [0,1], |\lambda_1 f_1(t) + \ldots + \lambda_n f_n(t)| \leq \alpha(|\lambda_1|^2 + \ldots + |\lambda_n|^2)^{1/2}. \qquad (V.4)$$

(ii) En choisissant convenablement $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, en déduire que

$$t \in [0,1] \Longrightarrow |f_1(t)|^2 + \ldots + |f_n(t)|^2 \leq \alpha(|f_1(t)|^2 + \ldots + |f_n(t)|^2)^{1/2}. \qquad (V.5)$$

(iii) Conclure que $n \leq \alpha^2$ et que $\dim F \leq \alpha^2$.

Exercice V.6 : Spectre d'une isométrie

Soit H un Hilbert complexe, $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs sur H, $\mathcal{G}$ le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{L}(H)$, et enfin $D = \{z \in \mathbb{C}\ ; |z| < 1\}$.

(1) Soit $A, B \in \mathcal{G}$. Montrer la formule de réduction non-commutative au même dénominateur :

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}.$$

(2) Soit (A_n) une suite de $\mathcal{G}$ et $A \in \mathcal{L}(H)$ tels que

$$\|A_n - A\| \to 0 \text{ et } \|A_n^{-1}\| \leq C.$$

Montrer que $A \in \mathcal{G}$. Dans la suite, on suppose $\dim H = \infty$.

(3) Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ une isométrie *non-surjective*, $E = \sigma(T) \cap D$, $F = D \setminus E$. Montrer que F est fermé dans D, puis que finalement

$$E = D \text{ et } \sigma(T) = \overline{D}.$$

(4) Soit T comme dans (3) (*cf.* D 4.16) et $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que l'on a $\|T - \lambda I\| = 1 + |\lambda|$ et plus généralement $\|T - \lambda U\| = 1 + |\lambda|$ si U est un opérateur unitaire (une isométrie surjective) sur H.

Exercice V.7

(1) Soit H un espace de Hilbert, et $x_1, \ldots, x_N \in H$. Montrer l'identité du parallélogramme généralisée :

$$\frac{1}{2^N} \sum \|\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_N x_N\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^2 \qquad (V.6)$$

où la somme porte sur les 2^N choix possibles de signes $\varepsilon_n = \pm 1$.

(2) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de vecteurs de H bornée au sens des familles sommables, c'est-à-dire :

$$\text{Il existe } C \text{ tel que } \Big\|\sum_{n \in A} x_n\Big\| \leq C \quad \text{pour tout } A \subset \mathbb{N}^* \text{ de cardinal fini.}$$

Montrer qu'on a $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$.

Exercice V.8 : Espace de Bergman

Soit Ω un ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$, et H_Ω l'espace de Bergman de Ω, i.e.

$H_\Omega = \mathcal{A}^2(\Omega) = \{f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ telles que f est holomorphe dans $\Omega\}$.

Pour $z \in \Omega$, on note δ_z l'application $\{H_\Omega \to \mathbb{C}, f \mapsto \delta_z(f) = f(z)\}$.

(1) Montrer que si $\overline{B(z,r)} = \{w \in \mathbb{C}$ tels que $|w - z| \leq r\} \subseteq \Omega$, alors

$$\text{Pour toute } f \in H_\Omega, f(z) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\overline{B(z,r)}} f(w) d\lambda(w),$$

où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

(2) En déduire que, $d(z, \Omega^c)$ désignant la distance de z au complémentaire de Ω, on a :

$$\text{Pour toute } f \in H_\Omega,\ \text{pour tout } z \in \Omega,\ d(z, \Omega^c) > r \Longrightarrow |f(z)| \leq \frac{1}{r\sqrt{\pi}} \|f\|_2.$$

(3) Montrer que H_Ω muni du produit scalaire de $\mathcal{L}^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

(4) Montrer que, pour tout $z \in \Omega$, δ_z est une forme linéaire continue sur H_Ω. En déduire qu'il existe $K_z \in H_\Omega$ telle que :

$$\text{Pour toute } f \in H_\Omega, f(z) = \int_\Omega f(w) \overline{K_z(w)} d\lambda(w).$$

(5) On note, pour tout $(z, w) \in (\Omega \times \Omega)$, $K_\Omega(w, z) = K_z(w)$.

(i) Montrer que $K_\Omega(z, w) = \overline{K_\Omega(w, z)}$.

(ii) Soit $(e_n, n \in \mathbb{N})$ une base orthonormale de H_Ω, montrer que $K_z = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{e_n(z)} e_n$ dans H_Ω.

(6) On choisit $\Omega = D = \{z \in \mathbb{C}\ ; |z| < 1\}$.

(i) Montrer que $(e_n, e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n, n \in \mathbb{N})$ est une base orthonormale de H_D.

(ii) Calculer explicitement K_D.

Exercice V.9

H est l'espace de Hilbert $L^2([a,b])$, $(e_n, n \in \mathbb{N}^*)$ est un système orthonormal de H. Montrer que $(e_n, n \in \mathbb{N}^*)$ est une base orthonormale si et seulement si,

$$\text{Pour tout } x \in [a,b],\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \int_a^x e_n(t) dt \right|^2 = x - a.$$

Exercice V.10 : Décomposition associée à une contraction

Soit H un espace de Hilbert complexe, et $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|T\| \leq 1$.

(1) Montrer que si $Tx = x$, alors $T^*x = x$.

(2) Montrer que $\ker(I - T) = \ker(I - T^*)$.

(3) Montrer que $H = \ker(I - T) \oplus^{\perp} \overline{\operatorname{Im}(I - T)}$.

Exercice V.11 : Théorème de similarité de Nagy

Soit H un espace de Hilbert de produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur inversible.

(1) On suppose que T est semblable à un opérateur unitaire, c'est-à-dire qu'il existe un opérateur inversible $P \in \mathcal{L}(H)$ tel qu'on ait $T = PUP^{-1}$, où $U \in \mathcal{L}(H)$ est *unitaire*. Montrer l'inégalité

$$\|T^n\| \leq C \overset{def}{=} \|P\|\,\|P^{-1}\|,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(2) On se propose de montrer la réciproque de (1). Soit donc $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur inversible tel que $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|T^n\| = C < \infty$. On va voir que T est semblable à un opérateur unitaire.

(i) Soit M une moyenne de Banach sur $F = \ell^\infty(\mathbb{Z})$, comme dans l'Ex. III.2. Pour $x, y \in H$, soit $g_{x,y} \in F$ définie par

$$g_{x,y}(n) = \langle T^n x, T^n y\rangle \text{ et soit } [x] = \big(M(g_{x,x})\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Justifier le fait que $g_{x,y} \in F$ et montrer que $[\ \ ]$ est une norme hilbertienne sur H. On note K l'espace H muni de cette nouvelle norme hilbertienne $[\ \ ]$.

(ii) Montrer que $[Tx] = [x]\ \forall x \in H$.

(iii) Montrer qu'il existe un isomorphisme isométrique $P : H \to K$, i.e.

$$[Px] = \|x\| \quad \forall x \in H.$$

(iv) On considère l'opérateur $U = P^{-1}TP$. Montrer que $U \in \mathcal{L}(H)$ est unitaire et que $T = PUP^{-1}$, ce qui est la conclusion souhaitée.

Exercice V.12 : Racine carrée d'un opérateur sur un Hilbert

On sait que tout nombre complexe a une racine carrée et qu'il y a une analogie profonde entre les nombres complexes et la $C^\star$-algèbre $\mathcal{L}(H)$ des opérateurs bornés sur un Hilbert H. On va étudier les limites de cette analogie.

(1) Soit $H = \mathbb{C}^d$ avec $d \geq 2$ et $N \in \mathcal{L}(H)$ défini sur la base canonique de $\mathbb{C}^d$ par

$$N(e_j) = e_{j+1} \text{ si } j < d \text{ et } N(e_d) = 0.$$

Montrer, en pensant au théorème de Cayley-Hamilton, que N n'admet pas de racine carrée.

(2) Soit toujours $H = \mathbb{C}^d$ avec $d \geq 2$, et $T \in \mathcal{L}(H)$, inversible. En utilisant une décomposition de Dunford

$$T = D + N \text{ avec } D \text{ diagonalisable, } N \text{ nilpotent et } DN = ND,$$

montrer que *cette fois* T peut s'écrire $T = Q^2$ avec $Q \in \mathcal{L}(H)$. Ainsi, en dimension finie, un opérateur inversible a une racine carrée. On va voir que ce résultat ne passe pas à la dimension infinie.

(3) Soit $0 < a < b < \infty$ et $\Omega = \{z \in \mathbb{C} ; a < |z| < b\}$, une couronne ouverte du plan complexe. On considère l'espace de Bergman $H = \mathcal{A}^2(\Omega)$ (un espace de Hilbert, donc) associé, comme dans l'Ex. V.8. On définit $T \in \mathcal{L}(H)$ par la relation

$$Tf(z) = zf(z), \forall f \in H, \forall z \in \Omega.$$

(i) Soit $u \in \mathcal{A}^2(\Omega)$ définie par $u(z) = z$, puis pour $n \in \mathbb{Z}$, $u_n = u^n$ et $e_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. Montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de H.

(ii) Montrer que T est un élément inversible de $\mathcal{L}(H)$ et qu'on a plus précisément

$$\|T\| \leq b \text{ et } \|T^{-1}\| \leq \frac{1}{a}.$$

(iii) On suppose que $T = Q^2$, où $Q \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que Q commute avec T et que, si l'on pose $\varphi = Q(u_0) \in H$, on a

$$Q(u_n) = \varphi u_n \ \forall n \in \mathbb{Z}, \text{ puis } Q(f) = \varphi f \ \forall f \in H.$$

En conclure que $\varphi^2(z) = z \ \forall z \in \Omega$ et aboutir à une contradiction. Ainsi, l'opérateur de Toeplitz inversible T n'a pas de racine carrée dans $\mathcal{L}(H)$.

Exercice V.13 : Théorème ergodique sans moyenne

Soit H un espace de Hilbert, $\mathcal{A} = \mathcal{L}(H), A \in \mathcal{A}$ une contraction :$\|A\| \leq 1$.

(1) On suppose de plus A positive : $\langle Ax, x\rangle \geq 0 \ \forall x$. Montrer l'inégalité

$$\|x - Ax\|^2 \leq \|x\|^2 - \|Ax\|^2 \quad \forall x \in H.$$

(2) Soit $T = A_1 \ldots A_r$ un produit de r contractions positives de $\mathcal{A} = \mathcal{L}(H)$, $N = \ker(I - T)$ et P la projection orthogonale sur N. On se propose de montrer que $T^n \to P$ en topologie forte d'opérateur, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n x - Px\| = 0 \quad \forall x \in H. \tag{V.7}$$

(i) Montrer l'inégalité

$$\|x - Tx\|^2 \leq r(\|x\|^2 - \|Tx\|^2) \quad \forall x \in H,$$

et en déduire que, pour (x_n) une suite bornée de vecteurs de H, on a l'implication :

$$\|x_n\| - \|Tx_n\| \to 0 \Longrightarrow \|x_n - Tx_n\| \to 0. \tag{V.8}$$

(ii) Montrer que (V.7) a lieu si $x \in N$.

(iii) Montrer que (V.7) a lieu si $x \in \mathrm{Im}(I - T)$, puis si $x \in \overline{\mathrm{Im}(I - T)}$.

(iv) Montrer que (V.7) a lieu en utilisant l'Ex. V.10, et que de plus

$$N = \bigcap_{j=1}^{r} \ker(A_j - I).$$

(3) Soit $P_1, \ldots, P_r$ des projections orthogonales (*cf.* D 5.8) sur des sous-espaces fermés $E_1, \ldots, E_r$ de H, et soit $T = P_1 \ldots P_r$. Montrer que T^n converge en topologie forte d'opérateur (*cf.* D 9.11) vers une projection orthogonale que l'on déterminera.

2 Solutions

Exercice V.1

(1) L'espace H_0 est le noyau de la forme linéaire A définie par la relation $Af = \langle f, f_0 \rangle$, en notant f_0 la fonction définie par $f_0(t) = 1$ pour tout $t \in [0, 1]$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz (P 5.4) entraîne

$$|Af| = |\langle f, f_0 \rangle| \leq \|f_0\|_2 \, \|f\|_2 = \|f\|_2.$$

Ceci, d'après (P 1.4), montre que A est continue sur H (de norme $\|f_0\|_2 = 1$). Son noyau H_0 est alors un sous-espace fermé propre de H, puisque $\|A\| = 1$.

(2) (i) $f_1(1) = \frac{1}{2}$ donc $f_1 \notin H$.

Pour toute $f \in E$, $f = 2f(1)f_1 + h$, où $h(1) = 0$, donc $h \in H$.

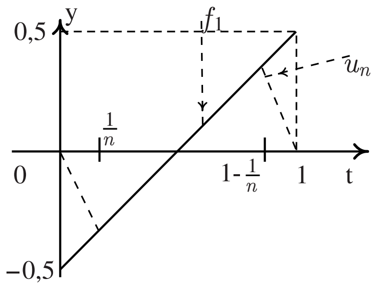
Ceci exprime l'égalité

$$E = \text{Vect}(H, f_1).$$

Si de plus $f \in E_0$, comme $f_1 \in E_0$, la décomposition ci-dessus montre que $h \in H \cap E_0 = H_0$, c'est-à-dire qu'on a

$$E_0 = \text{Vect}(H_0, f_1).$$

(ii) Sur le graphe de f_1 nous ajoutons le graphe d'une fonction u_n qui montre le résultat.



f_1, u_n

u_n coïncide avec f_1 dans l'intervalle $[1/n, 1 - 1/n]$, est représentée par les pointillés en dehors. On a $u_n(t) - f_1(t) = \frac{1-nt}{2}$ si $0 \leq t \leq \frac{1}{n}$, d'où l'on tire :

$\|f_1 - u_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{6n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Comme u_n est dans H_0, $f_1 \in \overline{H_0}$.

(3) Rappelons que, selon (D 5.6),

$$H_0^{\perp} = \{g \in H \text{ tels que pour toute } f \in H_0, \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt = 0\},$$

et $H_0^{\perp}$ est un sous-espace de H. Fixons $g \in H_0^{\perp}$, et montrons que $g = 0$.

Les u_n de (2) sont dans H_0, donc $\int_0^1 u_n(t)\overline{g(t)}dt = 0$, et

$$\Big|\int_0^1 f_1(t)\overline{g(t)}dt\Big| = \Big|\int_0^1 (f_1(t) - u_n(t))\overline{g(t)}dt\Big| \leq \|f_1 - u_n\|_2 \, \|g\|_2,$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (P 5.4). Ainsi

$$\Big|\int_0^1 f_1(t)\overline{g(t)}dt\Big| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\|g\|_2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ et } \int_0^1 f_1(t)\overline{g(t)}dt = 0.$$

D'après (2), l'égalité précédente prouve que l'on a $g \in E_0^{\perp}$ (où l'orthogonalité est ici relative au produit scalaire de E).

Notons maintenant $m = \int_0^1 g(t)dt$. Nous avons $g - m \in E_0$, et puisque $g \in E_0^{\perp}$:

$$\langle g - m, g\rangle = \int_0^1 |g(t)|^2 dt - m\overline{m} = \int_0^1 |g(t)|^2 dt - \Big|\int_0^1 g(t)dt\Big|^2 = 0.$$

Nous sommes donc dans les cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et il en résulte que g est colinéaire à f_0, où $f_0 = 1$ est la fonction de (1) :

$$g = cf_0 \text{ avec } c \text{ constante.}$$

Testant maintenant cette égalité au point 1, nous obtenons

$$0 = g(1) = cf_0(1) = c, \quad \text{d'où } g = 0.$$

(4) Le résultat montre la différence de comportement avec le cas d'un espace de Hilbert. H est préhilbertien mais non de Hilbert, et on ne peut pas le reconstruire sous la forme $H_0 \oplus H_0^{\perp}$. On a $H_0^{\perp} = \{0\}$, mais $H_0 = \overline{H_0} \neq H$. La fonction $f(t) = 1 - t$, par exemple, est dans $H \setminus H_0$.

Exercice V.2

On remarque dès maintenant que E n'est pas complet pour la norme associée au produit scalaire choisi. On sait qu'il est dense dans $L^2([a, b])$.

Il est utile de représenter les fonctions sur un graphe, en les supposant réelles ; ceci guide la démarche pour les différentes questions.

(1) (i) $\boldsymbol{F_c}$ **sous-espace fermé.**

F_c est de manière évidente un sous-espace vectoriel. Montrons que F_c est fermé en montrant que $F_c = \overline{F_c}$, ou encore que

$$f \notin F_c \Longrightarrow f \notin \overline{F_c}.$$

Si $f \notin F_c$, il existe $t \in [a, c]$ tel que $f(t) \neq 0$. On note $2r = |f(t)|$.

Comme f est continue, il existe $J = [a_1, b_1] \subseteq [a, c]$, intervalle fermé non réduit à un point, tel que $t \in J$ et pour tout $s \in J, |f(s)| \geq r$. Alors, on a pour toute $g \in F_c$, en notant $\delta = r(b_1 - a_1)^{1/2} > 0$:

$$\|f - g\|_2 \geq \left(\int_{a_1}^{b_1} |f(s) - g(s)|^2 ds\right)^{1/2} = \left(\int_{a_1}^{b_1} |f(s)|^2 ds\right)^{1/2} \geq \delta > 0.$$

Donc, $f \notin \overline{F_c}$, ce qui prouve l'implication ci-dessus.

(ii) $\boldsymbol{F_c^\perp}$**.**

$F_c^\perp = \{h \in E$ telles que pour tout $f \in F_c, \int_a^b f(t)\overline{h(t)}dt = 0\}$.

Soit $G_c = \{h \in E$ telles que $h = 0$ sur $[c, b]\}$. On montre que $G_c = F_c^\perp$ selon les deux étapes suivantes :

(a) Si $h \in G_c$ et $f \in F_c$, on a $f\overline{h} = 0$ sur $[a, b]$, d'où $\langle f, h\rangle = \int_a^b (f\overline{h})(t)dt = 0$. Il en résulte que $G_c \subset F_c^\perp$.

(b) Supposons que $h \in F_c^\perp$, et définissons $f \in E$ par la formule

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq t \leq c \\ (t - c)h(t) & \text{si } c \leq t \leq b \end{cases}$$

On a clairement $f \in F_c$, notons qu'on a dû ajouter le facteur $t - c$ pour garantir la continuité de f en c. Par suite :

$$\langle f, h\rangle = \int_a^b f(t)\overline{h(t)}dt = \int_c^b f(t)\overline{h(t)}dt = \int_c^b (t - c)|h(t)|^2 dt = 0.$$

Mais la fonction qu'on intègre est continue, positive, d'où

$$(t - c)|h(t)|^2 = 0 \text{ pour tout } t \in [c, b].$$

Par suite, $h(t) = 0$ sur $]c, b]$ et par continuité $h(t) = 0$ sur $[c, b]$, autrement dit $h \in G_c$. On voit finalement que $F_c^\perp \subset G_c$ et que $F_c^\perp = G_c$.

(2) $F_c + F_c^\perp$ ne peut contenir que des fonctions nulles en c. Il est strictement inclus dans E.

(3) Le « défaut » provient du caractère de E, espace non complet, qui a été remarqué au début. $F_c + F_c^\perp$ est identique au sous-ensemble de E formé des fonctions nulles en c, et en notant e la fonction $\{t \mapsto 1\}$, on a la décomposition en somme directe algébrique

$$E = F_c \oplus F_c^\perp + \mathrm{Vect}(e).$$

En effet, $f \in E$ arbitraire peut se décomposer en

$$f = [f - f(c)e] + [f(c)e], \text{avec } f - f(c)e \in F_c + F_c^\perp.$$

Mais cette décomposition n'est pas une somme directe topologique ; on sait en effet que l'application linéaire $T : E \to E$ définie par $T(f) = f(c)e$ n'est pas continue, la preuve étant fournie par la famille de fonctions f_ε vérifiant $f_\varepsilon(c) = 1, f_\varepsilon(t) = 0$ si $t \notin [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$, f affine sur chacun des intervalles $[c-\varepsilon, c]$ et $[c, c+\varepsilon]$ (faire le graphe).

Exercice V.3

(1) Soit $f \in H^*$. On sait (théorème de représentation de Riesz P 5.7) qu'il existe $y \in H$ tel que $f(x) = \langle x, y\rangle$, pour tout $x \in H$. D'après l'hypothèse, on a $(f \circ T)(x) = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$, donc $f \circ T \in H^*$; d'après l'Ex. III.1, T est continue.

(2) (i) **Égalité $\langle T(P), Q\rangle = \langle P, T(Q)\rangle$.**

C'est la formule d'intégration par parties pour des fonctions de classe C^1 :

$$\langle T(P), Q\rangle = \int_0^1 iP'(t)\overline{Q(t)}dt = [iP(t)\overline{Q(t)}]_0^1 - \int_0^1 iP(t)\overline{Q'(t)}dt$$
$$= \int_0^1 P(t)\overline{iQ'(t)}dt = \langle P, T(Q)\rangle,$$

en tenant compte des conditions $P(0) = P(1) = 0$.

(ii) ***T* non continu.**

Il suffit de mettre en évidence une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que la suite $a_n = \|P_n'\|(\|P_n\|)^{-1}$ ne soit pas bornée. Pour que P_n soit nul en $t = 0$ et $t = 1$, on choisit $P_n(t) = t^n(1-t)$. On a alors :

$$\|P_n\|^2 = \int_0^1 t^{2n}(t^2 - 2t + 1)dt = \frac{1}{2n+3} - \frac{2}{2n+2} + \frac{1}{2n+1}$$
$$= \frac{2}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \sim \frac{1}{4n^3}, \text{ et donc } \|P_n\| \sim \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

D'autre part, notant $e_n(t) = t^n$, on a $P_n' = nP_{n-1} - e_n$, d'où

$$\|P_n'\| \geq \|e_n\| - n\|P_{n-1}\| = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} - n\|P_{n-1}\| \sim \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

On a donc $a_n \geq cn$, où c est une constante > 0, et (a_n) n'est pas bornée. $T : H \to K$ est formellement auto-adjoint, mais n'est pas continu, comme en (1). Cela tient au caractère non-complet des espaces H, K en jeu, même si la situation n'est pas tout à fait la même, car il y a deux espaces ici, H et K. Mais par exemple en prenant pour H l'espace préhilbertien des fonctions C^∞ sur $[0, 1]$ et nulles au voisinage de 0 et 1 avec le même produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$$

et $T : H \to H$ défini par $T(f) = if'$, on aurait un opérateur auto-adjoint non-continu de H dans lui-même.

Exercice V.4

(1) (i) ***M* et *N* fermés ⇒.**

Comme $M \oplus N$ est inclus dans un espace de Hilbert, montrer qu'il est fermé équivaut à montrer qu'il est complet.

Soit donc $(x_n = y_n + z_n, y_n \in M, z_n \in N)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de Cauchy de $M \oplus N$.

M et N sont orthogonaux, donc d'après (P 5.1), on a

$$\text{Pour tous } p, n \in \mathbb{N}^*, \|x_n - x_p\|^2 = \|y_n - y_p\|^2 + \|z_n - z_p\|^2. \qquad (V.9)$$

Il en résulte que pour tous $p, n \in \mathbb{N}^*$, $\|y_n - y_p\| \leq \|x_n - x_p\|$ ainsi que $\|z_n - z_p\| \leq \|x_n - x_p\|$.

Ceci entraîne que les deux suites $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont de Cauchy dans M et N, donc elles sont convergentes respectivement vers $y \in M$ et $z \in N$.

Soit $x = y + z$, c'est un élément de $M \oplus N$ et, en faisant tendre p vers l'infini dans $(V.9)$, on obtient $\|x - x_n\|^2 = \|y - y_n\|^2 + \|z - z_n\|^2$, donc $x = \lim_{n \to \infty} x_n$. $M \oplus N$ est complet dans H donc fermé.

(ii) **$M \oplus N$ fermé ⇒.**

On considère une suite de Cauchy arbitraire $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans M ; on cherche à montrer qu'elle est convergente dans M.

La suite $(x_n = y_n + 0 = y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente dans $M \oplus N$ donc convergente vers un élément $x = y + z$. Par orthogonalité, on a :

$\|x - x_n\|^2 = \|y - y_n\|^2 + \|z\|^2$ et $\lim_{n \to \infty} \|x - x_n\| = 0$. Il en résulte que

$$z = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} \|y - y_n\| = 0.$$

Ceci montre que M est complet, et donc fermé. De même, N est fermé.

(2) Les sous-espaces E et F donnés dans H ne sont plus orthogonaux l'un à l'autre ; on ne peut donc pas appliquer (1).

Écriture de *E* et *F*. Le système $(e_{2n}, n \geq 1)$ est orthonormé donc un élément y arbitraire de E s'écrit

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n e_{2n}, y_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty.$$

Le système $(e_{2n} + \frac{1}{n} e_{2n+1}, n \geq 1)$ est orthogonal et $\|e_{2n} + \frac{1}{n} e_{2n+1}\|^2 = 1 + \frac{1}{n^2}$ est majoré par 2 et minoré par 1, donc un élément z arbitraire de F s'écrit

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \left(e_{2n} + \frac{1}{n} e_{2n+1} \right), z_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < \infty.$$

(i) Soit $x \in E \cap F$, c'est un y et un z selon l'écriture précédente ; comme le système $(e_n, n \geq 1)$ est une base orthonormée de H, on identifie y et z par l'égalité de leurs composantes : pour tout n, $y_n = z_n$ et $0 = \frac{z_n}{n}$.

Ceci montre que $x = 0$. On a $E \cap F = \{0\}$.

(ii) $e_{2n+1} = n(e_{2n} + \frac{1}{n}e_{2n+1}) - ne_{2n}$, donc pour tout $n, e_n \in E + F$; le sous-espace vectoriel $E + F$ de H est donc dense dans H. Pour montrer qu'il est non fermé, il suffit alors de prouver l'existence d'un vecteur $x \notin E + F$. Soit pour cela $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}e_{2n+1}$. L'écriture de x sous la forme $x = y + z \in E + F$ imposerait

$$\text{Pour tout } n, y_n = -z_n \text{ et } \frac{1}{n} = \frac{1}{n}z_n, \text{ donc pour tout } n, z_n = 1.$$

Ceci contredit la propriété $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < \infty$, et donc $x \notin E + F$.

Voici une solution alternative : si $E + F$ est fermé, le théorème d'isomorphisme de Banach (P 2.16), appliqué à l'opérateur somme $T : E \times F \to E + F$ défini par $T(e, f) = e + f$ montre l'existence d'une constante $c > 0$ telle que

$$\|e + f\| \geq c \max(\|e\|, \|f\|), \text{ pour tous } e \in E, f \in F.$$

En testant cette inégalité sur les vecteurs $e = e_{2n}, f = -e_{2n} - \frac{1}{n}e_{2n+1}$, on obtient $\frac{1}{n} \geq c$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui est absurde.

Exercice V.5

On note $G = C([0, 1])$, muni de $\| \|_\infty$. On note F_∞ pour F vu comme sous-espace normé de G et F_2 pour F vu comme sous-espace normé de E.

(1) (i) ***F* fermé dans *E*.**

Soit l'application $A : \{G \to E, f \mapsto f\}$. A est linéaire et continue puisque

$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt \leq \|f\|_\infty^2.$$

L'espace vectoriel $A(F)$ coïncide avec l'espace vectoriel F donc l'hypothèse exprime que $A(F)$ est fermé dans E. Alors F est fermé dans G, comme préimage d'un fermé par une application continue.

(ii) **Inégalités de normes.**

Soit B la restriction de A à F, $B : \{F_\infty, \to A(F_\infty), f \mapsto f\}$, B est une application linéaire continue. (1) montre sa continuité et la validité de

$$\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty \text{ pour } f \in F.$$

Le théorème d'isomorphisme de Banach (P 2.16) fournit l'autre inégalité, en effet, F_∞ et F_2 sont des espaces de Banach ; B est une application linéaire continue entre ces deux espaces, son inverse est alors continue.

La continuité de l'inverse B^{-1} se traduit par l'existence d'une constante α telle que :

$$\text{Pour tout } f \in F, \|f\| \leq \alpha\|Bf\|, \text{ c'est-à-dire } \|f\|_\infty \leq \alpha\|f\|_2. \qquad (V.10)$$

(2) La donnée est valable si la dimension de F est supérieure ou égale à n.

(i) (a) **Égalité.**

L'égalité (V.3) est l'identité de Parseval pour le vecteur $\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n$ en utilisant la base orthonormée $(f_1, \ldots, f_n)$ de $\text{Vect}(f_1, \ldots, f_n)$; le carré de la norme est la somme des carrés des composantes (P 5.11).

(b) **Inégalité.**

Pour $f = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n$, on écrit la dernière inégalité de (V.2).

$\|f\|_\infty = \sup(|\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(t)| \; ; t \in [0, 1])$, et $\|f\|_2$ est fourni par (V.3). L'inégalité (V.4) est donc vraie.

(ii) Pour utiliser l'inégalité précédente de façon optimale, on choisit, pour tout $j = 1, \ldots, n, \lambda_j = \overline{f_j(t)}$. On obtient ($V$.5).

(iii) (a), (b) **Inégalité et F de dimension finie.**

(V.5) peut être récrite sous la forme

$$|f_1(t)|^2 + \ldots + |f_n(t)|^2 \leq \alpha^2, \;\; \forall t \in [0, 1]. \qquad (V.11)$$

Alors, en intégrant les deux membres de (V.11) sur $[0, 1]$ et en tenant compte du fait que chaque f_j est normé dans E, on obtient

$$n \leq \alpha^2, \;\text{ puis }\; \dim F \leq \alpha^2. \qquad (V.12)$$

Exercice V.6

(1) Le second membre de l'identité demandée vaut

$$A^{-1}BB^{-1} - A^{-1}AB^{-1} = A^{-1} - B^{-1}.$$

(2) Soit $T_n = A_n^{-1}$. La suite (T_n) est de Cauchy dans $\mathcal{L}(H)$ car on a d'après la question précédente :

$$\|T_p - T_q\| = \|T_p(A_q - A_p)T_q\| \leq \|T_p\| \, \|A_p - A_q\| \, \|T_q\| \leq C^2\|A_p - A_q\|.$$

Donc, $T_n \to T$, avec $T \in \mathcal{L}(H)$, et le passage à la limite dans la relation $A_nT_n = T_nA_n = I$ donne $AT = TA = I$, montrant que $A \in \mathcal{G}$ et que $A^{-1} = T$.

(3) Soit (λ_n) une suite de points de F convergeant vers $\lambda \in D$. Il existe $r > 0$ tel que $\inf_{n\geq 1}(1 - |\lambda_n|) \geq r$. Soit alors $A_n = T - \lambda_n I$; je dis que

$$\|A_n^{-1}\| \leq C = \frac{1}{r}.$$

En effet, si $x \in H$, le caractère isométrique de T donne :

$$\|A_nx\| = \|Tx - \lambda_nx\| \geq \|Tx\| - |\lambda_n| \, \|x\| = (1 - |\lambda_n|)\|x\| \geq r\|x\|,$$

d'où l'inégalité annoncée, en changeant x en $A_n^{-1}x$. D'après la question (2), on a $T - \lambda I \in \mathcal{G}$, soit $\lambda \in F$. La fin est facile *par un argument de connexité* : l'ensemble $E \subset D$ est non-vide car $0 \in E$, T étant non-surjective. Il est fermé dans D puisque c'est la trace sur D du fermé $\sigma(T)$. Il est ouvert dans D puisqu'on vient de voir que son complémentaire F est fermé dans D. Et puisque D est connexe, on a bien $E = D$, puis par densité $\sigma(T) \supset \overline{D}$, et finalement $\sigma(T) = \overline{D}$, l'inclusion inverse étant évidente.

(4) Il suffit de remarquer que, r désignant le rayon spectral :

$$\sigma(T - \lambda I) = \sigma(T) - \lambda = \overline{D}(-\lambda, 1) \overset{def}{=} K, \text{ puis que}$$

$$1 + |\lambda| = \|T\| + |\lambda| \geq \|T - \lambda I\| \geq r(T - \lambda I) = \sup_{\mu \in K} |\mu| = 1 + |\lambda|.$$

Plus généralement, si U est unitaire, on a

$$\|T - \lambda U\| = \|U^{-1}T - \lambda I\| = 1 + |\lambda|,$$

puisque $U^{-1}T$ est une isométrie non-surjective.

Exercice V.7

(1) On procède par récurrence sur N. Le cas $N = 1$ est évident. Pour passer de N à $N + 1$, on écrit, avec une signification évidente des $\sum$, et en utilisant l'identité du parallélogramme et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^{N+1}} \sum \|\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_{N+1} x_{N+1}\|^2 \\
&= \frac{1}{2^N} \left(\frac{\sum \|\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_N x_N + x_{N+1}\|^2 + \sum \|\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_N x_N - x_{N+1}\|^2}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2^N} \sum \left(\|\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_N x_N\|^2 + \|x_{N+1}\|^2 \right) = \left(\sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^2 \right) + \|x_{N+1}\|^2 = \sum_{n=1}^{N+1} \|x_n\|^2.
\end{aligned}$$

(2) Il résulte de l'hypothèse que

$$\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n\| \leq 2C, \quad \text{pour tous } \varepsilon_n = \pm 1, \text{ pour tout } N. \qquad (V.13)$$

En effet, posant pour A partie finie de $\mathbb{N}^*$, $S_A = \sum_{n \in A} x_n$, et notant

$$I^+ = \{n \leq N \,;\, \varepsilon_n = 1\}, \; I^- = \{n \leq N \,;\, \varepsilon_n = -1\},$$

on a

$$\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n\| = \|S_{I^+} - S_{I^-}\| \leq \|S_{I^+}\| + \|S_{I^-}\| \leq 2C.$$

En élevant au carré l'inégalité (V.13) et en faisant la moyenne sur les 2^N choix de signes possibles, on obtient d'après l'identité du parallélogramme généralisée :

$$\sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^2 \leq 4C^2,$$

ce qui termine la démonstration, puisque N est arbitraire.

Exercice V.8

(1) Comme $\overline{B(z,r)} = \{w \in \mathbb{C}\ ; |w-z| \leq r\} \subseteq \Omega$, $f(w)$ peut être écrite sous forme de série entière en $w-z$ dans $\overline{B(z,r)}$: $f(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(w-z)^n$. La série est uniformément convergente sur $\overline{B(z,r)}$.

Dans l'écriture de l'intégrale $\int_{\overline{B(z,r)}} f(w)d\lambda(w)$, on peut alors utiliser cette expression de $f(w)$ et échanger les signes $\sum$ et $\int$. Ainsi

$$\int_{\overline{B(z,r)}} f(w)d\lambda(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z) \int_{\overline{B(z,r)}} (w-z)^n d\lambda(w).$$

L'intégrale se calcule en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}\int_{\overline{B(z,r)}} (w-z)^n d\lambda(w) &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho^n \exp(in\theta)\rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \exp(in\theta)d\theta \int_0^r \rho^{n+1} d\rho.\end{aligned}$$

L'intégrale en θ est nulle sauf pour $n = 0$, donc il reste le terme en $f(z)$ qui est $2\pi\frac{r^2}{2}f(z)$. On obtient l'égalité proposée.

(2) Soit $z \in \Omega$ avec $d(z,\Omega^c) > r$. Alors, $\overline{B(z,r)} \subset \Omega$ et on peut appliquer (1). Mais $\int_{\overline{B(z,r)}} f d\lambda$ peut être interprétée comme produit scalaire, dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$, des fonctions $\widetilde{f}$, restriction de f à $\overline{B(z,r)}$ et e_0, fonction caractéristique de $\overline{B(z,r)}$. Ainsi $\left| \int_{\overline{B(z,r)}} f d\lambda \right| \leq \|\widetilde{f}\|_2 \, \|e_0\|_2 \leq \|\widetilde{f}\|_2 (\pi r^2)^{1/2}$ par Cauchy-Schwarz, donc

$$\text{Pour toute } f \in H_\Omega, d(z,\Omega^c) > r \Longrightarrow |f(z)| \leq \frac{1}{r\sqrt{\pi}} \|f\|_2.$$

(3) H_Ω muni du produit scalaire de $\mathcal{L}^2(\Omega)$ est un espace préhilbertien. Il reste à montrer qu'il est complet.

Soit donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de Cauchy de H_Ω. Il résulte de (2) que

$$\text{Pour tous } p,q \in \mathbb{N}^* \text{ et } z \in \Omega,\ d(z,\Omega^c) > r \Longrightarrow |f_p(z) - f_q(z)| \leq \frac{1}{r\sqrt{\pi}} \|f_p - f_q\|_2.$$

Soit alors K un compact de Ω. Il existe $r > 0$ tel que $K \subset \{z\,; d(z, \Omega^c) > r\}$ et l'inégalité précédente montre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie le critère de Cauchy de convergence uniforme sur K, donc converge uniformément sur K. D'après le théorème de Weierstrass, il existe $f \in H(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ uniformément sur tout compact de Ω, a fortiori simplement sur Ω. Reste à montrer deux choses :

1. $\boldsymbol{f \in H_\Omega}$**.**
   Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N(\varepsilon)$ tel que

$$p, q \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow \int_\Omega |f_p(w) - f_q(w)|^2 d\lambda(w) \leq \varepsilon^2.$$

   Laissons $p \geq N(\varepsilon)$ fixe dans cette inégalité, faisons tendre q vers $+\infty$ et utilisons ce qui précède et le *lemme de Fatou* pour obtenir :

$$\int_\Omega |f_p(w) - f(w)|^2 d\lambda(w) \leq \underline{\lim}_{q\to\infty} \int_\Omega |f_p(w) - f_q(w)|^2 d\lambda(w) \leq \varepsilon^2.$$

   Cela montre que $f_p - f \in H_\Omega$, qui est un espace vectoriel, et donc que $f \in H_\Omega$.
2. $\boldsymbol{f_n \to f}$ **dans** $\boldsymbol{H_\Omega}$**.**
   Maintenant qu'on sait que $f \in H_\Omega$, l'inégalité précédente se lit :

$$p \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow \|f_p - f\|_2 \leq \varepsilon.$$

   Ceci achève la démonstration.

(4) (i) $\boldsymbol{\delta_z}$ **linéaire et continue.**

δ_z est évidemment linéaire. Si $r > 0$ est tel que $\overline{B(z, r)} \subset \Omega$, alors d'après (2), $|\delta_z(f)| = |f(z)| \leq \frac{1}{r\sqrt{\pi}}\|f\|_2$, donc δ_z est continue et sa norme est majorée par $\frac{1}{r\sqrt{\pi}}$.

(ii) **Existence de $\boldsymbol{K_z}$.**

Le théorème de Riesz (P 5.7) identifie toute forme linéaire continue sur un espace de Hilbert à un produit scalaire. Il existe donc $K_z \in H_\Omega$ (unique) telle que

$$\text{Pour toute } f \in H_\Omega, f(z) = \langle f, K_z\rangle = \int_\Omega f\overline{K_z}d\lambda. \qquad (V.14)$$

(5) (i) Il s'agit de comparer $K_z(w)$ et $K_w(z)$ en utilisant l'équation (V.14). Or, sous-entendant l'indice Ω, nous avons la symétrie hermitienne :

$$K(w, z) = K_z(w) = \langle K_z, K_w\rangle = \overline{\langle K_w, K_z\rangle} = \overline{K_w(z)} = \overline{K(z, w)}.$$

(ii) identifions, pour $z \in \Omega$ fixé, K_z par son écriture comme élément de H_Ω sur la base orthonormée (e_n). Nous savons que $K_z = \sum_{n=0}^{+\infty}\langle K_z, e_n\rangle e_n$, et il n'y a plus qu'à remarquer que

$$\langle K_z, e_n\rangle = \overline{\langle e_n, K_z\rangle} = \overline{e_n(z)}.$$

(6) (i) Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, en notant $a_n = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}$, on a

$$\langle e_n, e_p\rangle = \int_D a_n w^n a_p \overline{w}^p d\lambda = a_n a_p \iint_{0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le 1} \rho^{n+p} \exp(i(n-p)\theta)\rho d\rho d\theta,$$

$$\text{soit } \langle e_n, e_p\rangle = 0 \text{ si } n \neq p\,;\langle e_n, e_n\rangle = a_n^2 \frac{\pi}{n+1} = 1.$$

Le système $(e_n, n \in \mathbb{N})$ est donc orthonormal dans H_D. Pour montrer que c'est une *base orthonormale*, désignons par V l'espace vectoriel fermé qu'il engendre, et rappelons le fait *très utile* (*cf.* P 5.11) suivant, pour $f \in H_D$ FIXÉE :

$$f \in V \Longleftrightarrow \|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, e_n\rangle|^2. \tag{V.15}$$

(Autrement dit, f est dans V si et seulement si on a *égalité pour* f dans l'inégalité de Bessel générale $\sum_{n=0}^{\infty} |\langle g, e_n\rangle|^2 \le \|g\|^2$).

Soit ici $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in H_D$. Calculons la norme de f en coordonnées polaires en utilisant la relation de Parseval (P 5.11) sur le cercle, et Beppo Levi :

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 r dr dt = \int_0^1 r\left(\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt\right) dr \\ &= \int_0^1 r\left(2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 r^{2n}\right) dr = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 |f_n|^2 r^{2n+1} dr \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{n+1} |f_n|^2. \end{aligned} \tag{V.16}$$

Par polarisation, on voit que si $f, g \in H_D$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n,\ g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n \Longrightarrow \langle f, g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{n+1} f_n \overline{g_n}.$$

En particulier (*et cela redonne au passage le début de la question 6*)), puisque $e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n$, on a

$$\langle f, e_n\rangle = \frac{\pi}{n+1}\sqrt{\frac{n+1}{\pi}} f_n = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} f_n.$$

En élevant au carré, ajoutant et utilisant $(V.16)$, on obtient $(V.15)$, et donc $f \in V$. Comme f est arbitraire dans H_D, on a $H_D = V$, et (e_n) est bien une base orthonormée de H_D.

(ii) $K_D(w, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{e_n(z)} e_n(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{\pi} (\overline{z}w)^n$.

On pose $u = \overline{z}w$, $g(u) = K_D(w, z)$; $(n+1)u^n = \frac{d}{du} u^{n+1}$, donc
$K_D(w, z) = g(u) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{du} \sum_{n=0}^{+\infty} u^{n+1} = \frac{1}{\pi} \frac{d}{du}(\frac{1}{1-u} - 1) = \frac{1}{\pi}(1-u)^{-2} = \frac{1}{\pi}(1 - \overline{z}w)^{-2}$.

Exercice V.9

Dans l'égalité à étudier, l'intégrale s'interprète comme un produit scalaire.

Notons f_x la fonction caractéristique de $[a, x]$, et V l'espace vectoriel fermé engendré par les $(e_n, n \in \mathbb{N}^*)$. Alors $\int_a^x e_n(t)dt = \langle e_n, f_x\rangle$, et l'égalité proposée s'écrit :

$$\text{Pour tout } x \in [a, b], \ \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle e_n, f_x\rangle|^2 = \|f_x\|^2.$$

Ceci exprime (comme on vient de le voir dans (V.15) de l'exercice précédent !) que pour tout $x \in [a, b]$, $f_x \in V$. Alors, par différence, l'ensemble M des fonctions caractéristiques d'intervalles est dans V. On sait que l'adhérence de M dans H est identique à H. Ainsi $V = H$. Et la réciproque (Parseval toujours vrai sur une base orthonormée) est triviale.

Exercice V.10

(1) Supposons que $Tx = x$. Si $x = 0$, alors $T^*x = x$; si $x \neq 0$,

$\langle T^*x, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \langle x, x\rangle \leq \|T^*x\| \, \|x\| \leq \|x\| \, \|x\| = \langle x, x\rangle$;

on est dans les cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et par (P 5.4), $T^*x = cx$ est colinéaire à x ; en reportant dans l'égalité précédente $\langle T^*x, x\rangle = \langle x, x\rangle$, on obtient $c\|x\|^2 = \|x\|^2$, d'où $c = 1$ et $T^*x = x$. Une variante consiste à développer $\|T^*x - x\|^2$, ce qui donne le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\|T^*x - x\|^2 &= \|T^*x\|^2 + \|x\|^2 - 2\Re\langle T^*x, x\rangle = \|T^*x\|^2 + \|x\|^2 - 2\Re\langle x, Tx\rangle \\ &= \|T^*x\|^2 + \|x\|^2 - 2\|x\|^2 = \|T^*x\|^2 - \|x\|^2 \leq 0,\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\|T^*\| = \|T\| \leq 1$. D'où $T^*x - x = 0$.

(2) Comme $\|T^*\| = \|T\| \leq 1$ et $T^{**} = T$, en appliquant (1) à T^*, on obtient

$$T^*x = x \Longrightarrow T^{**}x = x \Longrightarrow Tx = x,$$

ce qui joint à (1) donne le résultat.

(3) On a bien sûr $\ker(I - T^*) = \ker(I - T)^*$, d'où $\ker(I - T) = \ker(I - T)^*$. Alors, on a d'après (P 4.3) :

$$H = \ker(I - T)^* \oplus^\perp \overline{\mathrm{Im}(I - T)} = \ker(I - T) \oplus^\perp \overline{\mathrm{Im}(I - T)}.$$

Remarque : La décomposition de cet exercice donne une preuve du théorème ergodique en norme de von Neumann pour une contraction sur un espace de Hilbert, à savoir :

« Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ une contraction ($\|T\| \leq 1$), $M_n = \frac{1}{n}(I + T + \ldots + T^{n-1})$, et P la projection orthogonale sur $\ker(I - T)$. Alors, $M_N \to P$ en SOT-topologie ». (*Cf.* D 9.11 et *cf.* Ex. V.13 pour une autre application).

Exercice V.11

(1) Si $T = PUP^{-1}$, on a $T^n = PU^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, d'où

$$\|T^n\| \leq \|P\|\,\|U^n\|\,\|P^{-1}\| = \|P\|\,\|P^{-1}\| = C.$$

(2) (i) pour $x, y \in H$ et $n \in \mathbb{Z}$, posons $g_{x,y}(n) = \langle T^n x, T^n y\rangle$. Nous avons

$$|g_{x,y}(n)| \leq \|T^n x\|\,\|T^n y\| \leq C^2\|x\|\,\|y\|, \text{ donc } g_{x,y} \in F = \ell^\infty(\mathbb{Z}).$$

Posons alors

$$(x \mid y) = M(g_{x,y}).$$

Il est clair que $(\ \mid\ )$ est un produit scalaire sur H, car $g_{x,y}$ dépend linéairement de x, antilinéairement de y, M est linéaire et de plus, via la positivité de M :

$$g_{x,x}(n) = \|T^n x\|^2 \geq C^{-2}\|x\|^2, \text{ d'où } M(g_{x,x}) \geq C^{-2}\|x\|^2 \text{ et } [x] \geq C^{-1}\|x\|$$

ainsi que, de la même façon, $[x] \leq C\|x\|$.

La norme $[\ \ ]$ sur H est préhilbertienne et équivalente à la norme hilbertienne $\|\ \|$. Cette nouvelle norme est donc elle-même hilbertienne sur H.

(ii) Par définition, nous avons, avec les notations de l'Ex. III.2 :

$$[Tx]^2 = M(g_{(Tx,Tx)}) = M(T_1(g_{x,x})) = M(g_{x,x}) = [x]^2,$$

où nous avons utilisé de façon cruciale l'invariance de M par la translation T_1.

(iii) Les espaces de Hilbert H et K sont isomorphes. Par suite, ils ont la même dimension hilbertienne, ce qui veut dire qu'on peut trouver un ensemble d'indices I et des bases hilbertiennes $(e_i)_{i\in I}, (f_i)_{i\in I}$ de H et K respectivement, indexées par ce *même* ensemble d'indices I. Il n'y a plus qu'à définir

$$P\left(\sum_{i\in I} x_i e_i\right) = \sum_{i\in I} x_i f_i \text{ si } \sum_{i\in I} |x_i|^2 < \infty$$

pour obtenir l'isométrie surjective cherchée $P : H \to K$.

(iv) On remarque d'abord que U est une bijection linéaire de H sur lui-même, comme composée de trois bijections linéaires. Ensuite, on a d'après les questions précédentes :

$$\|Ux\| = \|P^{-1}TPx\| = [TPx] = [Px] = \|x\|,$$

ce qui montre que $U : H \to H$ est une isométrie. Comme on sait déjà que U est surjective, $U : H \to H$ est unitaire et $T = PUP^{-1}$, CQFD. ◊

Exercice V.12

(1) N, prototype de bloc de Jordan, vérifie de façon évidente (regarder l'image des vecteurs de base)

$$N^{d-1} \neq 0 \text{ et } N^d = 0.$$

Supposons $N = Q^2$, alors Q a toutes ses valeurs propres nulles, donc il vérifie $Q^d = 0$ par le théorème de Cayley-Hamilton. Distinguons deux cas :

1. $d = 2p$ est pair. Alors, $N^p = Q^{2p} = Q^d = 0$, ce qui contredit $N^{d-1} \neq 0$.
2. $d = 2p + 1$ est impair. Alors, $N^{p+1} = Q^{2p+2} = Q^{d+1} = 0$, alors que $p + 1 < 2p + 1 = d$ car $d \geq 2$. On a de nouveau une contradiction.

(2) Écrivons $T = D + N$. Si T est inversible, D aussi, car il a les mêmes valeurs propres que T, et l'on peut écrire

$$T = D(I + M) \text{ avec } M = D^{-1}N \text{ nilpotent et } MD = DM.$$

Soit maintenant (u_j) une base de diagonalisation de D : $D(u_j) = \lambda_j u_j$. Soit μ_j des complexes tels que $\lambda_j = e^{\mu_j}$ et $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d)$ défini par $\Delta(u_j) = \mu_j u_j$ pour $1 \leq j \leq n$. $\Delta = P_1(D)$ est un polynôme en D et $e^\Delta = D$. Si maintenant

$$\log(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k \tag{V.17}$$

est le développement en série du logarithme népérien au voisinage de 1, on pose

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} c_k M^k. \tag{V.18}$$

Cette formule a un sens, car vu la nilpotence de M la série dans (V.18) est un polynôme en M : $R = P_2(M)$. De plus, on a $e^R = I + M$ d'après (V.17). Posons $L = \Delta + R$ et $Q = e^{\frac{L}{2}}$, nous avons en utilisant la commutation de D et M :

$$R\Delta = P_2(M)P_1(D) = P_1(D)P_2(M) = \Delta R.$$

Il en résulte que $e^L = e^\Delta e^R = D(I + M) = T$. Et *a fortiori* $Q^2 = e^L = T$.

(3) (i) On raisonne comme dans l'Ex. V.8 : si $f \in H$, f a un *développement de Laurent* $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$ dans la couronne Ω. Quand on calcule

$$\|f\|^2 = \iint_\Omega |f(z)|^2 d\lambda(z)$$

en coordonnées polaires en utilisant la *relation de Parseval du cercle*, on obtient

$$\|f\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \|u_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, e_n\rangle|^2,$$

on est dans les cas d'égalité de la relation de Parseval et donc f est dans l'adhérence de $\mathrm{Vect}(e_n)$, ces derniers formant clairement une suite orthonormée. D'où le résultat demandé.

(ii) C'est évident sur l'expression de la norme, puisque $z \in \Omega \Longrightarrow a < |z| < b$ ce qui donne

$$\|Tf\|^2 = \iint_\Omega |zf(z)|^2 d\lambda(z) \leq b^2 \iint_\Omega |f(z)|^2 d\lambda(z) = b^2\|f\|^2$$

et de même $\|Tf\|^2 \geq a^2\|f\|^2$. Il est également évident que T est inversible et que $T^{-1}f(z) = \frac{1}{z}f(z)$.

(iii) On a $QT = TQ = Q^3$. On procède ensuite par récurrence sur n. La relation $Q(u_n) = \varphi u_n$ est vraie par définition de φ pour $n = 0$. Si elle est vraie pour n, utilisant le fait que $T(u_n) = u_{n+1}$ par définition de T (qui n'est rien d'autre qu'un shift pondéré), et la commutation, nous obtenons

$$Q(u_{n+1}) = Q(T(u_n)) = T(Q(u_n)) = T(\varphi u_n) = u\varphi u_n = \varphi u_{n+1},$$

d'où la relation demandée pour les indices positifs, et on fait de même un récurrence descendante pour les entiers négatifs, en utilisant la commutation de Q avec T^{-1}. Par linéarité, on a $Q(f) = \varphi f$ lorsque $f \in V$, l'espace vectoriel engendré par les u_n. Soit ensuite $f \in H$ quelconque, et $f_j = \sum_{|n|\leq j}\langle f, e_n\rangle e_n \in V$. On sait que, quand $j \to \infty$, f_j converge vers f dans H, et aussi uniformément sur tout compact de Ω (en abrégé dans $H(\Omega)$), et l'on a $Q(f_j) = \varphi f_j$. Le premier membre converge vers $Q(f)$ dans H puisque $Q \in \mathcal{L}(H)$. A fortiori, il converge vers $Q(f)$ dans $H(\Omega)$ et de même, le second membre converge vers φf dans $H(\Omega)$. Par unicité de la limite dans $H(\Omega)$, on obtient

$$Q(f) = \varphi f \ \forall f \in H \text{ puis } Q^2(f) = \varphi^2 f = Tf = uf,\ \forall f \in H.$$

Prenant $f = 1$ dans cette identité, nous obtenons $\varphi^2 = u$. Mais si une telle racine carrée holomorphe φ de u existait sur Ω, en dérivant nous aurions

$$\frac{1}{2i\pi}\frac{1}{z} = 2\frac{1}{2i\pi}\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \quad \forall z \in \Omega$$

et en intégrant les deux membres de cette relation sur le cercle $\{|z| = r\}$ avec $a < r < b$, nous obtiendrions

$$1 = 2\int_{|z|=r} \frac{1}{2i\pi}\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz = 2p$$

avec p entier, d'après les propriétés de l'indice. Ce qui est évidemment absurde ! *Nous renvoyons au dernier chapitre (chapitre 10) pour une étude approfondie des éléments inversibles d'une algèbre de Banach, en particulier de la $C^\star$-algèbre $\mathcal{L}(H)$.*

Exercice V.13

(1) Par développement des deux membres, l'inégalité à démontrer équivaut à

$$\|Ax\|^2 \leq \langle Ax, x\rangle \ \forall x \in H.$$

Or, puisque A est une contraction positive ($0 \leq A \leq I$), cette inégalité n'est autre que l'inégalité (VI.2) de l'Ex. VI.6.

(2) (i) On écrit $y = x - A_1 \dots A_r x$ comme somme télescopique :

$$y = (x - A_r x) + \sum_{k=1}^{r-1}(A_{r-k+1} \dots A_r x - A_{r-k} \dots A_r x)$$

d'où par l'inégalité triangulaire, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la question (1) pour les contractions positives A_{r-k} et un nouveau télescopage :

$$\begin{aligned}
\|y\|^2 &\leq \Big(\|x - A_r x\| + \sum_{k=1}^{r-1} \|(A_{r-k+1} \dots A_r x - A_{r-k} \dots A_r x\|\Big)^2 \\
&\leq r\Big(\|x - A_r x\|^2 + \sum_{k=1}^{r-1} \|(A_{r-k+1} \dots A_r x - A_{r-k} \dots A_r x\|^2\Big) \\
&\leq r\Big(\|x\|^2 - \|A_r x\|^2 + \sum_{k=1}^{r-1}(\|(A_{r-k+1} \dots A_r x\|^2 - \|A_{r-k} \dots A_r x\|^2)\Big) \\
&= r(\|x\|^2 - \|A_1 \dots A_r x\|^2) = r(\|x\|^2 - \|Tx\|^2).
\end{aligned}$$

Ensuite, si $\|x_n\| \leq C$ et si $\|x_n\| - \|Tx_n\| \to 0$, on a d'après (V.7) :

$$\begin{aligned}
\|x_n - Tx_n\|^2 &\leq r(\|x_n\|^2 - \|Tx_n\|^2) = r(\|x_n\| - \|Tx_n\|)(\|x_n\| + \|Tx_n\|) \\
&\leq 2rC(\|x_n\| - \|Tx_n\|),
\end{aligned}$$

ce qui donne (V.8).

(ii) C'est évident : si $x \in N$, on a $T^n x = x = Px$ pour tout entier $n \geq 0$.

(iii) Si $x = a - Ta \in \mathrm{Im}(I - T)$, on a $T^n x = T^n a - T^{n+1} a \stackrel{def}{=} x_n - Tx_n$. Mais, puisque T est une contraction comme produit de contractions, la suite $(\|x_n\|) = (\|T^n a\|)$ est décroissante, donc converge vers une limite l, si bien que

$$\|x_n\| - \|Tx_n\| = \|x_n\| - \|x_{n+1}\| \to l - l = 0.$$

La relation (V.8) implique alors que $T^n x = x_n - Tx_n \to 0 = Px$, comme on l'a vu dans l'Ex. V.10. Comme il est clair que $\{x \,;\, T^n x \to 0\}$ est fermé si $\|T\| \leq 1$, cette relation vaut encore pour x dans l'adhérence de $\mathrm{Im}(I - T)$.

(iv) D'après la décomposition orthogonale obtenue dans l'Ex. V.10 pour une contraction, on a le premier résultat. Ensuite, on procède par récurrence sur r à partir de (1). Par exemple, si $r = 2$, on a puisque A_1 et A_2 sont des contractions :

$$\begin{aligned} Tx = x &\Longrightarrow \|A_1 A_2 x\| = \|x\| \Longrightarrow \|A_2 x\| = \|x\| \Longrightarrow A_2 x = x \\ &\Longrightarrow \|A_1 x\| = \|x\| \Longrightarrow A_1 x = x, \end{aligned}$$

ce qui donne l'égalité voulue $N = \bigcap_{j=1}^{r} \ker(A_j - I)$.

(4) Les P_j sont des contractions positives, on peut donc leur appliquer ce qui précède. Et $\ker(P_j - I) = E_j$, donc ici $N = \bigcap_{j=1}^{r} E_j$. On voit donc que T^n converge en topologie forte vers P_N, la projection orthogonale sur l'intersection des E_j. Un dessin dans le plan, quand $r = 2$, E_1, E_2 sont deux droites sécantes en 0, et $N = \{0\}$, donne une idée claire de la situation.

OPÉRATEURS CONTINUS ENTRE ESPACES DE HILBERT

VI

1 ÉNONCÉS

Exercice VI.1

Soit H un espace de Hilbert *complexe* et $A \in \mathcal{L}(H)$.

(1) Montrer que $\forall x, y \in H$, on a la « formule de polarisation » (*cf.* P 5.3) :

$$\langle Ax, y\rangle =$$

$$\frac{1}{4}[\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle + i\langle A(x+iy), x+iy\rangle - i\langle A(x-iy), x-iy\rangle].$$

(2) En déduire que si $\forall x \in H, \langle Ax, x\rangle = 0$, alors $A = 0$.

(3) Montrer que $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}\ \forall x \in H$ si et seulement si $A = A^*$.

(4) Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $A = A^*$, montrer que $\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}$ (*cf.* P 6.9).

(5) Montrer que si $\forall x \in H, \langle Ax, x\rangle \geq 0$, alors $\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}^+$ (*cf.* P 6.10).

Exercice VI.2

Soit H un espace de Hilbert complexe et $A \in \mathcal{L}(H)$.

(1) Montrer que $A = T + iS$ avec T, S auto-adjoints si et seulement si $T = \frac{1}{2}(A + A^*)$ et $S = \frac{1}{2i}(A - A^*)$ (D 6.2).

(2) Montrer que A est normal si et seulement si $TS = ST$ (D 6.3).

(3) Supposons A normal. Montrer que A est inversible si et seulement si $T^2 + S^2$ est inversible. On justifiera l'égalité $A^{-1} = A^*(T^2 + S^2)^{-1}$.

Exercice VI.3

Soit H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$.

(1) Montrer que si $x \neq 0$, alors x est un vecteur propre de T si et seulement si $|\langle Tx, x\rangle| = \|Tx\|\,\|x\|$.

(2) En déduire que T admet une valeur propre μ avec $|\mu| = \|T\|$ si et seulement si $\exists\, x \in H$ tel que $\|x\| = 1$ et $|\langle Tx, x\rangle| = \|T\|$.

(3) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite numérique. Montrer que

si $[\forall n \geq 1, \alpha_n \geq 0$, et $\sum_{n\geq 1} \alpha_n^2 = 1]$ alors on a $\sum_{n\geq 1} \alpha_n\alpha_{n+1} < 1$. (On pourra par exemple utiliser (2) avec $H = \ell^2$ et T donnée par $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$.)

Exercice VI.4

Soit $H = L^2[0,1]$ et $T : H \to H$ définie par

$$Tf(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt.$$

(1) Montrer que $\|T\| < 1$ et que pour $n \geq 1$,

$$T^n f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(t)dt.$$

(2) Résoudre l'équation intégrale, avec $g \in H$ donnée et $f \in H$ l'inconnue :

$$f(x) = g(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt.$$

Exercice VI.5 : Rayon numérique

Soit H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$. Soit

$$W(T) = \left\{ \frac{|\langle Tx, y\rangle|}{\|x\|\|y\|} \;;\quad 0 \neq \|x\| \leq 1,\ 0 \neq \|y\| \leq 1 \right\}.$$

(1) Montrer que

$$\|T\| = \sup W(T).$$

(2) Pour $T \in \mathcal{L}(H)$, notons (rayon numérique de T) :

$$w(T) = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| \;;\ \|x\| = 1\}.$$

(a) Montrer que $\frac{1}{2}\|T\| \leq w(T) \leq \|T\|$.
(b) Montrer que $w(T^2) \leq w(T)^2$.
(c) Supposons que T est normal. Montrer que $\|T\| = w(T)$.

Exercice VI.6

Soit H un espace de Hilbert complexe.

(1) Soit $B \in \mathcal{L}(H)$ un élément positif (*cf.* D 6.6).

(i) Montrer que

$$\forall x, y \in H, |\langle Bx, y\rangle|^2 \leq \langle Bx, x\rangle \, \langle By, y\rangle. \qquad (VI.1)$$

(ii) En déduire que

$$\forall x \in H, \|Bx\|^2 \leq \langle Bx, x\rangle \, \|B\|. \qquad (VI.2)$$

(iii) Soit $C = \|B\|I - B$. Montrer qu'il existe une suite normée $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \|Cy_n\| = 0$ et que $0 \in \sigma(C)$ (D 10.4).

(2) Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint. On note

$$a = \inf\{\langle Ax, x\rangle \ ; \ \|x\| = 1\} \text{ et } b = \sup\{\langle Ax, x\rangle \ ; \ \|x\| = 1\}.$$

(i) Montrer que a et b sont dans le spectre de A.

(ii) Établir l'inclusion

$$\sigma(A) \subseteq [a, b].$$

(3) Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$ deux opérateurs positifs (D 6.6).

Soit la suite d'opérateurs définie par

$$A_1 = \|A\|^{-1}A, \ A_{n+1} = A_n - A_n^2, \ n = 1, 2, \ldots$$

(a) Montrer par récurrence que $0 \leq A_n \leq I$.

(b) Montrer que si $AB = BA$, alors AB est positif.

Exercice VI.7 : Suites croissantes majorées

Soit H un espace de Hilbert complexe et $A, B \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoints. On dira que $A \leq B$ si $B - A \geq 0$.

Soit $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{L}(H)$ une suite d'opérateurs auto-adjoints et $B \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint. Supposons que $0 \leq A_1 \leq A_2 \leq \ldots \leq B$.

(1) Montrer que pour tout $x \in H$ et $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall x \in H, \|A_n x - A_m x\|^2 \leq |\langle A_n x, x\rangle - \langle A_m x, x\rangle| \, \|B\|.$$

(2) En déduire qu'il existe un opérateur auto-adjoint $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $A \leq B$ et pour tout $x \in H$, $\lim_n A_n x = Ax$.

(3) Montrer par un exemple que la convergence dans (2) peut ne pas être uniforme.

Exercice VI.8

Soit H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$ positif. **Le but de l'exercice est de démontrer que T admet une racine carrée positive unique (c'est-à-dire, $B^2 = T$ et $B \geq 0$).**

Sans perte de généralité, on peut supposer que de plus T est une contraction, c'est-à-dire $\|T\| \leq 1$, ou encore $0 \leq T \leq I$. On pose aussi $S = I - T$. Soit $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{L}(H)$ la suite définie par

$$A_0 = 0,\ A_{n+1} = \frac{1}{2}(S + A_n^2), \quad n = 0, 1, \ldots$$

(1) (i) Montrer que $0 \leq S \leq I$.

(ii) Montrer que $S^n \geq 0$ pour tout entier $n \geq 0$.

(2) Montrer que les A_n, ainsi que les $A_n - A_{n-1}$, sont des polynômes en S à coefficients positifs.

(3) Montrer que pour tout $n \geq 0$, A_n est positif et commute avec T.

(4) Montrer que pour tout n, $A_n \leq I$.

(5) Montrer que pour tout n, $A_n \leq A_{n+1}$.

(6) En déduire qu'il existe $A \in \mathcal{L}(H), 0 \leq A \leq I$, vérifiant si on pose $B = I - A \geq 0$:

$$\forall x \in H,\ A_n x \to Ax, \quad \text{et de plus } \ 2A = S + A^2,\ TA = AT \text{ et } B^2 = T, BT = TB.$$

(7) Montrer que B est *unique.*

Exercice VI.9

Soit H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal. On définit

$$F = \{x \in H\ ;\ \|A^n x\| \leq \|x\|,\ \forall n \geq 0\}.$$

(1) Montrer que l'on a aussi

$$F = \{x \in H\ ;\ (\|A^n x\|)_{n\geq 0} \ \text{ est bornée}\}.$$

(2) En déduire que F est un sous-espace vectoriel qui vérifie (*cf.* D 4.9) :

$$\forall S \in \{A\}',\ S(F) \subseteq F.$$

Exercice VI.10 : Sous-espaces réduisants

H est un espace de Hilbert complexe, et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal.

(1) Montrer que tout espace propre de T est orthogonalement réduisant pour T (*cf.* D 6.10).

(2) On suppose que H est de dimension finie.

(i) Soient $\{(\lambda_i, H_i, i = 1, \ldots, p)\}$ les couples (valeur propre, espace propre) de T. Montrer que $H = \oplus^\perp(H_i, i = 1, \ldots, p)$.

(ii) Soit $x = (x_1, \dots, x_p)$, avec $x_i \in H_i$, un vecteur arbitraire de H. Montrer que chaque vecteur $(0, 0, \dots, x_j, 0, \dots, 0)$, $j = 1, \dots, p$, est dans tout sous-espace invariant par T contenant x.

(iii) En déduire que tout sous-espace invariant par T est orthogonalement réduisant pour T (*ou encore est aussi invariant par* T^*).

(3) Montrer à l'aide d'un exemple que, si H n'est pas de dimension finie, il peut exister des sous-espaces invariants non orthogonalement réduisants. On pourra utiliser l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ formé des suites $u = (\dots, u_n, \dots, u_0, \dots)$; $n \in \mathbb{Z}$, muni de la base orthonormée $(e_p)_{p \in \mathbb{Z}}$, dont seul le terme de rang p est non nul et vaut 1, et l'opérateur (shift bilatéral) S qui transforme e_p en e_{p+1}.

Exercice VI.11 : Isométries partielles

Soit H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$. On dira que T est une *isométrie partielle* si, $\forall x \in \mathrm{Ker}(T)^\perp$, $\|Tx\| = \|x\|$.

(1) Montrer que si T est une isométrie partielle, alors l'image de T est fermée.

(2) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes (*cf.* D 6.5) :

(a) T est une isométrie partielle ;

(b) $TT^*T = T$;

(c) TT^* est une projection orthogonale ;

(d) T^*T est une projection orthogonale.

Exercice VI.12

Soit H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$. On dira que T admet un *inverse généralisé* s'il existe $S \in \mathcal{L}(H)$ tel que $TST = T$ et $STS = S$.

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) T est une isométrie partielle ;

(b) T est une contraction et admet un inverse généralisé qui est une contraction.

Exercice VI.13 : Décomposition polaire

Soit H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$. On désignera par $|T| = (T^*T)^{1/2}$ la racine carrée positive de l'opérateur positif T^*T (*cf.* D 6.8).

(1) (a) Montrer que pour tout $x \in H$,

$$\|Tx\| = \|\,|T|x\|. \tag{$VI.3$}$$

(b) En déduire que (*cf.* D 5.6) :

$$\ker(T)^\perp = \ker(|T|)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(|T|)}.$$

(2) Soit $V_0 : \mathrm{Im}(|T|) \to \mathrm{Im}(T)$ définie par

$$V_0(|T|x) = Tx \quad \text{pour tout } x \in H.$$

Montrer que V_0 est bien définie et qu'on peut l'étendre en une isométrie

$$V : \ker(T)^{\perp} \to \overline{\mathrm{Im}(T)}.$$

(3) **« Décomposition polaire ».** Montrer que $T = W|T|$, avec W une isométrie partielle.

(4) **« Unicité de la décomposition polaire ».** Montrer que si $T = UP$ avec $P \geq 0$ et U isométrie partielle avec $\ker(U) = \ker(P)$, alors $P = |T|$ et $U = W$.

(5) **« Décomposition polaire maximale ».** Montrer que $T = W|T|$, avec W une isométrie ou co-isométrie (W est dite co-isométrie si W^* est une isométrie).

Exercice VI.14 : Densité des semi-inversibles

Soit H un espace de Hilbert séparable, complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$.

(1) (a) Montrer que T est injectif à image fermée si et seulement si il existe $S \in \mathcal{L}(H)$ tel que $ST = I$.

(b) Montrer que T est surjectif si et seulement si il existe $S \in \mathcal{L}(H)$ tel que $TS = I$.

(2) Montrer que l'ensemble des opérateurs inversibles à droite ou à gauche est dense dans $\mathcal{L}(H)$.

(On pourra utiliser la décomposition polaire maximale).

(3) Montrer que l'ensemble des opérateurs inversibles est dense dans $\mathcal{L}(H)$ si et seulement si $\dim H$ est finie.

Exercice VI.15 : Points extrémaux

Soit H un espace de Hilbert complexe, $B = \{x \,;\, \|x\| \leq 1\}$ sa boule unité fermée, qui est convexe, $S = \{x \,;\, \|x\| = 1\} \subset B$ sa sphère unité.

(1) Montrer que si $x \in S$ et $x = ty + (1-t)z$ avec $t \in]0,1[$ et $x, y \in B$, alors $x = y = z$.

(Dans ce cas, on dit que la boule unité de H est strictement convexe, ce qui revient à dire que l'ensemble des points extrémaux, ou extrêmes, de B est égal à S. *Cf.* aussi Ex. IX.1 du Chap. IX et D 9.4).

On se propose maintenant de trouver les points extrémaux de la boule unité $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}(H)$.

(2) Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, auto-adjoint. Montrer que si $\|A\| \leq 1$, alors il existe un opérateur U unitaire (*cf.* D 6.4) tel que

$$A = \frac{1}{2}(U + U^*).$$

(On pourra considérer l'opérateur $U = A + i\sqrt{I - A^2}$.)

(3) Soit V un point de la boule unité $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}(H)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. V est un point extrémal de $\mathcal{B}$.
2. V est une isométrie ou une co-isométrie.

(4) On suppose $\dim H = \infty$. Soit $T \in \mathcal{B}$ une isométrie non-surjective, $U_1, \ldots, U_n$ unitaires, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positifs de somme 1. En utilisant l'Ex. V.6, montrer l'inégalité

$$\|T - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j U_j\| \geq \frac{2}{n}.$$

Commenter.

Exercice VI.16 : Sommes d'opérateurs unitaires

Soit H un espace de Hilbert complexe.

(1) Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ une contraction (c'est-à-dire $\|T\| \leq 1$), et soit $T = T_1 + iT_2$ avec $T_1 = T_1^*$ et $T_2 = T_2^*$ sa décomposition cartésienne (*cf.* Ex. VI.2).

(i) Montrer que T_1, T_2 sont des contractions.

(ii) Montrer que $A = \frac{1}{2}(T_1 - \sqrt{I - T_2^2})$ est une contraction.

(2) Montrer que T est somme de trois opérateurs unitaires.

(On pourra montrer que l'opérateur $U = A + i\sqrt{I - A^2}$ est unitaire et trouver W unitaire tel que $T = U + U^* + W$).

Exercice VI.17 : Demi-sommes d'opérateurs unitaires

Soit H un espace de Hilbert complexe.

(1) Soit $T, S \in \mathcal{L}(H)$ avec S inversible.

Montrer que l'on a $\dim \ker(T) = \dim \ker(TS)$.

(2) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. T est la moyenne arithmétique de deux opérateurs unitaires, c'est-à-dire :

$$T = \frac{1}{2}(V + W) \text{ avec } V, W \text{ unitaires ;}$$

2. T est une contraction et $\dim \ker(T) = \dim \ker(T^*)$.

(3) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. T est la moyenne arithmétique de deux opérateurs unitaires *qui commutent* (c'est-à-dire : $T = \frac{1}{2}(V + W)$ avec V, W unitaires et $VW = WV$) ;
2. T est une contraction normale.

2 Solutions

Exercice VI.1

(1) Pour x et y fixés dans H et $\alpha \in \mathbb{C}$, notons $f(\alpha) = \langle A(x + \alpha y), x + \alpha y\rangle$. On a, en utilisant la définition du produit scalaire,

$f(\alpha) = \langle Ax, x\rangle + \alpha\langle Ay, x\rangle + \overline{\alpha}\langle Ax, y\rangle + |\alpha|^2\langle Ay, y\rangle$.

On en déduit que $4\langle Ax, y\rangle = \sum\{\alpha f(\alpha)\ ; \alpha = \pm 1, \pm i\}$, ce qui est l'égalité cherchée.

(2) Par hypothèse, avec les notations de (1), chaque $\langle A(x+\alpha y), x+\alpha y\rangle$ avec $\alpha = \pm 1, \pm i$, est nul, donc $\forall x, y \in H, \langle Ax, y\rangle = 0$. Prenant $y = Ax$, nous obtenons : $\forall x \in H, \|Ax\|^2 = 0$, puis $Ax = 0$ et $A = 0$.

(3) (i) Supposons que $A = A^*$. Alors, $\forall x, y \in H, \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$, et en particulier $\forall x \in H, \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}$, d'après la définition du produit scalaire (*cf.* D 5.1). Ainsi, $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$.

(ii) Supposons que $\forall x \in H, \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$. On note $B = A - A^*$, et on observe que, pour tout $x \in H$, on a :

$$\langle Bx, x\rangle = \langle Ax, x\rangle - \langle x, Ax\rangle = \langle Ax, x\rangle - \overline{\langle Ax, x\rangle} = 0.$$

D'après (2), cela implique $B = 0$, ou encore $A = A^*$, et A est auto-adjoint.

(4) Soit $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Montrons que $b \neq 0 \Longrightarrow \lambda \notin \sigma(A)$. Comme $\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$\|Ax - (a + ib)x\|^2 = \|Ax - ax\|^2 + b^2\|x\|^2 \geq b^2\|x\|^2.$$

Puisque $b \neq 0$, on peut appliquer le résultat de l'Ex. IV. 9 : $A - \lambda I$ est injectif et à image fermée. Idem pour $A - \overline{\lambda} I$.

D'autre part, on sait (P 6.3) que $\mathrm{Im}(A - \lambda I) = \overline{\mathrm{Im}(A - \lambda I)} = (\ker(A - \overline{\lambda} I))^\perp = H$. $A - \lambda I$ est donc surjectif, et $\lambda \notin \sigma(A)$. Ceci montre bien que $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

(5) Par (3), A vérifie $A = A^*$; par (4), $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Montrons que si $a < 0$, alors $a \notin \sigma(A)$. On a, puisque $\langle Ax, x\rangle \geq 0$:

$$\|(A - a)x\|^2 = \|Ax\|^2 - 2a\langle Ax, x\rangle + a^2\|x\|^2 \geq \|Ax\|^2 + a^2\|x\|^2 \geq a^2\|x\|^2.$$

Exactement comme en (3), on déduit que $A - aI$ est inversible : on a donc bien $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$.

Exercice VI.2

(1) Si T et S sont auto-adjoints et $A = T + iS$, alors $A^* = T - iS$; donc $A + A^* = 2T$ et $A - A^* = 2iS$.

Réciproquement, pour $A \in \mathcal{L}(H)$, $\frac{1}{2}(A + A^*)$ et $\frac{1}{2i}(A - A^*)$ sont auto-adjoints, et l'on a $A = T + iS$.

(2) Pour $A \in \mathcal{L}(H)$, on peut écrire
$A^*A - AA^* = (T - iS)(T + iS) - (T + iS)(T - iS) = -2i(ST - TS)$
donc $[A^*A = AA^*] \Leftrightarrow [TS = ST]$.

(3) Si A est normal, alors

$$AA^* = A^*A = (T + iS)(T - iS) = T^2 + S^2. \qquad (VI.4)$$

(i) Si A est inversible, A^* l'est aussi, et il en est de même du produit A^*A. $T^2 + S^2$ est donc inversible.

(ii) Si $T^2 + S^2$ est inversible, en multipliant $(VI.4)$ à gauche et à droite par $(T^2 + S^2)^{-1}$, on obtient
$((T^2+S^2)^{-1}A^*)A = I$ et $A(A^*(T^2+S^2)^{-1}) = I$. Ceci montre que A est inversible, d'inverse donné par $A^*(T^2 + S^2)^{-1}$.

Exercice VI.3

(1) (i) Si $Tx = \lambda x$, on a

$$\langle Tx, x\rangle = \lambda\|x^2\| \text{ et } |\langle Tx, x\rangle| = |\lambda|\ \|x^2\| = \|\lambda x\|\ \|x\|.$$

(ii) Si, pour $x \neq 0, |\langle Tx, x\rangle| = \|Tx\|\ \|x\|$, on utilise (P 5.4) qui exprime qu'on a égalité dans Cauchy-Schwarz si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Tx = \lambda x$.

(2) (i) Si μ est une valeur propre telle que $|\mu| = \|T\|$, soit x un vecteur propre normé ; $Tx = \mu x, \|x\| = 1$. Alors $|\langle Tx, x\rangle| = |\mu|\ \|x\|^2 = |\mu| = \|T\|$.

(ii) Si, pour $x \in H$ avec $\|x\| = 1$, on a $|\langle Tx, x\rangle| = \|T\|$, l'égalité étudiée en (1) est vérifiée et x est vecteur propre de T. L'équation $Tx = \lambda x$ montre que $|\lambda| = \|T\|$.

(3) Les hypothèses faites sur $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nous permettent de considérer la suite $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ comme un vecteur normé de $H = \ell^2$.
$T \in \mathcal{L}(H)$ avec $\|T\| = 1$ (voir l'Ex. IV.3) et on a $\langle T\alpha, \alpha\rangle = \sum_{n\geq 1} \alpha_n\alpha_{n+1}$ avec $\|\alpha\|^2 = \sum_{n\geq 1} \alpha_n^2 = 1$ et $\|T\alpha\|^2 = \sum_{n\geq 2} \alpha_n^2 \leq 1$. D'où

$$\sum_{n\geq 1} \alpha_n\alpha_{n+1} = \langle T\alpha, \alpha\rangle \leq \|T\alpha\|\ \|\alpha\| \leq 1.$$

Reste à montrer l'inégalité stricte. Mais si jamais $\langle T\alpha, \alpha\rangle = 1$, nous avons $1 = \langle T\alpha, \alpha\rangle \leq \|T\alpha\| \leq 1$, et $\|T\alpha\| = 1$. On peut donc appliquer (2) ; α est vecteur propre de T pour une valeur propre μ et $\mu = \|T\| = 1$.

Par suite, $\alpha_{n+1} = \alpha_n$ pour tout entier $n \geq 1$. Ceci est incompatible avec l'appartenance de α à ℓ^2. On ne peut donc pas obtenir $\sum_{n\geq 1} \alpha_n\alpha_{n+1} = 1$.

Exercice VI.4

(1) (i) Nous avons via Cauchy-Schwarz (P 5.4) :

$$\begin{aligned}\|Tf\|^2 &= \int_0^1 |Tf(x)|^2 dx = \int_0^1 \left|\int_0^x (x-t)f(t)dt\right|^2 dx \\ &\le \int_0^1 \left[\int_0^x |x-t|^2 dt \int_0^x |f(t)|^2 dt\right] dx = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}\int_0^x |f(t)|^2 dt\right] dx \le \frac{1}{3}\|f\|^2.\end{aligned}$$

D'où $\|Tf\| \le \frac{1}{3^{1/2}}\|f\|$ et $\|T\| \le \frac{1}{3^{1/2}} < 1$.

(ii) Par récurrence. Pour $n = 1$, c'est évident. Supposons la formule vraie jusqu'au rang n. Nous avons alors

$$\begin{aligned}(T^{n+1}f)(x) &= T(T^n f)(x) = \int_0^x (x-t)(T^n f)(t)dt \\ &= \int_0^x (x-t)\left[\int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(s)ds\right] dt = \int_0^x f(s)\left[\int_s^x (x-t)\frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}dt\right] ds \\ &= \int_0^x \frac{f(s)}{(2n-1)!}\left[\int_s^x (x-t)(t-s)^{2n-1}dt\right] ds = \int_0^x \frac{f(s)}{(2n-1)!}\frac{(x-s)^{2n+1}}{2n(2n+1)}ds.\end{aligned}$$

Soit encore $(T^{n+1}f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} f(t)dt$.

(2) L'équation $f(x) = g(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt$ s'écrit $f(x) = g(x) + Tf(x)$ ou encore $((I-T)f)(x) = g(x)$.

Puisque $\|T\| < 1$, $(I-T)$ est inversible et on a $(I-T)^{-1} = \sum_{n\ge 0} T^n$.

D'où la relation

$$\begin{aligned}f(x) = ((I-T)^{-1}g)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(T^n g)(x) = g(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(T^n g)(x) \\ &= g(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}g(t)dt.\end{aligned}$$

Comme la série $\sum_{n\ge 1}\frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ converge uniformément sur le segment $[0, x]$, on a finalement

$$f(x) = g(x) + \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}g(t)dt = g(x) + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)g(t)dt.$$

Une solution alternative consisterait à remarquer que T est le carré de l'opérateur de Volterra étudié dans l'Ex. IV.8.

Exercice VI.5

Pour tous $x, y \in H \setminus \{0\}$, on a

$$\frac{|\langle Tx, y\rangle|}{\|x\|\,\|y\|} \leq \frac{\|Tx\|\,\|y\|}{\|x\|\,\|y\|} \leq \|T\|.$$

D'où $\sup W(T) \leq \|T\|$.

D'autre part, en faisant $y = Tx$, $x \neq 0$, on voit que

$$\frac{|\langle Tx, Tx\rangle|}{\|x\|\,\|Tx\|} = \frac{\|Tx\|^2}{\|x\|\,\|Tx\|} = \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Cela donne $\|T\| \leq \sup W(T)$, et finalement $\|T\| = \sup W(T)$.

(2) (a) Nous avons évidemment $w(T) \leq W(T) = \|T\|$. Montrons l'autre inégalité. Soit $x, y \in H$ de norme un. Alors :

$$2[\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle] = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle\ ;$$

$$2|\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle| \leq w(T)(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2w(T)(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4w(T).$$

En prenant $y = \frac{Tx}{\|Tx\|}$ et en remplacant T par λT avec $|\lambda| = 1$, on obtient

$$\left|\|Tx\| + \|Tx\|^{-1}\lambda^2\langle T^2x, x\rangle\right| \leq 2w(T).$$

Si $\langle T^2x, x\rangle = |\langle T^2x, x\rangle| \exp(i\theta)$, on choisit alors $\lambda = \exp(-i\frac{\theta}{2})$, ce qui donne après multiplication par $\|Tx\|$:

$$\|x\| = 1 \Longrightarrow \|Tx\|^2 + |\langle T^2x, x\rangle| \leq 2w(T)\|Tx\|. \qquad (VI.5)$$

Ceci implique en particulier que $\|x\| = 1 \Longrightarrow \|Tx\| \leq 2w(T)$. D'où l'inégalité $\|T\| \leq 2w(T)$, comme demandé.

(b) Les inégalités (VI.5) et $2ab \leq a^2 + b^2$ si $a, b \geq 0$ nous donnent, si $\|x\| = 1$:

$$|\langle T^2x, x\rangle| \leq 2w(T)\|Tx\| - \|Tx\|^2 \leq w(T)^2,$$

d'où en passant au sup sur les x de norme 1 : $w(T^2) \leq w(T)^2$.

(On peut montrer (Halmos) que l'on a en fait $w(T^n) \leq w(T)^n$ pour n entier ≥ 1, mais la preuve est plus difficile, et le résultat ne nous servira pas ici. Il est aussi à noter que l'inégalité $w(AB) \leq w(A)w(B)$ est fausse en général, même si A et B commutent, *cf.* Halmos.)

(c) Puisque A est normal, on a pour $n \geq 1$, en itérant (b) :

$$\|A\|^{2^n} = (\|A^*A\|^{2^n})^{1/2} = \|(A^*A)^{2^n}\|^{1/2} = \|(A^*)^{2^n}A^{2^n}\|^{1/2} = \|A^{2^n}\|$$
$$\leq 2w(A^{2^n}) \leq 2w(A)^{2^n}.$$

D'où, $\|A\| \leq 2^{\frac{1}{2^n}} w(A)$.

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $\|A\| \leq w(A)$.

Exercice VI.6

(1) (i) Il s'agit simplement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz P 5.4 pour la forme sesquilinéaire φ définie par $\varphi(x,y) = \langle Bx, y\rangle$, dont la forme hermitienne associée

$$\Phi(x) = \varphi(x,x) = \langle Bx, x\rangle$$

est positive par hypothèse.

(ii) Choisissons $y = Bx$ dans $(VI.1)$; on obtient

$$\|Bx\|^4 \leq \langle Bx, x\rangle\langle B^2x, Bx\rangle \leq \langle Bx, x\rangle\|B^2x\|\,\|Bx\| \leq \langle Bx, x\rangle\|B\|\,\|Bx\|^2.$$

Ceci fournit la relation $(VI.2)$.

(iii) Posons $C = \|B\|I - B$. Nous voyons que $\|x\| = 1$ entraîne

$$\langle Cx, x\rangle = \langle(\|B\|I - B)x, x\rangle = \|B\|\,\|x\|^2 - \langle Bx, x\rangle = \|B\| - \langle Bx, x\rangle \geq 0.$$

C est donc positif.

Puisque $\|B\| = \sup\{\langle Bx, x\rangle\ ;\ \|x\| = 1\}$ (*cf.* Ex. VI.5 (2)), il existe une suite normée $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\|B\| = \lim_{n\to\infty}\langle By_n, y_n\rangle$, soit $\lim_{n\to\infty}\langle Cy_n, y_n\rangle = 0$. En appliquant $(VI.2)$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\|Cy_n\| = 0. \tag{$VI.6$}$$

Il reste à montrer que $0 \in \sigma(C)$. Or, C inversible entraînerait

$$1 = \|y_n\| = \|C^{-1}(Cy_n)\| \leq \|C^{-1}\|\,\|Cy_n\|,$$

ce qui contredit $(VI.6)$; on a bien $0 \in \sigma(C)$.

(2) (i) Les définitions de a et b entraînent $b - A \geq 0$ et $A - a \geq 0$. On a aussi

$$\|b - A\| = \sup\{|\langle(b - A)x, x\rangle|\ ;\ \|x\| = 1\} = b - a. \tag{$VI.7$}$$

$$\text{et } \|A - a\| = \sup\{|\langle(A - a)x, x\rangle|\ ;\ \|x\| = 1\} = b - a. \tag{$VI.8$}$$

Avec les notations de $(VI.1)$, si $B = b - A, C = a - A$, alors $0 \in \sigma(a - A)$.

De même, si $B = A - a, C = b - A$, alors $0 \in \sigma(A - b)$.

Par application de l'Ex. IV.6, on obtient $a \in \sigma(A)$ et $b \in \sigma(A)$.

(ii) $b - A \geq 0$, donc $\sigma(b - A) \subseteq \mathbb{R}^+$ (*cf.* Ex. VI.1), et en appliquant (5), $\sigma(b - A) \subseteq [0, b - a]$; on obtient bien

$$\sigma(A) \subseteq [a, b].$$

(3) $A \geq 0$, $B \geq 0$ et $AB = BA$. Si $A = 0$, le résultat est évident. Supposons que $A \neq 0$. Considérons la suite d'opérateurs définie par

$$A_1 = \|A\|^{-1}A,\ A_{n+1} = A_n - A_n^2,\ n = 1, 2, \ldots$$

(a) Montrons par récurrence que $0 \le A_n \le I$. Puisque $A \ge 0$, $A_1 \ge 0$. Et $A_1 \le I$ car $\|A_1\| = 1$. Supposons que $0 \le A_k \le I$. Alors $0 \le I - A_k \le I$. On a pour $x \in H$ et $y = A_k x$:

$$\langle A_k^2(I - A_k)x, x\rangle = \langle (I - A_k)A_k x, A_k x) = \langle (I - A_k)y, y\rangle \ge 0, \text{ donc } A_k^2(I - A_k) \ge 0.$$

On a de même $A_k(I-A_k)^2 \ge 0$. Puisque la somme de deux opérateurs positifs est positive, cela nous donne

$$A_{k+1} = A_k - A_k^2 = A_k^2(I - A_k) + A_k(I - A_k)^2 \ge 0.$$

D'autre part, comme $A_k^2 \ge 0$ et $I - A_k \ge 0$,

$$I - A_{k+1} = A_k^2 + I - A_k \ge 0, \text{ ce qui implique } A_{k+1} \le I.$$

(b) Montrons que $\langle ABx, x\rangle \ge 0,\ \forall x \in H$. Nous avons

$$A_1 = A_1^2 + A_2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3 = \ldots = A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2 + A_{n+1}.$$

Comme, $A_{n+1} \ge 0$, $A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2 = A_1 - A_{n+1} \le A_1$. D'où,

$$\sum_{k=1}^{n} \|A_k x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle A_k x, A_k x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle A_k^2 x, x\rangle \le \langle A_1 x, x\rangle.$$

Donc, la série $\sum_k \|A_k x\|^2$ est convergente. En particulier, $\|A_n x\|^2 \to 0$ et donc $A_n x \to 0$. Il s'ensuit que $(\sum_{k=1}^n A_k^2)x = (A_1 - A_{n+1})x \to A_1 x$.

Maintenant pour $x \in H$ et $y_k = A_k x$, nous avons

$$\langle ABx, x\rangle = \|A\|\langle BA_1 x, x\rangle = \|A\| \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle BA_k^2 x, x\rangle = \|A\| \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle By_k, y_k\rangle \ge 0.$$

Donc $AB \ge 0$.

Remarque : Une présentation alternative possible, *si l'on s'autorise à utiliser* l'Ex. VI.8 à venir, est la suivante : on peut écrire

$$A = C^2 \text{ avec } C \ge 0 \text{ et } CB = BC.$$

En effet, l'exercice mentionné montre que C, la racine carrée positive de A, s'obtient comme limite de polynômes en A qui commutent avec B, comme le fait A. Ensuite, si $x \in H$, nous voyons que

$$\langle ABx, x\rangle = \langle C^2 Bx, x\rangle = \langle CBx, Cx\rangle = \langle BCx, Cx\rangle \ge 0,$$

la dernière inégalité venant du fait que $B \ge 0$.

Exercice VI.7

(1) Notons, pour $n > m$, $A_{nm} = A_n - A_m$. Alors, les hypothèses nous donnent $0 \leq A_{nm} \leq A_n \leq B$. On peut appliquer les résultats des Ex. VI.5 (2) et Ex. VI.6 (1), et l'on a :

$$\begin{aligned}\|A_{nm}x\|^2 &\leq \langle A_{nm}x, x\rangle\|A_{nm}\| = \langle A_{nm}x, x\rangle w(A_{nm}) \leq \langle A_{nm}x, x\rangle w(A_n)\\ &\leq \langle A_{nm}x, x\rangle w(B) = \langle A_{nm}x, x\rangle\|B\|.\end{aligned}$$

Nous obtenons donc l'inégalité demandée :

$$\forall x \in H,\ \|A_nx - A_mx\|^2 \leq |\langle A_nx, x\rangle - \langle A_mx, x\rangle|\|B\|. \qquad (VI.9)$$

Pour $x \in H$, la suite de réels $(\langle A_nx, x\rangle)_{n\geq 1}$ est croissante, majorée. En effet, $m < n \Longrightarrow \langle A_mx, x\rangle \leq \langle A_nx, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle$. Cette suite est donc convergente. Par (VI.9), la suite $(A_nx)_n$ est alors de Cauchy dans H, et par suite converge vers une limite Ax. Puisque la limite est une opération linéaire, A est linéaire. D'autre part,

$$\begin{aligned}\langle Ax, y\rangle &= \langle \lim_{n\to+\infty} A_nx, y\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle A_nx, y\rangle\\ &= \lim_{n\to+\infty}\langle x, A_ny\rangle = \langle x, \lim_{n\to+\infty} A_ny\rangle = \langle x, Ay\rangle.\end{aligned}$$

Donc A est auto-adjoint ≥ 0. De plus, $\langle A_nx, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle$ implique $A \leq B$.

(3) Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $(e_n)_{n\geq 1}$ une base orthonormée. Pour tout $x \in H$, on peut écrire $x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$.
Soit $A_nx = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i$. Nous voyons que

$$\langle A_nx, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2 = \langle Ix, x\rangle.$$

D'où $A_1 \leq A_2 \leq \ldots \leq I$ et $\lim_{n\to\infty} A_nx = x = Ix$. Par contre A_n ne converge pas vers I dans $\mathcal{L}(H)$, sinon I serait compact comme limite d'opérateurs de rang fini, et la dimension de H serait finie. Ou bien on voit directement que

$$\|I - A_n\| \geq \|e_{n+1} - A(e_{n+1})\| = \|e_{n+1}\| = 1.$$

Exercice VI.8

(1) (i) C'est évident.

(ii) Soit $x \in H$ et $n \in \mathbb{N}$. Nous devons montrer la positivité de $\langle S^nx, x\rangle$. Or nous avons

$$n = 2p \Longrightarrow \langle S^nx, x\rangle = \langle S^px, S^px\rangle = \|S^px\|^2 \geq 0$$

$$n = 2p + 1 \Longrightarrow \langle S^nx, x\rangle = \langle SS^px, S^px\rangle \overset{def}{=} \langle Sy_p, y_p\rangle \geq 0.$$

(2) Pour A_n, c'est évident par récurrence, puisque $A_0 = 0$ et puisque A_{n+1} est un polynôme en S et A_n à coefficients *positifs*. C'est vrai pour $A_1 - A_0 = \frac{1}{2}S$. Si c'est vrai pour $A_n - A_{n-1}$, on voit que

$$A_{n+1} - A_n = \frac{1}{2}(A_n^2 - A_{n-1}^2) = \frac{1}{2}(A_n - A_{n-1})(A_n + A_{n-1}),$$

et sous cette forme il est clair que le résultat est encore vrai pour $A_{n+1} - A_n$ car un produit de deux polynômes à coefficients positifs est encore un polynôme à coefficients positifs.

(3) D'après les questions précédentes, $A_n = \sum_{k\geq 0} c_{k,n} S^k$, où la somme est finie et où les $c_{k,n}$ sont positifs. Par (1)(ii), $A_n \geq 0$ et A_n commute indifféremment avec S et T.

(4) Par récurrence, $A_0 = 0 \leq I$. Supposons que $A_n \leq I$. Alors $A_n^2 \leq I$, par exemple parce que $\|A_n\| = w(A_n)$ puisque $A_n \geq 0$, (*cf.* Ex. VI.5). Ensuite :

$$A_{n+1} = \frac{1}{2}(I + A_n^2) \leq \frac{1}{2}(I + I) = I.$$

(5) C'est une conséquence immédiate des questions (1) et (2).

(6) Par l'Ex. VI.7, pour tout $x \in H$, $A_n x \to Ax$ avec $A \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint. D'autre part, notant que $\|A_n^2 x - A^2 x\| \leq 2\|A_n x - Ax\|$, on a :

$$A_{n+1}x = \frac{1}{2}(Sx + A_n^2 x) \text{ implique } 2Ax = Sx + A^2 x, \text{ et donc } 2A = S + A^2.$$

Ensuite,

$$B^2 = (I - A)^2 = I - 2A + A^2 = I - 2A + 2A - S = I - S = T.$$

Le passage à la limite dans $0 \leq I - A_n \leq I$ au sens de la topologie forte des opérateurs donne $0 \leq B \leq I$ (*cf.* D 9.11).

Par (1), A_n commute avec S ou T. Par passage à la limite, B commute avec T, soit : $B \in \{T\}'$.

(7) Supposons qu'il existe $C \in \mathcal{L}(H)$ positif tel que $C^2 = T = B^2$. Alors $CT = CC^2 = C^2C = TC$ et $C \in \{T\}'$. Par (3), $CB = BC$.

Soit $x \in H$ et $y = (B - C)x$. Alors

$$\langle By, y\rangle + \langle Cy, y\rangle = \langle (B + C)y, y\rangle = \langle (B^2 - C^2)x, y\rangle = 0.$$

Or, $\langle By, y\rangle \geq 0$ et $\langle Cy, y\rangle \geq 0$. Donc $\langle By, y\rangle = \langle Cy, y\rangle = 0$.

D'autre part, B étant positif, $(VI.1)$ montre que

$$\forall u \in H, \langle Bu, u\rangle = 0 \Longrightarrow Bu = 0.$$

On a donc ici $By = 0$ et de même $Cy = 0$. D'où $(B - C)y = 0$ et par suite

$$\forall x \in H,\ \|Bx - Cx\|^2 = \langle (B - C)^2 x, x\rangle = \langle B - C)y, x\rangle = 0,$$

ce qui implique $Bx - Cx = 0$ et finalement $B = C$.

Exercice VI.9

(1) Il est clair que $F \subseteq \{x \in H \; ; \; (\|A^n x\|)_n \text{ est bornée}\}$.

Montrons l'autre inclusion. Soit $x \notin F$: alors il existe $a > 1$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $\|A^m x\| > a\|x\|$. Par suite,

$$a^2\|x\|^2 < \|A^m x\|^2 \leq \|(A^m)^* A^m x\| \, \|x\| = \|A^{2m} x\| \, \|x\|.$$

D'où, par récurrence, l'inégalité : pour tout $n \geq 1$, $\|A^{2^n m} x\| > a^{2^n}\|x\|$.

Ceci montre que que la suite $(\|A^n x\|)_n$ n'est pas bornée, et établit l'égalité demandée.

(2) D'après (1), il est facile de voir que F est un sous-espace vectoriel et $S(F) \subseteq F$ pour tout $S \in \{A\}'$.

Exercice VI.10

(1) Nous avons $TT^* = T^*T$. Cela entraîne $\|T^* x\| = \|Tx\| \; \forall x \in H$. En effet,

$$\|T^* x\|^2 = \langle T^* x, T^* x\rangle = \langle TT^* x, x\rangle = \langle T^* T x, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2.$$

Puisque $T - \lambda I$ est normal et que $(T - \lambda I)^* = T^* - \overline{\lambda} I$, on en déduit aussitôt

$$H_\lambda \overset{def}{=} \ker(T - \lambda I) = \ker(T^* - \overline{\lambda} I).$$

Si donc $x \in H_\lambda$ et $y \in H_\lambda^\perp$, nous avons

$$\langle Ty, x\rangle = \langle y, T^* x\rangle = \langle y, \overline{\lambda} x\rangle = \lambda\langle y, x\rangle = 0,$$

autrement dit $Ty \in H_\lambda^\perp$ et $H_\lambda^\perp$ est stable par T. Selon (D 6.10), H_λ est orthogonalement réduisant pour T.

(2) (i) ***H* somme directe d'espaces propres.**

Dans un espace de dimension finie, la propriété essentielle d'un opérateur est d'admettre une valeur propre.

Selon les résultats de (1), utilisons toutes les valeurs propres de T. Soient $\{(\lambda_i, H_i)$ $i = 1, \ldots, p\}$ les couples (valeur propre, espace propre).

D'après (1), ils sont orthogonaux deux à deux. Soit G la somme directe orthogonale $G = \oplus^\perp(H_i, i = 1, \ldots, p)$; d'après (1), $G^\perp$ est invariant par T ainsi que par T^*. On peut alors affirmer que la restriction de T à $G^\perp$ est un opérateur normal, donc admet une valeur propre qui serait aussi valeur propre de T. Ceci est contraire à la donnée des λ_i. On a donc $G = H$.

(ii) **Étude d'un sous-espace invariant « minimum ».**

En adoptant l'écriture $H = \oplus^\perp(H_i, i = 1, \ldots, p)$ (on peut se reporter aux notations de (2) (i)) et en notant $x = (x_1, \ldots, x_p), x_i \in H_i$ un vecteur arbitraire de H, on a

$Tx = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_p x_p)$. Un des λ_i peut être nul, mais ils sont tous distincts. Soit F_x le sous-espace invariant par T engendré par x, espace vectoriel formé par les polynômes en T agissant sur x. C'est le plus petit sous-espace de H invariant par T et contenant x.

Pour chaque $j \in \{1, \ldots, p\}$, on voit que

$$\prod_{i \neq j}(T - \lambda_i)x = (0, 0, \ldots, \prod_{i \neq j}(\lambda_j - \lambda_i)x_j, 0, \ldots, 0)$$

admet une seule composante non nulle dans l'écriture adoptée et $x_j \in F_x$.

Il en résulte que $F_x = \text{Vect}((0, 0, \ldots, x_j, 0, \ldots, 0), j = 1, \ldots, p)$. C'est un sous-espace orthogonalement réduisant pour T.

(iii) **Étude d'un sous-espace invariant arbitraire.**

Tout sous-espace invariant F peut être obtenu comme somme directe orthogonale de sous-espaces F_x. En effet, soit x un premier vecteur utilisé ; si F_x ne remplit pas F, on utilise un y non nul de F orthogonal à F_x. Ce procédé peut s'itérer ; F est somme directe orthogonale d'un ou plusieurs F_x. Il est donc toujours orthogonalement réduisant pour T.

(3) H et S sont choisis : H espace de Hilbert de dimension infinie, muni d'une base orthonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, et S (un shift bilatéral sur H) est donné par :

$$\forall p \in \mathbb{Z}, S e_p = e_{p+1}.$$

On remarque que S est unitaire, car il transforme la base orthonormale (e_p) en la base orthonormale $(e_{p+1}) = (e_p)$. A fortiori, il est normal.

On cherche maintenant un sous-espace invariant par S qui ne soit pas orthogonalement réduisant.

Par ce qui précède, ce sous-espace ne peut pas être de dimension finie. Par contre, on a en évidence des sous-espaces invariants de dimension infinie, à savoir les sous-espaces fermés $H_n, n \in \mathbb{Z}$ engendrés par les e_p tels que $p \geq n$. Soit

$$G_n = (H_n)^\perp = \text{Vect}(e_j\ ;\ j < n).$$

H_n est, de manière évidente, invariant par S. Mais $S(e_{n-1}) = e_n \notin G_n$, donc G_n n'est pas invariant par S.

Exercice VI.11

(1) Soit $T_0 : \ker(T)^\perp \to H$ défini par $T_0 x = Tx$ si $x \in \ker(T)^\perp$.

Puisque $\|T_0 x\| = \|x\|$, T_0 est injectif à image fermée (*cf.* Ex. IV.9). Or, $\text{Im}(T) = \text{Im}(T_0)$, l'image de T est donc fermée.

(2) $(a) \iff (d)$. Soit P la projection orthogonale sur $\ker(T)^\perp$ suivant la décomposition $H = \ker(T)^\perp \oplus \ker(T)$. Si $x \in \ker(T)^\perp$, alors $Px = x$ et on a

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2 = \|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle Px, x\rangle.$$

Si $x \in \ker(T)$, alors $Px = 0$ et on a

$$\langle T^*Tx, x\rangle = 0 = \langle Px, x\rangle.$$

Donc pour tout $x \in H$, $\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Px, x\rangle$, soit encore $\langle (T^*T - P)x, x\rangle = 0$, ce qui entraîne que $T^*T = P$ et que T^*T est une projection.

Pour la réciproque, on remarque d'abord que

$$\ker(A^*A) = \ker(A) \text{ pour tout } A \in \mathcal{L}(H).$$

Supposons que T^*T est une projection orthogonale. Alors $\mathrm{Im}(T^*T)$ est fermée et de plus

$$\mathrm{Im}(T^*T) = \ker(T^*T)^\perp = \ker(T)^\perp.$$

Si donc $x \in \ker(T)^\perp = \mathrm{Im}(T^*T)$, on a $T^*Tx = x$, et $\langle T^*Tx, x\rangle = \langle x, x\rangle$ ou encore $\|Tx\| = \|x\|$, ce qui montre que T est une isométrie partielle.

$(b) \iff (d)$. Si $TT^*T = T$, en multipliant par T^* à gauche, on obtient (d). Réciproquement, supposons que $(T^*T)^2 = T^*T$ et montrons alors que $S = TT^*T - T = 0$. En effet, on vérifie facilement que $S^*S = 0$ et donc $\|S\|^2 = \|S^*S\| = 0$. Ceci implique $S = 0$ et $TT^*T = T$.

$(c) \iff (b)$. Si on remplace T par T^*, dans « $(b) \iff (d)$ », on obtient que $(TT^*)^2 = TT^* \iff T^*TT^* = T^* \iff TT^*T = T$.

Exercice VI.12

Si $T = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons que $T \neq 0$ et donc $S \neq 0$.

Pour l'implication $(a) \Rightarrow (b)$, il suffit de prendre $S = T^*$.

Il reste à montrer que $(b) \Rightarrow (a)$. Remarquons d'abord que $\|T\| = \|S\| = 1$. En effet

$$\|S\| = \|STS\| \leq \|TS\| \leq \|S\|\,\|T\|,$$

d'où $1 \leq \|T\|$ et comme T est une contraction, $\|T\| = 1$. Par le même argument, vu la symétrie des rôles de T et S, on obtient que $\|S\| = 1$.

Maintenant, pour $x \in H$, nous avons $\|Sx\| = \|STSx\| \leq \|TSx\| \leq \|Sx\|$. Donc

$$\forall x \in H,\ \|TSx\| = \|Sx\|.$$

Il en résulte que

$$\forall x \in H,\ \langle (I - T^*T)Sx, Sx\rangle = \|Sx\|^2 - \|TSx\|^2 = 0.$$

Puisque T est une contraction l'opérateur $I - T^*T$ est positif. Soit $(I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$ sa racine carrée positive (*cf.* Ex. IV.8). Alors pour tout $x \in H$,

$$\|(I - T^*T)^{\frac{1}{2}}Sx\|^2 = \langle (I - T^*T)Sx, Sx\rangle = 0.$$

Par conséquent, $(I - T^*T)^{\frac{1}{2}}S = 0$ et donc $(I - T^*T)S = 0$, ou encore $S = T^*TS$. Finalement, on a $T = TST = TT^*TST = TT^*T$, et l'Ex. IV.11 permet de conclure que T est une isométrie partielle.

Exercice VI.13

(1) (a) Pour tout $x \in H$, nous avons

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle |T|^2x, x\rangle = \langle |T|x, |T|x\rangle = \|\,|T|x\|^2.$$

D'où (VI.3), à savoir $\|Tx\| = \|\,|T|x\|\ \forall x \in H$.

(b) D'après (a), $\ker(T) = \ker(|T|)$. On obtient alors
$\ker(T)^\perp = \ker(|T|)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(|T|)}$.

(2) Soit $V_0 : \mathrm{Im}(|T|) \to \mathrm{Im}(T)$ définie par $V_0(|T|x) = Tx, \quad \forall x \in H$.
Par (1) (b), V_0 est bien définie et d'après (VI.1), c'est une isométrie. Elle est donc continue, et on peut l'étendre en une isométrie

$$V : \overline{\mathrm{Im}(|T|)} = \ker(T)^\perp \to \overline{\mathrm{Im}(T)}.$$

Cette isométrie vérifie : pour tout $x \in H, \quad V(|T|x) = Tx$, i.e. $T = V|T|$.

(3) Soit W définie par

$$Wx = Vx \text{ si } x \in \ker(T)^\perp \text{ et } Wx = 0 \text{ si } x \in \ker(T).$$

Alors $W \in \mathcal{L}(H)$ est une une isométrie partielle et $T = W|T|$.

(4) **« Unicité ».**
Notons que $T^*T = PU^*UP$. D'autre part, puisque U est une isométrie partielle, d'après l'Ex. VI.11, U^*U est la projection orthogonale sur
$\ker(U)^\perp = \ker(P)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(P)}$.
Il en résulte que $T^*T = PU^*UP = P^2$. Par l'unicité de la racine carrée positive, $P = |T|$.
Puisque $T = UP = U|T|$, on a aussi

$$U|T|x = Tx = W|T|x,\ \forall x \in H.$$

Ceci implique que $U = W$ sur

$$\overline{\mathrm{Im}(|T|)} = \ker(P)^\perp = \ker(U)^\perp = \ker(|T|)^\perp = \ker(W)^\perp.$$

Finalement, $U = W$.

(5) Dans (2), $V : \ker(T)^\perp \to \overline{\mathrm{Im}(T)}$ est par construction une isométrie surjective.
Dans (3), le choix de $Wx = 0$ si $x \in \ker(T)$ était fait de façon à avoir $\ker(W) = \ker(T)$.
D'autres choix pour prolonger V et définir W sont possibles, avec

$$W : H = \ker(T)^\perp \oplus \ker(T) \to H = \overline{\mathrm{Im}(T)} \oplus \ker(T^*).$$

(i) Si $\dim \ker(T) \le \dim \ker(T^*)$, nous pouvons construire une isométrie V_1 : $\ker(T) \to \ker(T^*)$. Dans ce cas, $W = V \oplus V_1$ est une isométrie et l'on a $T = W|T|$.

(ii) Si $\dim \ker(T^*) \le \dim \ker(T)$, nous pouvons construire une isométrie V_1^* : $\ker(T^*) \to \ker(T)$. Dans ce cas, $W^* = V^* \oplus V_1^*$ est une isométrie, W est une co-isométrie et l'on a $T = W|T|$.

(iii) Si $\dim \ker(T^*) = \dim \ker(T)$, alors par (i) et (ii) on peut prendre W unitaire.

Exercice VI.14

(1) (a) Puisque $\mathrm{Im}(T)$ est fermée, l'opérateur $T_0 = T : H \to \mathrm{Im}(T)$ est inversible et il existe une projection P sur $\mathrm{Im}(T)$. Soit $S = (T_0)^{-1}P$. Alors $S \in \mathcal{L}(H)$ et on vérifie facilement que $ST = I$.

(b) se déduit de (a) par passage à l'adjoint (*cf.* aussi Ex. IV.9 qui traite le cas banachique, avec des conclusions moins fortes en général).

(2) Il résulte de l'Ex. VI.13 (5) que l'on a :

$$\forall T \in \mathcal{L}(H),\ \exists W \in \mathcal{L}(H) \text{ tel que } T = W|T|,$$

avec W une isométrie ou une co-isométrie. D'après (1), W est inversible à droite ou à gauche.

Soit, pour $n \ge 1$, $T_n = W(|T| + \frac{1}{n}I) \overset{def}{=} WR_n$. Puisque R_n est inversible, T_n est inversible à droite ou à gauche, selon que W est inversible à droite ou à gauche. En effet, si W a un inverse à gauche V, on voit que

$$R_n^{-1}VT_n = R_n^{-1}VWR_n = R_n^{-1}R_n = I,$$

et on traite de même le cas où W a un inverse à droite. De plus, $T_n \to T$. D'où la densité de l'ensemble des opérateurs inversibles à droite ou à gauche dans $\mathcal{L}(H)$.

(3) Supposons que $\dim H$ est finie et soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Si T n'est pas inversible, $0 \in \sigma(T)$ est isolé puisque le spectre de T est fini. Soit donc $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de points de l'ensemble résolvant de T convergeant vers 0. Alors $T - \lambda_n I$ est inversible et converge vers T. Ceci montre que l'ensemble des opérateurs inversibles est dense dans $\mathcal{L}(H)$.

Réciproquement, supposons que la dimension de H est infinie et soit $(e_n)_{n\ge1}$ une base orthonormée de H. Soit $S : H \to H$ l'opérateur défini sur les éléments de la base par $Se_n = e_{n+1}$. Alors S^* vérifie $S^*e_1 = 0$ et $S^*e_n = e_{n-1}$ pour $n \ge 2$. S est une isométrie et donc $\|S^*\| = \|S\| = 1$. D'autre part, on a $S^*S = I$ (S est une fois de plus le fameux shift unilatéral !).

Montrons que S n'est pas dans l'adhérence de l'ensemble $\mathcal{G}$ des inversibles, et qu'il est même à distance $d = 1$ de $\mathcal{G}$. Supposons qu'il existe $T \in \mathcal{L}(H)$ inversible tel que l'on ait $\|S - T\| = \alpha < 1$. Alors :

$$\|I - S^*T\| = \|S^*(S - T)\| \le \|S^*\|\,\|S - T\| = \alpha < 1.$$

Par conséquent, S^*T est inversible (*cf.* P 10.1). Comme T l'est déjà, S^* l'est aussi. D'où une contradiction, car S^* n'est pas injectif. Donc $d \geq 1$ et d'autre part

$$d \leq \|S - \varepsilon I\| \leq 1 + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow d \leq 1 \Longrightarrow d = 1.$$

Exercice VI.15

(1) On a

$$\begin{aligned} 1 = \|x\|^2 &= t^2\|y\|^2 + (1-t)^2\|z\|^2 + 2t(1-t)\Re\langle y, z\rangle \\ &\leq t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) = 1, \end{aligned}$$

d'où $\|y\| = \|z\| = \Re\langle y, z\rangle = 1$ puisque $0 < t < 1$. Le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz (P 5.4) implique alors que $y = \alpha z$ avec α scalaire.

Comme $1 = \Re\langle y, z\rangle = \alpha\|z\|^2 = \alpha$, on a $\alpha = 1$ et donc $z = y$, puis finalement $x = (t + 1 - t)y = y = z$.

(2) On vérifie facilement, puisque $U^* = A - i\sqrt{I - A^2}$, que $UU^* = U^*U = I$ et que $A = \frac{1}{2}(U + U^*)$ (Un dessin dans le disque unité aide à visualiser les choses).

(3) **1 $\Longrightarrow$ 2.**

Soit $V \in \mathcal{B}$ une isométrie. Supposons que

$$V = tT + (1-t)R \text{ avec } t \in]0, 1[,\ \|T\| \leq 1 \text{ et } \|R\| \leq 1.$$

Si $x \in S$, on a $Vx \in S$, puisque V est une isométrie et

$$Vx = tTx + (1-t)Rx \text{ avec } t \in]0, 1[,\ Tx \in B, Rx \in B.$$

D'après (1), $Vx \in S$ est extrémal dans B, donc $Vx = Tx = Rx$. Il s'ensuit que $V = T = R$ et donc V est un point extrémal de la boule unité $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}(H)$. Si V est une co-isométrie et $V = tT + (1-t)R$ avec $R, T \in \mathcal{B}$, on a $V^* = tT^* + (1-t)R^*$ avec $R^*, T^* \in \mathcal{B}$ et V^* une isométrie. D'après ce qui précède, on obtient $V^* = R^* = T^*$, puis $V = R = T$ en reprenant les adjoints. Et V est encore un point extrémal de $\mathcal{B}$.

2 $\Longrightarrow$ 1.

Soit $V \in \mathcal{B}$ un point extrémal de $\mathcal{B}$ et $V = WP$ avec $P \geq 0$ et W une isométrie ou une co-isométrie, la décomposition polaire *maximale* de V (voir l'Ex. VI.14 (5)). Puisque $P \geq 0$ et $\|P\| \leq 1$, d'après la question (2), il existe U unitaire tel que $P = \frac{1}{2}(U + U^*)$. Alors

$$V = WP = \frac{1}{2}(WU + WU^*), \text{ avec } \|WU\| = \|WU^*\| = 1.$$

Puisque V est point extrémal de $\mathcal{B}$, on en déduit $V = WU = WU^*$. Il en résulte que V est une isométrie ou une co-isométrie, comme produit d'une isométrie ou une co-isométrie par un opérateur unitaire.

(4) Un des λ_j, par exemple λ_1, est $\geq \frac{1}{n}$. Nous avons donc en utilisant l'Ex. V.6 :

$$\|T - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j U_j\| \geq \|T - \lambda_1 U_1\| - \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \|U_j\| = 1 + \lambda_1 - \left(\sum_{j=2}^{n} \lambda_j \right)$$

$$= (1 + \lambda_1) - (1 - \lambda_1) = 2\lambda_1 \geq \frac{2}{n}.$$

Ceci montre, d'une façon *quantitative*, que l'isométrie T n'est pas dans l'enveloppe convexe des opérateurs unitaires (ce qu'on sait déjà puisqu'elle est extrémale !), même si (théorème de Russo-Dye) $\mathcal{B}$ est l'enveloppe convexe *fermée* (en norme-opérateur) de ces opérateurs unitaires.

Exercice VI.16

(1) (i) Puisque $T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*)$ et $T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*)$, on voit facilement que T_1 et T_2 sont des contractions.

(ii) Il est commode d'utiliser la relation d'ordre entre opérateurs auto-adjoints de l'Ex. VI.7. On a clairement, puisque T_2 est une contraction auto-adjointe : $\langle T_2^2 x, x\rangle = \|T_2 x\|^2 \leq \|x\|^2$, soit (fait utilisé implicitement dans l'Ex. VI.15) :

$$0 \leq T_2^2 \leq I, \text{ d'où } 0 \leq I - T_2^2 \leq I \text{ et } \sqrt{I - T_2^2} \leq I.$$

L'opérateur $\sqrt{I - T_2^2}$ est ainsi une contraction. Maintenant, A est aussi une contraction, comme demi-somme de deux contractions.

(2) Clairement, $A = A^*$ et par (1) (ii), c'est une contraction. Et on a déjà vu dans l'Ex. VI.15 (2) que $U = A \pm i\sqrt{I - A^2}$ est unitaire.

Si maintenant $T = U + U^* + W$ (on n'a pas le choix pour W !), alors

$$W = T - (U + U^*) = T_1 + iT_2 - 2A = T_1 + iT_2 - \left(T_1 - \sqrt{I - T_2^2}\right) = i\left(T_2 - i\sqrt{I - T_2^2}\right)$$

et là aussi on a vu dans l'Ex. VI.15 que ce W est unitaire, ce qui achève l'exercice.

Exercice VI.17

(1) Il suffit de remarquer que $x \in \ker(T)$ si et seulement si $S^{-1}x \in \ker(TS)$, et que $S^{-1} : \ker(T) \to \ker(TS)$ est une bijection. Par conséquent, on a bien $\dim \ker(T) = \dim \ker(TS)$.

(2) **1 $\Longrightarrow$ 2.** Supposons que $T = \frac{1}{2}(V + W)$, avec V, W unitaires. Il est clair que T est une contraction et on a

$$T = \frac{1}{2}(V + W) = \frac{1}{2}V(V^* + W^*)W = VT^*W.$$

D'où $T = VT^*W$ et $\ker(T) = \ker(T^*W)$. Par (1), $\dim\ker(T) = \dim\ker(T^*)$. (*Rappelons que la dimension d'un espace de Hilbert est la cardinalité commune de ses bases orthonormées.*)

2 $\Longrightarrow$ 1. Puisque $\dim\ker(T) = \dim\ker(T^*)$, la décomposition polaire maximale est donnée par $T = UP$, avec U unitaire et $P = \sqrt{T^*T}$ positif (voir l'Ex. VI. 13 (5)). Le fait que T est une contraction implique que P en est aussi une. Donc $I - P^2$ est positif.

Posons $W_1 = P + i\sqrt{I - P^2}$ et $W_2 = P - i\sqrt{I - P^2}$. Alors, W_1 et W_2 sont unitaires et on a $P = \frac{1}{2}(W_1 + W_2)$. On obtient finalement que UW_1 et UW_2 sont unitaires et que

$$T = \frac{1}{2}(UW_1 + UW_2).$$

(3) **1 $\Longrightarrow$ 2.** Facile à vérifier.

2 $\Longrightarrow$ 1. Si T est normal, on a $\|Tx\| = \|T^*x\|$ pour tout $x \in H$. D'où $\ker(T) = \ker(T^*)$, et $\dim\ker(T) = \dim\ker(T^*)$. La décomposition polaire maximale est alors donnée par $T = UP$, avec U unitaire et $P = \sqrt{T^*T}$ positif (*cf.* Ex. VI.13 (5)). En écrivant que $TT^* = T^*T$, on obtient $UP^2U^* = P^2$ et donc $UP^2 = P^2U$. Puisque $P = \sqrt{P^2}$, la racine carrée positive de P^2, est une limite de polynômes en P^2 (*cf.* Ex. VI.8), U commute avec P. Puisque T est une contraction et que $\dim\ker(T) = \dim\ker(T^*)$, par (2) on a

$$T = \frac{1}{2}(UW_1 + UW_2) \text{ avec } W_1 = P + i\sqrt{I - P^2} \text{ et } W_2 = P - i\sqrt{I - P^2}.$$

Comme on vient de voir que U commute avec P, U commute avec W_1 et W_2 et 1. est démontré.

VII Opérateurs compacts

1 Énoncés

Exercice VII.1

E est l'espace de Banach $C([0,1])$ des fonctions continues à valeurs complexes sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme $\|f\| = \sup\{|f(x)|\ ;x \in [0,1]\}$. On note E^* son dual, et $A : E \to E$ l'application définie par

$$(Af)(x) = \int_0^1 (2x + 6y)f(y)dy$$

On note $J_0 : \{E \to \mathbb{C}, f \mapsto \int_0^1 f(y)dy\}$ et $J_1 : \{E \to \mathbb{C}, f \mapsto \int_0^1 yf(y)dy\}$.

(1) Montrer que $J_0, J_1 \in E^*$.

(2) Montrer que $A \in \mathcal{L}(E)$. Trouver une écriture canonique de A à l'aide de J_0, J_1, e_0, e_1, où $e_p(x) = x^p$, $e_p \in E$ et $p \in \mathbb{N}$ (*cf.* D 7.3).

(3) Quels sont les espaces $\ker(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$? Que vaut la norme de A ? Montrer que $E = \ker(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$.

(4) En utilisant une décomposition de E déduite de (3), expliciter les solutions de $Af - f = g$, où $g(x) = 2x^2$.

Exercice VII.2

H est l'espace de Hilbert complexe $L^2([-1,1], dx)$.

Pour $r \in \mathbb{R}$ fixé, on note

$$A_r : \{H \to H, f \mapsto g, g(x) = \int_{-1}^{+1} \left(x^2 + \frac{3}{2}xu + ru^2\right) f(u)du\}$$

(1) Montrer que $A_r \in \mathcal{K}_0(H)$ (*cf.* D 7.2).

(2) Expliciter l'adjoint de A_r. Pour quelles valeurs de r a-t-on A_r auto-adjoint ?

(3) Donner une écriture canonique de A_1 et A_0 comme dans l'Ex. VII.1.

(4) En se ramenant à une étude dans un espace de dimension 3, déterminer tous les polynômes P tels que $P(A_0) = 0$.

Exercice VII.3

Dans (1), on se propose d'établir directement la propritété (P 7.14) dans le cas proposé ici.

E est un espace de Banach complexe.

(1) Soit $P \in \mathcal{K}_0(E)$ (*cf.* D 7.2) de rang n.

(i) Montrer que $\ker(I - P)$ est de dimension finie.

(ii) Montrer que $\ker P$ admet un supplémentaire topologique de dimension n.

(iii) Montrer, en utilisant par exemple une décomposition de E en somme directe topologique à l'aide de $\ker P$, que $\mathrm{Im}(I - P)$ est fermé et de codimension finie.

(2) Soit $A \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $P, Q \in \mathcal{K}_0(E)$ et $B, C \in \mathcal{L}(E)$ tels que $AB = I - P$ et $CA = I - Q$. Montrer que $\ker A$ est de dimension finie et que $\mathrm{Im} A$ est fermé et de codimension finie.

(3) Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant les conclusions de (2). Montrer, en utilisant des décompositions adaptées de E, qu'il existe deux opérateurs idempotents $P_1, Q_1 \in \mathcal{K}_0(E)$, et deux éléments $B_1, C_1 \in \mathcal{L}(E)$ tels que $AB_1 = I - P_1$ et $C_1 A = I - Q_1$.

(4) On suppose que E est un espace de Banach de dimension 3 muni d'une base (e_1, e_2, e_3). On donne un élément $A \in \mathcal{L}(E)$ par sa matrice relativement à cette base

$$(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer des éléments P_1, Q_1, B_1, C_1 associés selon (3).

Exercice VII.4 : Constante de Kottman

H est un espace de Hilbert complexe de dimension infinie, et B est sa boule unité fermée.

(1) Montrer qu'il existe une suite infinie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de B telle que

$$p \neq q \Longrightarrow \|x_p - x_q\| \geq \sqrt{2}.$$

On se propose de montrer qu'on ne peut pas faire mieux (on dit que la constante de Kottman de H vaut $\sqrt{2}$).

(2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de B et $\alpha > 0$ tels que $p \neq q \Longrightarrow \|x_p - x_q\| \geq \alpha$. On rappelle que (x_n) contient une sous-suite $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}^*} \stackrel{def}{=} (y_j)$ qui converge faiblement vers $y \in H$ (*cf.* D 9.8).

(i) Montrer que $j < k \Longrightarrow \alpha^2 \leq 2 - 2\Re\langle y_j, y_k\rangle$.

(ii) Conclure que l'on a $\alpha \leq \sqrt{2}$.

Exercice VII.5

E est un espace de Hilbert complexe, I est l'identité de $\mathcal{L}(E), \mathcal{K}_0(E)$ désigne l'ensemble des opérateurs bornés de rang fini. Pour $A \in \mathcal{L}(E)$, on note la distance de A aux opérateurs de rang fini par $d(A, \mathcal{K}_0(E))$.

(1) Montrer que $d(I, \mathcal{K}_0(E))$ est égale à 0 ou 1.

(2) Si E est de dimension finie et si A est un élément inversible de $\mathcal{L}(E)$, montrer que

$$\|A^{-1}\|^{-1} \leq d(A, \mathcal{K}_0(E)) \leq \|A\|. \tag{$*$}$$

En utilisant par exemple $A = I + e \otimes e$ où e est un vecteur normé de E, montrer que l'inégalité de gauche ou celle de droite peut être une égalité même si les membres extrêmes ne sont pas égaux.

(3) E est un espace de Hilbert séparable muni d'une base orthonormée $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$. S est l'opérateur « défini » par $Se_n = e_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; que vaut la distance $d(S, \mathcal{K}_0(E))$?

(4) E est comme en (3). T est l'opérateur « défini » par

$$Te_n = \frac{1}{n}e_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer, en approchant T, que $d(T, \mathcal{K}_0(E)) = 0$.

Exercice VII.6

H est un espace de Hilbert complexe séparable, de dimension infinie, muni d'une base orthonormale $\{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bornée de nombres complexes.

(1) Montrer qu'il existe un unique opérateur linéaire A continu sur H tel que

$$Ae_n = a_ne_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer qu'alors $d(A, \mathcal{K}(H)) = \overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n|$. À quelle condition doivent satisfaire les a_n pour que A soit un opérateur compact ?

(2) À quelle condition supplémentaire doivent satisfaire les a_n pour qu'il existe B opérateur linéaire continu (resp. compact) sur H tel que

$$Be_n = a_ne_1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*?$$

(3) À quelle condition supplémentaire doivent satisfaire les a_n pour qu'il existe C opérateur linéaire continu (resp. compact) sur H tel que

$$Ce_n = a_n e_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* ?$$

Exercice VII.7

Soit E un espace de Banach et $x_0 \in E$, $f \in E^*$ avec $f(x_0) = \langle x_0, f \rangle \neq 0$.

Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ défini par $Tx = f(x)x_0$ pour tout $x \in E$.

(1) Montrer que T est une projection si et seulement si $f(x_0) = 1$ (P 2.8).

(2) Déterminer $\sigma(T)$ et expliciter l'opérateur résolvant de T (D 10.4, D 10.5).

Exercice VII.8 : Norme d'un opérateur intégral

Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$, espace de Banach des fonctions à valeurs complexes, continues sur $[0,1]$, muni de la norme uniforme, $\|f\| = \sup\{|f(x)| \,;\, x \in [0,1]\}$. Soit $K : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $T : E \to E$, défini par

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t)dt.$$

(1) Montrer que $T \in \mathcal{K}(E)$ et montrer que sa norme vaut exactement

$$\|T\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^1 |K(x,t)|dt.$$

(2) Déterminer $\|T\|$ et $\sigma(T)$ lorsque $K(x,t) = e^{x+t}$.

Exercice VII.9

H est un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie, muni d'une base orthonormée $(e_n, n \in \mathbb{N}^*)$.

S est l'opérateur linéaire « défini » par $Se_n = e_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ utilisé dans l'Ex. III.5.

Montrer que S n'est pas un opérateur compact (!) et surtout ne commute avec aucun opérateur compact non nul (on pourra pour cela étudier la suite $(Be_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour B compact commutant avec S).

Exercice VII.10 : Matrice d'un opérateur compact sur ℓ^1

E est l'espace de Banach ℓ^1 (D 1.15) muni de sa « base » canonique $(e_n, n \in \mathbb{N}^*)$.

A est une application linéaire « définie » sur ℓ^1 (ou une partie de ℓ^1) par la donnée des Ae_n : $Ae_n \in \ell^1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Comment doivent être les Ae_n pour que A soit un élément de $\mathcal{L}(E)$?

(2) Établir l'équivalence

$[A \in \mathcal{K}(E)] \Leftrightarrow [\{Ae_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est relativement compact] (on cherchera à approcher A par des opérateurs bornés de rang fini en pensant au théorème de Dini).

(3) F est l'espace c_0 des suites complexes convergentes vers 0 muni de la norme uniforme (voir l'Ex. I.1). Quel est le dual de F ? Comment peut-on caractériser les éléments de $\mathcal{K}(F)$? (on pourra interpréter le résultat par le comportement de la « matrice » de $A \in \mathcal{K}(F)$).

Exercice VII.11 : Opérateurs de composition

E est l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs complexes, muni de la norme uniforme. Soit $h : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue.

A est défini sur E par $Af(x) = f[h(x)]$ pour toute $f \in E$.

(1) Vérifier que $A \in \mathcal{L}(E)$ et déterminer sa norme.

(2) Comment doit être la fonction h pour que A soit un opérateur compact (distinguer le cas d'une fonction constante et d'une fonction non constante, dans ce second cas on cherchera à construire une suite normée dont l'image n'admet pas de sous-suite convergente) ?

Exercice VII.12

E est l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs complexes, muni de la norme uniforme.

Montrer que $\mathcal{K}(E) = \overline{\mathcal{K}_0(E)}$ (on utilisera le théorème d'Ascoli-Arzela puis une partition de l'unité pour approcher un opérateur compact par un opérateur borné de rang fini).

Exercice VII.13 : Injections compactes

Les deux questions sont indépendantes. Pour les deux on pourra utiliser le théorème d'Ascoli-Arzela.

$F = C([0, 1])$, espace des fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs complexes, muni de la norme uniforme $\|f\|_\infty$.

$E = C^1([0, 1])$, espace des fonctions à valeurs complexes, continûment dérivables sur $[0, 1]$, muni de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ (*cf.* Ex. I.2).

Lip_α est défini dans l'Ex. I.6.

(1) Montrer que l'injection canonique $T : \{E \to F, f \mapsto f\}$ est un opérateur compact.

(2) Montrer que l'injection canonique $T : \{\mathrm{Lip}_\alpha \to F, f \mapsto f\}$ est un opérateur compact.

Exercice VII.14

(1) E est un espace de Hilbert de dimension infinie, et I l'opérateur identité sur E. Rappeler pourquoi I n'est pas un opérateur compact (utiliser par exemple un système orthonormé).

(2) E et F sont des espaces de Hilbert de dimension infinie, et $A \in \mathcal{K}(E, F)$.

Utiliser la restriction B de A à $(\ker(A))^\perp$ puis la restriction de B à la préimage par A d'un sous-espace fermé de F pour montrer que $\mathrm{Im}(A)$ *ne contient aucun sous-espace fermé de dimension infinie.*

Exercice VII.15

H est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, et $A \in \mathcal{L}(H)$.

(1) Montrer que $\sigma(A^2) = \{\lambda^2 \,;\, \lambda \in \sigma(A)\}$.

(2) On suppose que A^2 est compact et auto-adjoint.

(i) Montrer que A admet au moins une valeur propre.

(ii) Montrer que si A admet deux valeurs propres λ et μ telles que $\lambda^2 \neq \mu^2$, alors les espaces propres correspondants sont orthogonaux.

(iii) A est-il nécessairement compact ?

(3) On suppose que A est auto-adjoint et A^2 est compact.

(i) Si $A^2 = 0$, que peut-on dire de A ?

(ii) Si $A^2 = I$ et H est de dimension finie (hypothèse provisoire), que peut-on dire de A ?

(iii) Dans le cas général proposé au début de la question, montrer que A est compact.

Exercice VII.16

E, F sont deux espaces de Banach.

(1) $A \in \mathcal{K}(E, F)$.

Montrer que l'application quotient $B : \{E/\ker A \to F, [x] \mapsto Ax\}$ est un opérateur compact (P 7.8).

(2) $A \in \mathcal{L}(E, F)$.

On suppose que l'application quotient associée $\{E/\ker A \to F, [x] \mapsto Ax\}$ est un opérateur compact. A est-il compact ?

(3) $B \in \mathcal{L}(E), C \in \mathcal{L}(F)$, soit $A = B \oplus C$ agissant dans $E \oplus F$ (D 1.12). Etablir l'équivalence [B et C compacts] $\Leftrightarrow$ [A compact].

(4) $A \in \mathcal{K}(E), G$ est un sous-espace (fermé) invariant par A. On note D la restriction de A à $G, \{G \to G, y \mapsto Ay\}$. Montrer que D est un opérateur compact.

Exercice VII.17

E et F sont deux espaces de Banach de dimension infinie, et $A \in \mathcal{K}(E, F)$.

(1) Montrer l'existence d'un système normé $(e_n, n \in \mathbb{N}^*)$ dans E tel que :

$$\text{pour tous entiers } p, q,\ p \neq q \Longrightarrow \|e_p - e_q\| \geq 1 \qquad (VII.1)$$

(agir par récurrence en associant à un sous-espace de dimension finie un vecteur normé « orthogonal » en un sens à préciser).

(2) Montrer que l'opérateur identité dans E n'est pas un opérateur compact.

(3) Adapter au cas d'un espace de Banach la démarche de l'Ex. VII.14 ou l'Ex. VII.16 pour montrer que $\operatorname{Im}(A)$ (*cf.* D 2.3) ne contient aucun sous-espace fermé de dimension infinie (***cf.* aussi Ex. IV.10 (3)**).

Exercice VII.18

Soit E un espace de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$, et $K \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur compact.

Soit $\lambda_0 \in \sigma(T) \setminus \sigma(T + K)$, notons $S = (T + K - \lambda_0 I)^{-1}$.

(1) Montrer que

$$\ker(T - \lambda_0 I) = \ker(I - S K). \qquad (VII.2)$$

(2) En déduire que λ_0 est une valeur propre de T.

(3) Montrer que

$$\sigma(T) = \Big[\bigcap(\sigma(T + K)\,;\, K \in \mathcal{K}(E))\Big] \bigcup \sigma_p(T) \qquad (VII.3)$$

où $\sigma_p(T)$ est l'ensemble des valeurs propres de T, spectre ponctuel de T.

Exercice VII.19 : Opérateurs Hilbert-Schmidt

H est un espace de Hilbert complexe séparable, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (resp.$(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$) une suite infinie orthonormale (resp. une base orthonormale) de H et $T \in \mathcal{L}(H)$.

(1) Montrer que $T \in \mathcal{K}(H) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} T g_n = 0$ (*cf.* P 9.11).

(2) Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \|T e_n\|^2 < \infty \Longrightarrow T \in \mathcal{K}(H)$ (on dit alors que T est Hilbert-Schmidt).

(3) On garde l'hypothèse de (2). Soit $(f_n, n \in \mathbb{N}^*)$ une autre base orthonormée de H. En calculant de deux façons différentes la somme de la série double de nombres positifs de terme général $u_{m,n} = |\langle T e_n, f_m\rangle|^2$, montrer l'identité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T f_n\|^2.$$

La racine carrée de cette quantité s'appelle la « norme Hilbert-Schmidt » de T et se note $\|T\|_2$.

Exercice VII.20

Soit H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$.

(1) Montrer que si T est normal (D 6.3), alors

$$\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\| \, \|x\| \text{ pour tout } x \in H.$$

(2) Montrer que si T est normal, alors T^2 compact (P 7.8) implique T compact. Idem si d est entier ≥ 2 et T^d est compact .

Exercice VII.21

Soit H un espace de Hilbert complexe.

(1) Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, normal et compact, tel que $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. Montrer que T est auto-adjoint.

(2) Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, normal et compact, tel que $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}^+$. Montrer que T est positif.

Exercice VII.22

E est un espace de Banach.

(1) Soient $A, B \in \mathcal{L}(E)$ tels que $AB = I$. Montrer que l'on n'a pas toujours $BA = I$.

(2) Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ tel que $I - A$ est un opérateur compact. Montrer que

$$[\exists B \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } AB = I] \Leftrightarrow [\exists C \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } CA = I]$$

Exercice VII.23 : Version lipschtizienne du Théorème de Cayley

On considère l'espace $E = C([0,1])$, avec sa norme usuelle

$$\|f\|_\infty = \sup(|f(x)| \, ; x \in [0,1]),$$

qui en fait un espace de Banach. Soit aussi $\alpha \in]0,1]$, et M un sous-espace fermé de E, constitué de fonctions de Lip_α (*cf.* Ex. I.6). Le but est de montrer que M est de dimension finie.

(1) On note $I = [0,1]$ et $J = \{(x,y) \in I^2 \, ; x \neq y\}$, et pour $(x,y) \in J$, on considère la forme linéaire continue $L_{x,y}$ sur E définie par

$$L_{x,y}(f) = \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|^\alpha}.$$

Montrer que
$$f \in M \Longrightarrow \sup_{(x,y)\in J} |L_{x,y}(f)| < \infty.$$

(2) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\text{Pour toute } f \in M, \text{ pour tous } x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}\|f\|_{\infty}.$$

(3) (i) Montrer que la boule unité fermée B de M est compacte.

(ii) En déduire que la dimension de M est finie.

(4) On se propose de donner une preuve directe du résultat, à partir de la question (2).

(i) Soit N un entier assez grand pour que $\delta \overset{def}{=} \frac{C}{(2N)^{\alpha}} < 1$. Prouver l'inégalité :

$$\text{Pour toute } f \in M, \|f\|_{\infty} \leq \frac{1}{1-\delta}\left(\sup_{0\leq k\leq N, k\in\mathbb{N}} \left|f\left(\frac{k}{N}\right)\right|\right).$$

(ii) Montrer que l'application $f \mapsto (f(0), f(\frac{1}{N}) \ldots, f(\frac{k}{N}), \ldots, f(1))$ est une injection linéaire de M dans $\mathbb{C}^{N+1}$, et conclure.

Exercice VII.24 : Non-séparabilité de l'algèbre de Calkin

Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, $(e_n)_{n\geq 1}$ une base orthonormale de H, $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs bornés sur H, et $\mathcal{K}(H)$ la sous-algèbre des opérateurs compacts, qui est comme on le sait un idéal bilatère fermé de $\mathcal{L}(H)$, et a fortiori une sous-algèbre.

L'algèbre de Calkin $C(H)$ est le quotient (selon D 10.2) de la première algèbre par la seconde, munie de la norme-quotient. On se propose de montrer que $\mathcal{K}(H)$ est séparable (i.e. contient une *suite dense*, *cf.* Ex. I.6), mais pas les deux autres.

(1) En utilisant la séparabilité de H, montrer que l'espace $\mathcal{K}_0(H)$ des opérateurs de rang fini est séparable.

(2) En utilisant la densité de $\mathcal{K}_0(H)$ dans $\mathcal{K}(H)$ (résultat de cours), montrer que $\mathcal{K}(H)$ est également séparable.

(3) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite quelconque de $\mathcal{L}(H)$.

(i) Montrer qu'on peut construire par récurrence une suite *orthonormée* $(v_n)_{n\geq 1}$ de vecteurs de H telle que :

$$\text{Pour tout } n \geq 1, \langle v_n, A_n e_n\rangle = \langle v_n, v_j\rangle = 0 \text{ pour } 1 \leq j \leq n-1. \qquad (VII.4)$$

(ii) Montrer qu'il existe $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $Te_n = v_n$ pour tout entier $n \geq 1$, et que cet opérateur vérifie $\|T - A_n\| \geq 1$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi, $\mathcal{L}(H)$ n'est pas séparable.

(4) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite quelconque de $\mathcal{L}(H)$, et $(K_m)_{m\geq 1}$ une suite dense de $\mathcal{K}(H)$.

(i) Montrer qu'il existe $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que l'on ait

$$\|T - A_n - K_m\| \geq 1 \text{ pour tous } m, n \geq 1.$$

(ii) Montrer que ce T vérifie :

$$\|T - A_n - K\| \geq 1 \text{ pour tout } n \geq 1 \text{ et pour tout } K \in \mathcal{K}(H).$$

Si π est la surjection canonique de $\mathcal{L}(H)$ sur le quotient $C(H) = \mathcal{L}(H)/\mathcal{K}(H)$, cela revient exactement à dire que $\|\pi(T) - \pi(A_n)\| \geq 1$ pour tout n, et donne la non-séparabilité de $C(H)$.

Exercice VII.25 : Opérateurs à noyau

Soit $H = L^2([0,1])$ et $T \in \mathcal{L}(H)$ défini, pour $f \in H$ et $x \in [0,1]$, par

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t)dt$$

avec

$$K(x,t) = \begin{cases} t(x+1) & \text{si } 0 \leq x \leq t \leq 1 \\ x(t+1) & \text{si } 0 \leq t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(1) Montrer que T est un opérateur compact auto-adjoint et que les vecteurs propres associés à des valeurs propres non nulles sont des fonctions continues.

(2) Déterminer tous les couples (valeur propre non nulle, espace propre) de T. En déduire qu'un opérateur intégral à noyau $K \geq 0$ n'est pas nécessairement un opérateur positif (*cf.* D 8.2).

(3) Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$.

Exercice VII.26 : Bases perturbées

H est un espace de Hilbert séparable et $(e_n, n \in \mathbb{N}^*)$ est une base orthonormale de H. On cherche à reconnaître quand un autre système orthonormal $(f_n, n \in \mathbb{N}^*)$ est une base orthonormale (bon) de H, et on se propose de montrer le résultat de perturbation suivant

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - f_n\|^2 < \infty \Longrightarrow (f_n, n \in \mathbb{N}^*) \text{ est une bon de } H. \qquad (*)$$

Pour $(f_n, n \in \mathbb{N}^*)$, système orthonormal donné vérifiant l'hypothèse de $(*)$, on note F l'espace vectoriel fermé engendré par les f_n, et G son orthogonal.

(1) Montrer qu'il existe $U \in \mathcal{L}(H)$ tel que

$$Ue_n = f_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer alors que (D 6.1)

$$U^* f_n = e_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } U^* x = 0 \text{ si } x \in G.$$

(2) Avec les notations de l'Ex. VII.19, montrer que $T = U - I$ est un opérateur Hilbert-Schmidt, de norme Hilbert-Schmidt $\|T\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - f_n\|^2$.

(3) En utilisant les résultats de l'Ex. VII.19, montrer qu'en réalité $G = \{0\}$ et que $(f_n, n \in \mathbb{N}^*)$ est une base orthonormale de H.

Exercice VII.27 : Théorème de Feintuch

Soit H un Hilbert complexe, séparable, de dimension infinie muni d'une base orthonormée $(e_n)_{n \geq 0}$ et de l'opérateur shift unilatéral associé :

$$S(e_n) = e_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

dont l'adjoint S^* vérifie :

$$S^*(e_n) = e_{n-1} \text{ si } n \geq 1 \text{ et } S^*(e_0) = 0.$$

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est appelé opérateur de Toeplitz (en abrégé est Toeplitz) si sa matrice sur la base (e_n), $t_{i,j} = \langle T e_j, e_i \rangle$, vérifie la condition

$$t_{i+k,j+k} = t_{i,j} \quad \forall i, j, k \in \mathbb{N}.$$

(1) Montrer l'équivalence : (a) T est Toeplitz ; (b) $S^* T S = T$.

(2) Soit $K \in \mathcal{K}(H)$. Montrer que

$$\lim_{n \to \infty} \|S^{*n} K\| = \lim_{n \to \infty} \|S^{*n} K S^n\| = 0.$$

(3) On dira que $T \in \mathcal{L}(H)$ est *asymptotiquement Toeplitz* s'il existe un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que

$$\lim_{n \to \infty} \|S^{*n} T S^n - A\| = 0.$$

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. T est asymptotiquement Toeplitz ;
2. $T = A + K$ avec A Toeplitz et K compact.

2 SOLUTIONS

Exercice VII.1

(1) (i) $\boldsymbol{J_0}$. $|\int_0^1 f(y)dy| \leq \|f\|$. Il y a égalité si f est la fonction constante $e_0 : x \mapsto 1$. Donc $J_0 \in E^*$ et $\|J_0\| = 1$, la norme est atteinte pour e_0.

(ii) $\boldsymbol{J_1}$. $|\int_0^1 yf(y)dy\}| \leq \|f\| \int_0^1 ydy = \frac{1}{2}\|f\|$. Il y a égalité pour la fonction e_0 utilisée précédemment. Donc $J_1 \in E^*$ et $\|J_1\| = \frac{1}{2}$, la norme est atteinte pour e_0.

(2) On peut écrire, avec les notations de l'énoncé,

$$Af = J_1(f)(6e_0) + J_0(f)(2e_1). \tag{VII.5}$$

Ceci permet une écriture canonique de A selon (P 7.1),

$$A = (6e_0) \otimes J_1 + (2e_1) \otimes J_0.$$

L'écriture de Af permet la majoration

$$\|Af\| \leq (3\|e_0\| + 2\|e_1\|)\|f\| = 5\|f\|.$$

Pour $f = e_0$, vecteur normé de E, on a

$$(Ae_0)(x) = \int_0^1 (2x + 6y)dy = 2x + 3 = 3e_0(x) + 2e_1(x)\,;(Ae_0)(1) = 5.$$

On a donc $\|A\| = 5$; la norme est atteinte pour e_0.

(3) (i) **ker** $\boldsymbol{A}$.

D'après $(VII.5)$, $\ker A = \{f \in E\,; J_0(f) = J_1(f) = 0\}$. J_0 et J_1 sont deux éléments indépendants de E^*. $\ker A$ est donc de codimension 2. Il n'a pas d'écriture plus précise que celle donnée ici.

(ii) **Im**$\boldsymbol{A}$.

D'après $(VII.5)$, $\mathrm{Im}A \subseteq \mathrm{Vect}(e_0, e_1)$.

On a noté en (2) que $Ae_0 = 3e_0 + 2e_1$. De plus

$(Ae_1)(x) = \int_0^1 (2x + 6y)ydy = x + 2$, soit $Ae_1 = 2e_0 + e_1$.

(Ae_0, Ae_1) est donc libre dans $\mathrm{Vect}(e_0, e_1)$, ce qui établit que $\mathrm{Im}A = \mathrm{Vect}(e_0, e_1)$.

A est un opérateur borné de rang 2 selon (D 6.1).

(iii) **Relation entre ker** $\boldsymbol{A}$ **et Im**$\boldsymbol{A}$.

Il résulte de (ii) que $G = \mathrm{Vect}(e_0, e_1)$ est invariant par A et que la restriction B de A à G est bijective. Alors aucun vecteur non nul de $\ker A$ n'est dans G.

$\mathrm{Vect}(e_0, e_1)$ est donc un supplémentaire topologique de $\ker A$ dans E (supplémentaire algébrique de dimension finie, donc supplémentaire topologique d'après (P 1.1) et (P 1.2) par exemple).

(4) On exposera d'abord le raisonnement pour g arbitraire, puis dans le cas particulier proposé.

(i) ***g* arbitraire.**

D'après (3) (iii) on a $E = \ker A \oplus \mathrm{Im}A$.

On note alors, pour $f \in E$ arbitraire, $f = f_1 + f_2$, où $f_1 \in \ker A$, $f_2 \in \mathrm{Im}A$.

$Af - f = (-f_1) + (Af_2 - f_2)$ où le second membre est décomposé aussi sur $\ker A \oplus \mathrm{Im}A$.

On peut ainsi résoudre $Af - 2f = g$ en décomposant de même g sur $\ker A$ et $\mathrm{Im}A$ selon $g = g_1 + g_2$. Ceci conduit à

$$f_1 = -g_1, \quad Af_2 - f_2 = g_2$$

La seconde équation est une équation linéaire dans G. Avec la notation B introduite dans (3) (iii), elle s'écrit $Bf_2 - f_2 = g_2$.

$Be_0 = 3e_0 + 2e_1, Be_1 = 2e_0 + e_1$, donc $(B - I)e_0 = 2e_0 + 2e_1, (B - I)e_1 = 2e_0$. Il en résulte que $B - I$ est bijective ; alors pour chaque g_2, f_2 existe et est unique.

(ii) ***g* choisie.**

Il reste à déterminer g_1 et g_2, puis f_1 et f_2.

$g_2 = ae_0 + be_1$, où a, b sont choisis tels que

$$J_0(g) = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3} = J_0(g_2) = a + \frac{b}{2}$$

$$J_1(g) = \int_0^1 2y^3 dy = \frac{1}{2} = J_1(g_2) = \frac{a}{2} + \frac{b}{3}$$

Ceci fournit $g_2 = -\frac{1}{3}e_0 + 2e_1$.

f_2 est alors cherchée sous la forme $f_2 = ce_0 + de_1$ par l'équation

$Bf_2 - f_2 = -\frac{1}{3}e_0 + 2e_1$, soit encore

$c(B - I)e_0 + d(B - I)e_1 = c(2e_0 + 2e_1) + d(2e_0) = (2c + 2d)e_0 + (2c)e_1 = -\frac{1}{3}e_0 + 2e_1$

donc $c = 1, d = -\frac{7}{6}$ et, comme $f_1 = -g_1 = g_2 - g$,

$$f = e_0 - \frac{7}{6}e_1 + \left[2e_1 - \frac{1}{3}e_0 - 2e_2\right] = \frac{2}{3}e_0 + \frac{5}{6}e_1 - 2e_2.$$

Exercice VII.2

On a intérêt à détailler l'intégrale pour expliciter la forme de g.
$\int_{-1}^{+1}(x^2+\frac{3}{2}xu+ru^2)f(u)du = x^2\int_{-1}^{+1} f(u)du + \frac{3}{2}x\int_{-1}^{+1} uf(u)du + r\int_{-1}^{+1} u^2 f(u)du.$
Ceci fournit l'expression

$$A_r f = \left(r\int_{-1}^{+1} u^2 f(u)du\right)e_0 + \frac{3}{2}\left(\int_{-1}^{+1} uf(u)du\right)e_1 + \left(\int_{-1}^{+1} f(u)du\right)e_2. \qquad (VII.6)$$

(1) $A_r f$ est un élément de $\mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$.

A_r est trivialement linéaire. L'inégalité de Schwarz (P 5.4) appliquée à chaque intégrale montre que

$$\|A_r f\| \leq \left(|r|\left(\frac{2}{5}\right)^{1/2}\|e_0\| + \frac{3}{2}\|e_1\| + 2\|e_2\|\right)\|f\|. \qquad (VII.7)$$

L'application A_r est donc continue et le facteur de $\|f\|$ dans $(VII.7)$ fournit un majorant de la norme de A_r. On a ainsi contrôlé que $A_r \in \mathcal{K}_0(H)$.

(2) L'adjoint A_r^* de A_r est déterminé par la formule de définition (D 6.1)

$$\text{Pour tous } f, h \in H, \langle A_r f, h\rangle = \langle f, A_r^* h\rangle, \qquad (VII.8)$$

$$\text{soit } \langle f, A_r^* h\rangle = \int_{-1}^{+1}\left(\int_{-1}^{+1}(x^2+\frac{3}{2}xu+ru^2)f(u)du\right)\overline{h(x)}dx. \qquad (VII.9)$$

La convergence absolue des intégrales permet d'échanger (théorème de Fubini) les signes d'intégration pour faire apparaître l'écriture de A_r^*. On obtient

$$\langle f, A_r^* h\rangle = \int_{-1}^{+1}\overline{\left(\int_{-1}^{+1}(x^2+\frac{3}{2}xu+ru^2)h(x)dx\right)}f(u)du. \qquad (VII.10)$$

$(VII.10)$ montre que

$$A_r^* h = k \text{ avec } k(x) = \int_{-1}^{+1}\left(u^2+\frac{3}{2}ux+rx^2\right)h(u)du. \qquad (VII.11)$$

L'application adjointe est obtenue en permutant le rôle des variables dans l'application initiale. A_r est auto-adjoint si et seulement si on a :

$$\text{Pour toute } f \in H, \int_{-1}^{+1}\left[\left(x^2+\frac{3}{2}xu+ru^2\right)-\left(u^2+\frac{3}{2}ux+rx^2\right)\right]f(u)du = 0.$$

Le facteur de f dans l'intégrale est $(1-r)(x^2-u^2)$. Faisant $x=1$ et choisissant pour f la fonction définie par $f(u)=1$, on obtient la relation : $\int_0^1(1-r)(1-u^2)du = 0$, donc $r=1$. A_1 est ainsi l'unique opérateur auto-adjoint.

Remarque importante : Soit plus généralement $A : H \to H$ l'opérateur « associé au noyau K » défini par la formule

$$Af(x) = \int_{-1}^{1} K(x,t)f(t)dt,$$

où $K : [-1,1]^2 \to \mathbb{C}$ est mesurable, bornée. Alors, $A \in \mathcal{L}(H)$ comme on le vérifie facilement, et un calcul rigoureusement identique à celui fait dans le cas particulier de l'exercice montre que l'adjoint A^* de A est représenté par le noyau L adjoint de K, c'est-à-dire qu'on a pour toute $f \in H$ et tout $x \in [-1,1]$:

$$A^* f(x) = \int_{-1}^{1} L(x,t)f(t)dt \text{ avec } L(x,t) = \overline{K(t,x)}.$$

(3) (i) $\boldsymbol{r = 1.}$

D'après $(VII.6), A_1$ est un opérateur de rang au plus 3. On verra qu'il est de rang 3. D'après $(VII.11), A_1$ est auto-adjoint. Son écriture canonique est alors de la forme $A_1 = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j f_j \otimes f_j$. Les (λ_j, f_j) sont des couples (valeur propre non nulle, vecteur propre normé) où les f_j forment un système orthonormé et les λ_j sont les valeurs propres non nulles comptées avec leur multiplicité.

On cherche donc les valeurs propres non nulles et les espaces propres associés.

Si $A_1 f = \lambda f, \lambda \neq 0$, alors $f \in \mathrm{Im} A_1$. Un calcul direct montre que

$$A_1 e_0 = \frac{2}{3}e_0 + 2e_2,\ A_1 e_1 = e_1,\ A_1 e_2 = \frac{2}{5}e_0 + \frac{2}{3}e_2. \qquad (VII.12)$$

e_1 est donc vecteur propre ; on note $f_1 = e_1(\| e_1 \|)^{-1} = \sqrt{\frac{3}{2}}e_1$, et on voit que le couple

$$\lambda_1 = 1, f_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}e_1 \qquad (VII.13)$$

est un couple (valeur propre non nulle, vecteur propre normé).

Les autres vecteurs f_j sont à chercher dans le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Vect}(f_1)$, donc dans $\mathrm{Vect}(e_0, e_2)$ pour $j = 2, 3$.

Cherchons des vecteurs propres sous la forme $(e_0 + \alpha e_2)$. Ceci fournit les égalités

$$\left(A_1 - \frac{2}{3}I\right)(e_0 + \alpha e_2) = 2e_2 + \frac{2}{5}\alpha e_0 = \lambda(e_0 + \alpha e_2)$$

donc

$$\begin{cases} \lambda\alpha = 2 \\ 5\lambda - 2\alpha = 0 \end{cases}$$

On en déduit deux couples (valeur λ non nulle, vecteur propre normé), qui sont

$$\left(\lambda_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}, f_2 = t_2\left(e_0 + \sqrt{5}e_2\right)\right),\ \left(\lambda_3 = -\frac{2}{\sqrt{5}}, f_3 = t_3\left(e_0 - \sqrt{5}e_2\right)\right)$$

où $t_2, t_3 > 0$ sont ajustées pour que les vecteurs soient normés, soit par un calcul simple :

$$t_2 = \frac{1}{4}\left(3\left(-\sqrt{5}+3\right)\right)^{1/2}, t_3 = \frac{1}{4}\left(3\left(\sqrt{5}+3\right)\right)^{1/2}.$$

Ainsi, selon (P 6.2),

$$A_1 = f_1 \otimes f_1 + \left(\frac{-2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{3}\right) f_2 \otimes f_2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{3}\right) f_3 \otimes f_3.$$

(ii) $\boldsymbol{r = 0}$**.**

D'après $(VII.6), A_0$ est un opérateur de rang au plus 2. L'écriture des $A_0e_k, k = 0, 1, 2$ confirmera qu'il est de rang 2. Il n'est pas auto-adjoint ; la détermination d'une écriture canonique demande alors l'étude préalable de $|A_0| = (A_0^*A_0)^{1/2}$ pour obtenir l'écriture polaire selon (D 6.9) et se ramener à la méthode employée dans le cas précédent.

D'après $(VII.11), \mathrm{Im}(A_0^*) \subseteq \mathrm{Vect}(e_0, e_1)$. Comme $\ker(A_0^*A_0) = [\mathrm{Im}(A_0^*A_0)]^\perp$ (P 6.3), il suffit de déterminer les images de e_0 et e_1.

$$A_0e_0 = 2e_2\ ;\ A_0e_1 = e_1\ ;\ A_0^*e_2 = \frac{2}{5}e_0\ ;\ A_0^*e_1 = e_1$$

donc $(A_0^*A_0)e_0 = \frac{4}{5}e_0 = (\frac{2}{\sqrt{5}})^2e_0$; $(A_0^*A_0)e_1 = e_1$,

D'où $|A_0| = \frac{2}{\sqrt{5}}g_1 \otimes g_1 + g_2 \otimes g_2$ où $g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e_0$ et $g_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}e_1$.

Il reste à passer de $|A_0|$ à l'opérateur A_0, donc à tenir compte de l'écriture polaire $A_0 = U|A_0|$ (D 6.9).

$$A_0e_0 = 2e_2 = U(|A_0|e_0) = U\left(\frac{2}{\sqrt{5}}e_0\right), \text{ donc } Ue_0 = \sqrt{5}e_2, Ug_1 = \sqrt{\frac{5}{2}}e_2.$$

$$A_0e_1 = e_1 = U(|A_0|e_1) = Ue_1 \text{ donc } Ug_2 = g_2$$

et une écriture canonique de A_0 est :

$$A_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}e_2\right) \otimes g_1 + g_2 \otimes g_2 = \sqrt{2}e_2 \otimes g_1 + g_2 \otimes g_2. \qquad (VII.14)$$

Alors (4), $(VII.14)$ et les résultats précédents montrent que

$$A_0e_0 = 2e_2\ ;\ A_0e_1 = e_1\ ;\ A_0e_2 = \frac{2}{3}e_2.\ \ker(A_0) = (\mathrm{Vect}(e_0, e_1))^\perp. \qquad (VII.15)$$

La recherche d'un polynôme annulant A_0 va se ramener à une étude en dimension finie en écrivant, conformément à (D 4.12) :

$$H = H_1 \oplus H_2, H_1 = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2), H_2 = (H_1)^{\perp}, A_0 = B_0 \oplus C_0.$$

$C_0 = 0, B_0$ agit dans un espace de dimension 3 et admet un polynôme minimal P_0 de degré au plus 3 ; les P cherchés sont les multiples de P_0.

$B_0e_0 = 2e_2$; $B_0e_1 = e_1$; $B_0e_2 = \frac{2}{3}e_2$; $B_0(\frac{1}{3}e_0 - e_2) = 0, B_0$ admet donc 3 valeurs propres distinctes : 0, $\frac{2}{3}$, 1. Son polynôme minimal est alors son polynôme caractéristique :

$$P_0(X) = X(X-1)\left(X - \frac{2}{3}\right).$$

Les polynômes P sont les multiples de P_0.

Remarque : On peut noter dès maintenant la différence de traitement entre des opérateurs bornés de rang fini dans la structure espace de Banach (*cf.* Ex. VII.1) et dans la structure espace de Hilbert ici rencontrée. La forme canonique est ici plus précise et demande une étude détaillée de l'opérateur et de son adjoint.

Exercice VII.3

(1) (i) $\ker(I - P) = \{x \in E$ tels que $Px = x\}$. On a donc l'inclusion

$\ker(I - P) \subseteq \mathrm{Im}P$. Alors $\dim(\ker(I - P)) \leq \dim(\mathrm{Im}P) < \infty$.

(ii) $\ker P$ est un sous-espace fermé de E.

Soit H un sous-espace de E, à intersection avec $\ker P$ réduite à $\{0\}$; notons $\widetilde{P}$ l'élément de $\mathcal{L}(H, E)$ coïncidant avec P sur H. Il est injectif et son image $\widetilde{P}(H)$ est incluse dans celle de P ; elle est donc de dimension n au plus. Elle a même dimension que H, qui est donc de dimension finie.

Il en résulte que $\ker P$ admet un supplémentaire algébrique G de dimension finie ; il est alors un supplémentaire topologique d'après (P 1.2). Pour l'écriture $x = y + z$, $y \in \ker P$, $z \in G$, on a $Px = Pz$ et $\mathrm{Im}P = P(G)$. On a donc

$$\dim G = \dim \mathrm{Im}P = n.$$

(iii) Si $x = y + z, y \in \ker P, z \in G,$ on a $x - Px = x - Pz = y + (z - Pz)$.

Lorsque x varie, y décrit $\ker P, z - Pz$ décrit un espace vectoriel de dimension au plus égale à celle de G, donc finie, image de G par $I - P$.

$\mathrm{Im}(I - P) = \mathrm{Vect}(\ker P, (I - P)(G))$. Soit $X = \ker P \cap (I - P)(G)$ et Y un supplémentaire de X dans $(I - P)(G)$; nous avons $\mathrm{Im}(I - P) = \ker P \oplus Y$ d'après (P 1.8). $\mathrm{Im}(I - P)$ est donc un sous-espace fermé de E, de dimension au plus celle d'un supplémentaire de $\ker P$, donc finie.

(2) (i) **ker *A*.** Si $CA = I - Q, [Ax = 0] \Rightarrow [(I - Q)x = 0] \Rightarrow [x \in \mathrm{Im}Q]$. On a donc $\ker A \subseteq \mathrm{Im}Q$. Comme Q est de rang fini, $\ker A$ est de dimension finie au plus égale au rang de Q.

(ii) **ImA.** Si $AB = I - P, \mathrm{Im}A \supseteq \mathrm{Im}AB = \mathrm{Im}(I - P)$. D'après (1), $\mathrm{Im}(I - P)$ est fermé et de codimension finie. Alors ImA est déduit de $\mathrm{Im}(I - P)$ en « ajoutant » un sous-espace de dimension finie.

En effet si $y_1 \in \mathrm{Im}A \setminus \mathrm{Im}(I-P), F_1 = \mathrm{Vect}(y_1) \oplus \mathrm{Im}(I-P) \subseteq \mathrm{Im}A$. Comme $\mathrm{Im}(I-P)$ est de codimension finie, on ne peut prolonger ImP qu'avec un nombre fini de vecteurs y_j.

On obtient $\mathrm{Im}A = \mathrm{Im}(I - P) \oplus \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_r)$. C'est donc, par (P 1.2), un sous-espace fermé de E comme somme directe d'un sous-espace fermé et d'un espace de dimension finie.

$\mathrm{Codim}(\mathrm{Im}A) = \mathrm{Codim}(\mathrm{Im}(I - P)) - r$ est finie.

(3) Utilisons les conclusions de (2).

Si $\ker A$ est de dimension finie, il admet dans E un supplémentaire topologique G (on appelle en général un tel sous-espace un espace initial de A).

Si ImA est fermé de codimension finie, il admet un supplémentaire topologique H de dimension finie.

On peut alors utiliser les deux décompositions en somme directe de E faites avec ces sous-espaces. ($E = H \oplus \mathrm{Im}A, w = u + v$) ; notons $P_1 : \{E \to E, w \mapsto u\}$.

P_1 est un opérateur borné de rang fini (dimension de $\ker A$).

$A_1 : \{\mathrm{Im}A \to G, \forall x \in E, Ax \mapsto x\}$ est une bijection entre espaces de Banach (l'hypothèse que ImA est fermée est utilisée). Par le théorème d'isomorphisme de Banach (P 2.16), son inverse B_1 est donc continue.

Définissons B_1 par $B_1 : \{E \to E, w = u + v \mapsto B_1 v\}$. Nous avons $AB_1 w = A_1 B_1 (I - P_1) w$. Ceci exprime que $AB_1 = I - P_1$. De plus :

$$v = Ax = A_1(I - Q_1)x, \text{ donc } B_1 Ax = B_1 A_1 (I - Q_1)x = (I - Q_1)x,$$

soit $B_1 A = I - Q_1$. Le choix $C_1 = B_1$ répond à la question.

(4) $\ker A = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$; avec les notations de (3) on peut donc choisir $G = \mathrm{Vect}(e_2)$; P_1 est le projecteur sur $\mathrm{Vect}(e_1, e_3)$ de noyau $\mathrm{Vect}(e_2)$ défini par

$$P(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = x_1 e_1 + x_3 e_3.$$

$\mathrm{Im}A = \mathrm{Vect}(e_1)$. On choisit $H = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$, alors Q_1 est le projecteur sur $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ de noyau $\mathrm{Vect}(e_1)$.

B_1 est définie par $B_1(H) = \{0\}, B_1(e_1) = e_2$. Les matrices de ces éléments, dans la base (e_1, e_2, e_3) sont

$$(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; (Q_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; (B_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice VII.4

(1) Il suffit de prendre pour (x_n) une suite orthonormée. Car alors, le théorème de Pythagore (P 5.1) donne

$$p \neq q \Longrightarrow \|x_p - x_q\|^2 = \|x_p\|^2 + \|x_p\|^2 = 2.$$

(2) (i). Il suffit d'élever au carré l'inégalité $\alpha \leq \|y_j - y_k\|$ et de développer. Cela donne, pour $j < k$:

$$\alpha^2 \leq \|y_j\|^2 + \|y_k\|^2 - 2\Re\langle y_j, y_k\rangle \leq 2 - 2\Re\langle y_j, y_k\rangle. \qquad (*)$$

(ii). On fait tendre k vers l'infini dans (*), à j fixé. Il vient

$$\alpha^2 \leq 2 - 2\Re\langle y_j, y\rangle \text{ puis } \alpha^2 \leq 2 - 2\|y\|^2 \leq 2,$$

en faisant tendre j vers$+\infty$.

Exercice VII.5

(1) Si E est de dimension finie, nous avons $\mathcal{K}_0(E) = \mathcal{L}(E)$, donc $I \in \mathcal{K}_0(E)$, et $d(I, \mathcal{K}_0(E)) = 0$.

Si E est de dimension infinie, soit $B \in \mathcal{K}_0(E)$; la dimension de ImB est finie, donc B n'est pas injectif. Soit $x \in \ker B, \| x \| = 1$. On a

$$\|(I - B)x\| = 1, \text{ donc } \|I - B\| \geq 1 \text{ et } d(I, \mathcal{K}_0(E)) \geq 1.$$

D'autre part, $d(I, \mathcal{K}_0(E)) \leq \|I - 0\| = 1$, d'où $d(I, \mathcal{K}_0(E)) = 1$.

(2) On est dans le cas où $d(I, \mathcal{K}_0(E)) = 1$.

(i) **Encadrement.** L'inégalité de droite est triviale.

Si A est inversible, notons $C = A^{-1}$, et remarquons que l'application $M_A : \{\mathcal{K}_0(E) \to \mathcal{K}_0(E),\ B \mapsto AB\}$ est une bijection (car Im$AB \subseteq$ ImB). Ensuite, on a pour tout $B \in \mathcal{K}_0(E)$:

$$\|I - B\| = \|CA - CAB\| \leq \|C\|\,\|A - AB\|.$$

En passant à l'inf sur B des deux côtés, on obtient donc via (1) et la remarque :

$1 \leq d(C, \mathcal{K}_0(E)) \leq \|C\|\, d(A, \mathcal{K}_0(E))$ donc $d(A, \mathcal{K}_0(E)) \geq \|A^{-1}\|^{-1}$,

$$\|A^{-1}\|^{-1} \leq d(I, \mathcal{K}_0(E)) \leq \|A\|. \qquad (VII.16)$$

(ii) **Encadrement optimal.**

L'encadrement utilisé en (1) est tel que $\|I^{-1}\| = \|I\| = 1$. Les deux membres extrêmes de $(*)$ sont donc égaux. Donnons un exemple où ces deux membres sont distincts.

Pour $A = I + e \otimes e$, soit $E = G \oplus H, G = \text{Vect}(e), H = G^{\perp}$.

Si $x = y + z, Ax = 2y + z$; A est donc inversible et $\|A\| = 2$. Pour la même écriture de $E, A^{-1}(y+z) = \frac{y}{2} + z$ donc $\|A^{-1}\| = 1$.

Si $B \in \mathcal{K}_0(E), A - B = I - (-e \otimes e + B)$. La translation par $-e \otimes e$ dans $\mathcal{K}_0(E)$ est une bijection ; il en résulte $d(A, \mathcal{K}_0(E)) = d(I, \mathcal{K}_0(E)) = 1 = \|A^{-1}\|^{-1}$.

(3) S est une isométrie (*cf.* Ex. III.5) donc $\|S\| = 1$.

Soit $B \in \mathcal{K}_0(E)$ et $x \in \ker B, \|x\| = 1$. On a

$\|S - B\| \geq \|Sx - Bx\| = \|Sx\| = \|x\| = 1$ donc $1 \leq d(S, \mathcal{K}_0(E)) \leq 1$ et $d(S, \mathcal{K}_0(E)) = 1$.

(4) On approche T par $T_N\{n \leq N, T_N e_n = \frac{e_{n+1}}{n}, n > N, T_N e_n = 0\}$. On obtient :

$$\text{pour tout } x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n, (T - T_N)x = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n e_{n+1}, \text{ donc}$$

$$\|(T - T_N)x\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}|x_n|^2 \leq \frac{1}{(N+1)^2}\|x\|^2.$$

Or, T_N est dans $\mathcal{K}_0(E)$, donc $d(T, \mathcal{K}_0(E)) \leq \frac{1}{N+1}$, et enfin $d(T, \mathcal{K}_0(E)) = 0$.

Remarque : Dans le chapitre sont définis les opérateurs compacts T, ceux pour lesquels $d(T, \mathcal{K}_0(E)) = 0$ d'après (P 7.12). T en fait donc partie.

Exercice VII.6

(1) (i) ***A* existe.** Soit $x \in H$. On sait (P 5.6) que x s'écrit comme une série convergente $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ avec

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|^2 < \infty.$$

Réciproquement, si une suite (x_n) de scalaires vérifie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$, la série de terme général $x_n e_n$ *converge* dans H car ses sommes partielles forment une suite de Cauchy. Ceci nous incite à procéder ainsi : si A existe, on a nécessairement

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n A(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n e_n.$$

Mais d'après ce qui précède, nous pouvons prendre cette formule comme *définition* de $A(x)$ puisque

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 |a_n|^2 \leq \|a\|_\infty^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

Et nous avons alors par Parseval appliqué deux fois :

$$\|A(x)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 |a_n|^2 \leq \|a\|_\infty^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|a\|_\infty^2 \|x\|^2,$$

ce qui montre de plus que A est continu avec une norme $\leq \|a\|_\infty$. Il est facile de vérifier qu'en fait $\|A\| = \|a\|_\infty$.

Posons maintenant $\lambda = \overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n|$ et $d = d(A, \mathcal{K}(H))$. Soit $K \in \mathcal{K}(H)$. Nous avons pour tout n :

$$\|A - K\| \geq \|A(e_n) - K(e_n)\| \geq \|A(e_n)\| - \|K(e_n)\| = |a_n| - \|K(e_n)\|,$$

soit encore $|a_n| \leq \|K(e_n)\| + \|A - K\|$. Passons à la limite sup dans cette inégalité en nous rappelant que $K(e_n) \to 0$ puisque K est compact et (e_n) orthonormée (*cf.* P 9.11). Il vient $\lambda \leq \|A - K\|$, puis $\lambda \leq d$, en passant à la borne inférieure sur K. Inversement, pour tout entier $N \geq 1$, soit K_N l'opérateur défini, comme l'était A, par

$$K_N(e_n) = \begin{cases} a_n e_n & \text{si } n \leq N \\ 0 & \text{si } n > N \end{cases}$$

L'opérateur K_N est compact car de rang fini, et on a

$$(A - K_N)(e_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq N \\ a_n e_n & \text{si } n > N \end{cases}$$

Il résulte de ce qui précède, puisque $A - K_N$ est de même nature que A, que $d \leq \|A - K_N\| = \sup_{n>N}|a_n|$ puis que, par définition même d'une lim sup : $d \leq \inf_N(\sup_{n>N}|a_n|) = \lambda$. On a bien obtenu

$$d = \lambda. \qquad (VII.17)$$

(ii) ***A* compact** ? On déduit immédiatement de ce qui précède que :

$$A \text{ compact} \iff d = 0 \iff \lambda = 0 \iff a_n \to 0. \qquad (VII.18)$$

La condition (VII.18) est donc le critère de compacité de A.

(2) Comme en (1), nous sommes « obligés » de définir B par la formule

$$B\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) e_1,$$

pour toute suite (x_n) de carré sommable, i.e. telle que $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 < \infty$. Nous devons donc avoir

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 < \infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \text{converge.}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 < \infty. \qquad (VII.19)$$

En effet, si (VII.19) a lieu, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ est absolument convergente par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et de plus

$$\|B(x)\| = |\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|a\|_2 \|x\|,$$

en notant $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\|a\|_2 = (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}$. Si bien que $\|B\| \leq \|a\|_2$. Et puisque B est de rang 1, on a $B \in \mathcal{K}_0(H)$, a fortiori $B \in \mathcal{K}(H)$.

Réciproquement, si B continu existe, soit $x_N = \sum_{n=1}^{N} \overline{a_n} e_n$. Alors, on a :

$$\|Bx_N\| = |\sum_{n=1}^{N} a_n \overline{a_n}| \leq \|B\| \|x_N\|, \tag{VII.20}$$

autrement dit $\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \leq \|B\| (\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2)^{1/2}$, d'où

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2\right)^{1/2} \leq \|B\|.$$

En faisant tendre N vers l'infini, on voit que (VII.19) a bien lieu.

(3) On peut adapter la démarche de (1) ou noter que C est déduit de A par multiplication par $S \in \mathcal{L}(H)$ « défini » par $S e_n = e_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors $C = SA$.

S est continue (Ex. IV.5) ; donc si A est continue (resp.compacte), C est aussi continue(resp.compacte).

S est inversible à gauche (Ex. IV.5) ; donc si C est continue (resp.compacte), A est aussi continue (resp.compacte).

La continuité (resp. compacité) de C a donc lieu dans les mêmes conditions que celle de A.

Exercice VII.7

On note, selon (D 2.9) et (D 7.3), $f(x) = \langle x, f\rangle$ et $T = x_0 \otimes f$. D'après (P 7.4) $T \in \mathcal{L}(E)$, et $\|T\| = \|f\| \, \|x_0\|$.

(1) Calculons T^2 ; nous avons $T \neq 0$ car $Tx_0 \neq 0$, et

$$T^2 x = \langle x, f\rangle T x_0 = \langle x, f\rangle \langle x_0, f\rangle x_0 = \langle x_0, f\rangle T x, \text{ soit}$$

$$T^2 = \langle x_0, f\rangle T. \tag{VII.21}$$

T est donc une projection si et seulement si $\langle x_0, f\rangle = 1$.

(2) (i) $\boldsymbol{\sigma(T)}$.

T est un opérateur linéaire continu de rang 1, son spectre est donc constitué de $\{0\}$ et de l'ensemble des valeurs propres non nulles (P 7.15).

Une valeur propre non nulle possède un espace propre inclus dans l'image, donc la seule possibilité ici est Vect(x_0). $Tx_0 = \langle x_0, f\rangle x_0$.

$\langle x_0, f\rangle$ est donc la seule valeur propre non-nulle, et

$$\sigma(T) = \{0, \langle x_0, f\rangle\}. \tag{$VII.22$}$$

(ii) **Opérateur résolvant de $\boldsymbol{T}$.**

(a) **Première méthode.** On peut chercher, pour $\lambda \notin \{0, \langle x_0, f\rangle\}$, à résoudre en x l'équation $y = Tx - \lambda x$ où y est arbitrairement donné dans E.

$$y = \langle x, f\rangle x_0 - \lambda x. \tag{$VII.23$}$$

En faisant agir f sur les deux membres, on a

$$\langle y, f\rangle = \langle x, f\rangle(\langle x_0, f\rangle - \lambda), \text{ soit } \langle x, f\rangle = \frac{\langle y, f\rangle}{\langle x_0, f\rangle - \lambda}. \tag{$VII.24$}$$

Reportant cette valeur de $\langle x, f\rangle$ dans ($VII.23$), on obtient

$$x = \lambda^{-1}\left[\frac{\langle y, f\rangle}{\langle x_0, f\rangle - \lambda}x_0 - y\right],$$

donc $x = Ay$ où

$$A = -\lambda^{-1}I + [\lambda(\langle x_0, f\rangle - \lambda)]^{-1}x_0 \otimes f. \tag{$VII.25$}$$

(b) **Deuxième méthode.** ($VII.21$) nous fournit l'égalité

$$(T - \lambda I + \lambda I)^2 = \langle x_0, f\rangle(T - \lambda I + \lambda I). \tag{$VII.26$}$$

On déduit, en mettant $(T - \lambda I)$ en facteurs,

$$(T - \lambda I)(T + (\lambda - \langle x_0, f\rangle)I) = \lambda(\langle x_0, f\rangle - \lambda)I, \text{ donc}$$

$$(T - \lambda I)^{-1} = [\lambda(\langle x_0, f\rangle - \lambda)]^{-1}(T + (\lambda - \langle x_0, f\rangle)I), \text{ et}$$

$$(T - \lambda I)^{-1} = -\lambda^{-1}I + [\lambda(\langle x_0, f\rangle - \lambda)]^{-1}T. \tag{$VII.27$}$$

($VII.27$) coïncide avec ($VII.25$). Heureusement !

Exercice VII.8

La compacité de T résulte de la continuité uniforme de K et du théorème d'Ascoli (*cf.* Ex. VIII.2). Pour le calcul de $\|T\|$, posons $L(x) = \int_0^1 |K(x,t)|dt$. D'après les propriétés élémentaires des intégrales dépendant d'un paramètre, la fonction L est continue sur $[0,1]$, soit $M = \|L\|_\infty$.

(1) On écrit, pour $0 \leq x \leq 1$:

$$|Tf(x)| \leq \int_0^1 |K(x,t)||f(t)|dt \leq \|f\|_\infty \int_0^1 |K(x,t)|dt = L(x)\|f\|_\infty,$$

d'où en passant au sup sur x : $\|Tf\|_\infty \leq M\|f\|_\infty$. Cela montre que $T \in \mathcal{L}(E)$ et que $\|T\| \leq M$. Pour montrer que cette inégalité est une égalité, *on utilise les notations et résultats de l'Ex. III.3*. Soit $x_0 \in [0,1]$ tel que $L(x_0) = M$, et $g(t) = K(x_0,t), g \in E$. On a

$$\|T\|\,\|f\|_\infty \geq \|Tf\|_\infty \geq |Tf(x_0)| = \left|\int_0^1 g(t)f(t)dt\right| = |A_g(f)|,$$

d'où bien sûr $\|T\| \geq \|A_g\|$. Et l'on a $\|A_g\| = \|g\|_1 = L(x_0) = M$ d'après l'Ex. III.3 (2), ce qui montre bien que $\|T\| = M$.

(2) D'après le cas général précédent, on a $\|T\| = \int_0^1 e^{1+t}dt = e(e-1)$.

On écrit $(Tf)(x) = e^x \int_0^1 e^t f(t)dt$, ce qui montre que T est un opérateur borné de rang 1. Si on note A l'élément du dual de E défini par $f \mapsto \int_0^1 e^t f(t)dt$ et g la fonction $g(x) = e^x$, on a plus précisément

$Tf = \langle f, A\rangle g$, soit $T = g \otimes A$, avec les notations de (D 7.3).

T est un opérateur borné de rang un, donc compact. Alors, $0 \in \sigma(T)$ et $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est l'ensemble des valeurs propres non nulles de T (P 7.15).

L'espace propre correspondant à une valeur propre non nulle est inclus dans $\mathrm{Im}(T)$, c'est donc $\mathrm{Vect}(g)$. Il y a alors une seule valeur propre non nulle et l'égalité $Tg = \langle g, A\rangle g$ montre que cette valeur propre est $\langle g, A\rangle = \frac{e^2-1}{2}$.

$$\sigma(T) = \left\{0, \frac{e^2-1}{2}\right\}.$$

Notons que l'égalité $\|T\| = e(e-1)$ se lit aussi $\|T\| = \|g\|_\infty\|A\|$.

Exercice VII.9

S a été plusieurs fois considéré, on sait (*cf.* Ex. IV.5) que $S \in \mathcal{L}(H)$ et est isométrique (D 4.16).

(i) **$\{S\}'$, commutant de S.** Soit $B \in \mathcal{L}(H)$ compact tel que $SB = BS$. Ceci entraîne, S étant une isométrie :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, SBe_n = BSe_n = Be_{n+1}, \text{ et } \|Be_n\| = \|Be_{n+1}\|. \qquad (VII.28)$$

On constate sur (VII.28) que

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \ \|Be_n\| = \|Be_1\|. \qquad (VII.29)$$

Mais B est compact, donc le membre de gauche de (VII.29) tend vers zéro quand $n \to \infty$ (*cf.* P 9.11), et par suite on a

$$Be_1 = Be_2 = \ldots = Be_n = \ldots = 0.$$

Les e_n formant une base orthonormale de H, il en résulte que $B = 0$, CQFD.

(ii) **S non compact.** Ceci est par exemple une conséquence de (i) puisque S commute avec S et est non nul !

Exercice VII.10

(1) On va montrer que

$$A \in \mathcal{L}(E) \Longleftrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \|Ae_n\| < \infty.$$

(i) **Condition nécessaire.** C'est évident :

Comme, pour tout n, $\|e_n\| = 1$, on doit avoir, pour tout n, $\|Ae_n\| \leq \|A\|$.

(ii) **Condition suffisante.** Soit $h = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \|Ae_n\| < \infty$, et soit $x \in E$. Par définition, x peut s'écrire comme une série absolument convergente dans E : $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, avec $x_n \in \mathbb{C}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$. On peut alors poser $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} x_n A e_n$, car la série considérée est absolument convergente dans E : $\|x_n A e_n\| \leq |x_n| h$. De plus, on voit que

$$\|Ax\| \leq \left(\sup_n \|Ae_n\|\right) \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = h\|x\|.$$

A est donc continue, et sa norme vaut h.

(2) (i) **L'implication $\Rightarrow$** C'est l'application directe de la définition (D 7.5) ; $M = \{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est borné, donc son image $A(M)$ doit être relativement compacte.

(ii) **L'implication $\Leftarrow$** Posons $N = \overline{A(M)}$. C'est par hypothèse un compact. Soit (f_p) la suite de fonctions définies sur N par

$$f_p(x) = \sum_{j>p} |x_j| \text{ pour } x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}^*} \in N.$$

La suite (f_p) est une suite décroissante de fonctions continues sur le compact N (puisque $|f_p(x) - f_p(y)| \leq \|x - y\|$), de limite nulle. D'après le *théorème de Dini*, elle converge uniformément vers 0 sur N, autrement dit :

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \ \text{il existe } P = P(\varepsilon) \text{ tel que } \sum_{j>P} |x_j| \leq \varepsilon \text{ si } x \in N.$$

Écrivons chaque Ae_n sous la forme « matricielle » suggérée par l'énoncé :

$$Ae_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{n,j} e_j \in N.$$

P étant comme ci-dessus, posons $u_n = \sum_{j=1}^{P} a_{n,j} e_j$, puis définissons un opérateur de rang fini A_ε proche de A par la formule :

$$A_\varepsilon x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n u_n, \text{ avec } \|Ae_n - u_n\| = \sum_{j>P} |a_{n,j}| \leq \varepsilon.$$

L'opérateur A_ε est bien de rang fini car $\operatorname{Im} A_\varepsilon \subset \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_P)$. Et enfin $\|A - A_\varepsilon\| \leq \varepsilon$, car

$$\|Ax - A_\varepsilon x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \|Ae_n - u_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \varepsilon = \varepsilon \|x\|.$$

Ceci achève la question, puisque A est limite en norme d'opérateurs de rang fini.

Notons qu'on a approché A par un opérateur de rang fini en substituant à la famille des Ae_n une famille u_n de rang fini « voisine ».

On peut aussi remarquer que l'on a la conclusion de la propriété (P 7.12), c'est-à-dire $\mathcal{K}(E) = \overline{\mathcal{K}_0(E)}$, bien que l'espace E n'ait pas une structure d'espace de Hilbert. Remarquons enfin, en termes de matrice, que la compacité de A équivaut à la condition *d'équisommabilité* suivante :

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } P \text{ entier tel que } \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{j>P} |a_{n,j}| \right) \leq \varepsilon.$$

(3) (i) **Le dual de $c_0 = F$.** Comme on l'a vu dans l'Ex. II.7, question (6), ce dual s'identifie isométriquement à $\ell^1 = E$. Notons que la « base » canonique (δ_n) de F, $\delta_n(j) = \delta_{n,j}$ a pour base duale dans $E = F^*$ la « base » canonique (e_n) de E, à savoir $\langle e_n, \delta_m \rangle = \delta_{m,n}$ (D 1.15).

(ii) **$\mathcal{K}(F)$.** Écrivons matriciellement $A\delta_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{n,j} \delta_j$. Alors, l'opérateur transposé $A' : F \to F$ est défini par la matrice transposée sur la « base » duale (P 4.2) :

$$A' e_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,n} e_j.$$

De plus, on sait que $[A \in \mathcal{K}(F)] \Leftrightarrow [A' \in \mathcal{K}(F^*)]$ (P 6.13).

On peut donc utiliser la caractérisation trouvée en (2), et on obtient pour la compacité de $A : F \to F$ la condition nécessaire et suffisante suivante :

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } P \text{ entier tel que } \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{j>P} |a_{j,n}| \right) \leq \varepsilon.$$

Il nous faut ici l'équisommabilité des colonnes de la matrice, alors que dans le cas de $E = \ell^1$ il fallait l'équisommabilité des lignes.

Exercice VII.11

(1) h est continue sur l'ensemble compact, connexe $I = [0, 1]$; l'ensemble de ses valeurs est donc un intervalle fermé $J = h(I) = [a, b] \subseteq [0, 1]$.

A est évidemment linéaire. Chaque $Af = f \circ h$ est le produit de composition de deux fonctions continues, donc est une fonction continue : $Af \in E$.

De plus,

$$f \in E \Longrightarrow \|Af\|_u = \sup_{x\in I} |f(h(x))| = \sup_{y\in J} |f(y)| \leq \|f\|_u,$$

donc $\|Af\|_u \leq \|f\|_u$. A est continue et de norme majorée par 1.

Si pour tout x, $f_0(x) = 1$, alors $Af_0 = f_0$ (f_0 est vecteur propre de A pour la valeur propre 1), d'où $\|A\| = 1$.

(2) (i) **Si *h* est constante.**

Utilisons la fonction f_0 de la question (1).

On écrit $h = cf_0, c \in [0, 1]$. Alors pour tout x, $f[h(x)] = f(c)$ et donc $Af = f(c)f_0$, ce qui montre que A est compact, car de rang 1.

(ii) **Si *h* n'est pas constante.**

On a alors $a < b$, avec les notations de (1). On utilise la propriété (P 7.8) de manière à montrer le caractère non compact de A. Il suffit de mettre en évidence une suite (f_n) de fonctions de la boule unité fermée de E, telle que (Af_n) n'admette pas de sous-suite convergente. On considère pour cela la suite de fonctions définies par

$$f_n(x) = e^{2i\pi n\frac{x-a}{b-a}}, x \in I, \text{ telle que } \|f_n\|_u = 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Lorsque $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $p < q$, on a

$$\begin{aligned}\|Af_q - Af_p\|_u &= \sup_{y\in J} |f_q(y) - f_p(y)| = \sup_{y\in J} |e^{2i\pi q\frac{y-a}{b-a}} - e^{2i\pi p\frac{y-a}{b-a}y}| \\ &= \sup_{z\in I} |e^{2i\pi qz} - e^{2i\pi pz}| = \sup_{z\in I} |1 - e^{2i\pi(p-q)z}| = 2,\end{aligned}$$

comme on le voit en donnant à z la valeur $z = \frac{1}{2(q-p)} \in I$. (Noter que $z = \frac{y-a}{b-a}$ parcourt I quand y parcourt J.) La suite des images par A de la suite (f_n) considérée n'admet aucune sous-suite convergente, et A n'est pas compact.

Exercice VII.12

Soit A un opérateur compact sur E, M la boule unité fermée de E, puis $N = A(M)$, relativement compact (*cf.* D 7.5), et $\varepsilon > 0$. D'après le théorème d'Ascoli-Arzela ((P 2.3), partie facile), N est équicontinu. Il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$\text{pour tout } g \in N, \text{ pour tous } x, y \in [0, 1], |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon.$$

Par compacité, on peut recouvrir $[0,1]$ par un nombre fini de boules ouvertes (dans $[0,1]$) $B(x_j,\delta)_{1\le j\le J}$. On sait aussi qu'on peut trouver une partition continue de l'unité subordonnée à ce recouvrement ouvert, i.e. une suite finie $(\varphi_1,\ldots,\varphi_J)$ de E telle que

$$\varphi_j \geq 0\ ;\ \sum_{j=1}^{J}\varphi_j(x) = 1 \text{ pour tout } x\in[0,1]\ ;\ \text{ et } x\notin B(x_j,\delta) \Longrightarrow \varphi_j(x)=0.$$

Notons A_ε l'opérateur de rang fini $\leq J$ de $\mathcal{L}(E)$ défini ainsi :

$$\text{Pour tout } f\in E,\ A_\varepsilon f = \sum_{j=1}^{J}(Af)(x_j)\varphi_j.$$

Montrons que cet opérateur approche bien A, ce qui règlera la question. Soit $f \in M$, $g = A(f)\in N$, $x\in[0,1]$. Nous avons

$$(Af - A_\varepsilon f)(x) = \sum_{j=1}^{J}((Af)(x)-(Af)(x_j))\varphi_j(x) = \sum_{j=1}^{J}(g(x)-g(x_j))\varphi_j(x).$$

Notons l'inégalité

$$|g(x)-g(x_j)|\varphi_j(x) \leq \varepsilon\varphi_j(x) \text{ pour tous } j, x.$$

En effet, cette inégalité a lieu par équicontinuité de $N\ni g$ si $|x-x_j|<\delta$. Et si $|x-x_j|\geq\delta$, $\varphi_j(x) = 0$ et les deux membres de l'inégalité sont nuls. Reportant cette inégalité dans l'égalité ci-dessus, on obtient donc via l'inégalité triangulaire :

$$|(Af - A_\varepsilon f)(x)| \leq \sum_{j=1}^{J}|g(x)-g(x_j)|\varphi_j(x) \leq \sum_{j=1}^{J}\varepsilon\varphi_j(x) = \varepsilon.$$

Passant au sup sur x, on obtient : $\|Af - A_\varepsilon f\|_\infty \leq \varepsilon$ pour tout $f\in M$. Enfin, passant au sup sur $f\in M$, on obtient $\|A - A_\varepsilon\|\leq\varepsilon$. Ceci achève la preuve.

Exercice VII.13

On utilise la définition (D 7.5).

Il s'agit de reconnaître un ensemble relativement compact dans $\mathcal{C}([0,1]) = F$.

Le théorème d'Ascoli-Arzela, avec les notations de (P 2.3), utilisées ici avec l'espace métrique compact $G = [0,1]$ et l'espace de Banach $H = \mathbb{C}$, nous dit qu'une partie N de $\mathcal{C}([0,1])$ est relativement compacte si et seulement si

1. N est bornée dans E.
2. N est équicontinue.

Rappelons qu'une partie N de F est équicontinue si

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \text{ tel que } \forall x,y\in[0,1], \forall f\in N, |x-y|\leq\delta \Rightarrow |f(y)-f(x)|\leq\varepsilon.$$

(1) On note $I = [0, 1]$. On choisit pour N l'image par T de la boule unité fermée M de E, ici $N = M$.

(i) ***N* borné, équicontinu.**

Soit $f \in N$. On a en particulier $\|f\|_\infty \leq 1$, et N est borné dans E. On a aussi $\|f'\|_\infty \leq 1$. On applique alors l'inégalité de la moyenne :

$|f(y) - f(x)| \leq |y - x| \sup_{z \in I}(|f'(z)|) \leq |y - x|$. Ceci établit le caractère équicontinu de N, et donc sa relative compacité. T est ainsi un opérateur compact.

(2) (i) **(Rappel de l'Ex. I.6).**

Rappelons que, pour $f : I \to \mathbb{C}$, on note $J = \{(x, y) \in I^2 \,;\, x \neq y\}$, et $p_\alpha(f) = |f(0)| + \sup_{(x,y)\in J} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$. On définit alors

$$\mathrm{Lip}_\alpha = \{f : I \to \mathbb{C} \text{ telles que } p_\alpha(f) < \infty\},$$

et on a $f \in \mathrm{Lip}_\alpha \Longrightarrow \|f\|_\infty \leq p_\alpha(f)$.

(ii) ***T* compact.**

Comme dans le cas précédent, N est l'image par T de la boule unité fermée de Lip_α. Si $f \in N$, on a $\|f\|_\infty \leq p_\alpha(f) \leq 1$, donc N est borné dans F. Le caractère équicontinu de N résulte du choix de la norme :

$$|f(x) - f(y)| \leq p_\alpha(f)|x - y|^\alpha \leq |x - y|^\alpha,$$

donc à ε donné peut être associé δ par $\delta^\alpha = \varepsilon$. De nouveau, N est relativement compact, et T est un opérateur compact.

Exercice VII.14

(1) Si H est de dimension infinie, il existe dans H une suite orthonormée infinie $S = \{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$. S est un ensemble borné, $[j \neq k] \Rightarrow [\,\|e_j - e_k\| = \sqrt{2}]$, donc on ne peut extraire de S aucune sous-suite convergente, et $S = I(S)$ n'est pas relativement compact.

(2) (i) **« Remplacer » *A* par un opérateur injectif.**

A est continu, donc $\ker A$ est un sous-espace fermé de E, et admet dans E un supplémentaire orthogonal G vérifiant (P 5.10).

Soit B la restriction de A à G. On a $\ker A \cap G = \{0\}$, donc B est un opérateur (continu) injectif. La boule unité de G est une partie de celle de E ; son image M par B est une partie de l'image N par A de la boule unité de E. N est compacte (P 7.8), donc M est relativement compacte, et B est un opérateur compact. De plus, dans l'écriture de E, $E = \ker A \oplus G$, $x = y + z$, on a $Ax = Az = Bz$, donc $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$. On peut donc sans perte de généralité supposer A injectif.

(ii) **« Remplacer » *A* par un opérateur bijectif.**

Soit F_1 un sous-espace fermé de dimension infinie inclus dans $\mathrm{Im}(A)$, $E_1 = A^{-1}(F_1)$, sous -espace fermé de dimension infinie de E, B la restriction de A à E_1. B est cette fois un opérateur bijectif et compact de E_1 sur F_1. Sans perte de généralité, et quitte à remplacer respectivement E et F par E_1 et F_1, on peut donc supposer A bijectif.

(ii) **« Se ramener » à l'identité de *E*.**

D'après le théorème d'isomorphisme de Banach (P 2.16), l'inverse A^{-1} est continu. Soit I_E l'opérateur identité sur E. On a $A^{-1}A = I_E$; d'après (P 7.10), le produit d'un opérateur continu par un opérateur compact est un opérateur compact. I_E est donc un opérateur compact, ce qui contredit (1). $\mathrm{Im}(A)$ ne contient donc aucun sous-espace fermé de dimension infinie.

Exercice VII.15

(1) C'est le théorème de l'image spectrale, dont on donne une preuve dans un cas plus général, dans l'Ex. IV.6, auquel nous renvoyons.

(2) (i) Si $A = 0$, la propriété est vraie, 0 est valeur propre de A.

Si $A^2 = 0$ et $A \neq 0$, alors $\{0\} \neq \mathrm{Im}(A) \subseteq \ker(A)$, donc 0 est valeur propre de A, l'espace propre contenant $\mathrm{Im}(A)$.

Si $A^2 \neq 0$, comme il est auto-adjoint, son rayon spectral $r(A^2)$ est égal à sa norme (P 6.6), i.e. :

$$\|A^2\| = \sup_{\nu \in \sigma(A^2)} |\nu|.$$

Il existe donc $\nu_0 \in \sigma(A^2)$ compact tel que $\nu_0 \neq 0$, et même tel que $|\nu_0| = \|A^2\|$.

Par (P 7.15), ν_0 est une valeur propre de A^2 et l'espace propre associé E_0 est de dimension finie. Il est invariant par A puisque, si $A^2x = \nu_0 x$, on a $A(A^2x) = A^2(Ax) = \nu_0(Ax)$. Dans E_0 de dimension finie, A admet au moins une valeur propre λ. CQFD.

(ii) Si A admet deux valeurs propres distinctes et non opposées λ, μ, soient F_λ, F_μ les espaces propres associés. On a $[Au = \lambda u] \Rightarrow [A^2u = \lambda^2 u]$, donc λ^2, μ^2 sont valeurs propres pour A^2, et par suite des nombres réels puisque A^2 est auto-adjoint et l'on a, si E_λ, E_μ désignent les espaces propres associés, $F_\lambda \subseteq E_\lambda, F_\mu \subseteq E_\mu$. Comme A^2 est auto-adjoint, E_λ et E_μ sont orthogonaux ; il en est de même, par inclusion, de F_λ et F_μ.

(iii) La réponse est NON. Il est facile de trouver un opérateur non compact de carré nul. Soit par exemple $(e_n, n \in \mathbb{N}^*)$ une base orthonormée de H et

$$A \in \mathcal{L}(H) \text{ tel que : pour tout } n \in \mathbb{N}^*, Ae_{2n-1} = e_{2n} \text{ et } Ae_{2n} = 0.$$

Il est de carré nul et non compact ; en effet la famille $\{e_{2n-1}, n \in \mathbb{N}^*\}$ est un ensemble borné, son image est un ensemble borné non relativement compact, la distance de deux points quelconques de cette image est $\sqrt{2}$.

(3) (i) Si $A^2 = 0$, par (1), $\sigma(A) = \{0\}$, et $r(A) = 0$.

Or A est auto-adjoint donc $r(A) = \|A\|$ par (P 6.6).

Alors $[r(A) = 0] \Rightarrow [A = 0]$. On peut aussi utiliser l'Ex. VII. 20 qui suit. Le même résultat ($A^2 = 0 \Longrightarrow A = 0$) vaut pour les opérateurs normaux.

(ii) Si H est de dimension finie, A auto-adjoint admet une base orthonormée de vecteurs propres. Les valeurs propres sont gérées par la question (1) donc sont prises dans $\{-1, +1\}$ si $A^2 = I$. On peut alors écrire $H = F \oplus G, G = F^{\perp}, A$ est l'identité dans F et (- identité) dans G.

(iii) A^2 est compact et auto-adjoint ; il admet l'écriture notée en (P 7.16)

$$A^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n, \lambda_n \neq 0 \text{ et valeur propre de } A^2. \qquad (VII.30)$$

Cette écriture met en évidence les espaces propres de dimension finie relatifs à une valeur propre non nulle (regroupement des λ_n égaux) ; si l'on note par $(\mu_p, H_p, p \geq 1)$ les (valeur propre, espace propre) ainsi obtenus, les H_p forment une famille orthogonale de sous-espaces de dimension finie tels que

$$\text{Si } H_0 = \ker A, H = H_0 \oplus^{\perp} \overline{(\mathrm{Vect}(H_p, p \geq 1)}.$$

H_0 et les H_p sont invariants par A d'après l'étude de (2) (ii).

Dans H_0, A se comporte selon (i) ; il est nul.

Dans $H_p, A\mu_p^{-1}$ se comporte comme en (ii), $H_p = F_p \oplus^{\perp} G_p, F_p$ et G_p sont les espaces propres (l'un d'eux peut être réduit à $\{0\}$) relatifs aux valeurs propres $\sqrt{\lambda_p}$ et $-\sqrt{\lambda_p}$. On peut alors définir une base orthonormale de H constituée de la réunion de bases orthonormales de F_p, G_p et H_0.

Pour cette base, A admet la forme décrite en (P 7.16), une valeur propre ν_n de A est racine carrée d'un λ_j, donc l'espace propre est de dimension finie, au plus celle de l'espace propre relatif à λ_j. Les ν_n, comptées selon leur multiplicité, forment comme les λ_n une suite finie (réelle) ou une suite de limite 0. On a reconstitué l'écriture canonique d'un opérateur auto-adjoint compact.

On peut aussi remarquer le fait suivant : si $E_n = \oplus_{p=1}^{n} H_p$, et $K_n = E_n^{\perp}$, soit A_n l'opérateur coïncidant avec A sur E_n et nul sur K_n. Alors, cet opérateur est borné de rang fini et $A = \lim_n A_n$.

Exercice VII.16

(1) On a prouvé (*cf.* Ex. II.11) que, si A est continu, $E_1 = E/\ker A$ est un espace de Banach et que B est continu.

Soit N un ensemble borné de E_1. Pour chaque $[x] \in N$, soit $y \in [x]$ tel que $\|y\| \leq 2\|[x]\|$. On choisit un tel y et on le note $y([x])$. Soit alors $M = \{y([x])\,;\ [x] \in N\}$. On a

$A(M) = B(N)$ et M est borné. Son image $A(M)$ est donc relativement compacte et B est compact.

(2) On reconstruit A à partir de B (notation de (1)) en utilisant l'application canonique π avec les propriétés (P 2.9). $\pi : \{E \to E_1, x \mapsto [x]\}$ est continue.

$A = B\pi$. Comme A est le produit d'un opérateur compact par un opérateur continu, par (P 7.10), A est compact.

(3) Notons $G = E \oplus F$ et $x = y + z, y \in E, z \in F$, un vecteur de G.

(i) ***B*, *C* compacts ⇒.**

Par la définition de la somme directe topologique (D 1.12) si $x = y + z, y \in E, z \in F$, les applications $P_1 : \{G \to E, x \mapsto y\}$ et $P_2 : \{G \to F, x \mapsto z\}$, sont continues. De la même façon, les applications $Q_1 : \{F \to E, y \mapsto y + 0\}$, $Q_2 : \{G \to E, z \mapsto z + 0\}$ sont continues. On peut écrire

$$\begin{aligned} Ax = By + Cz = BP_1x + CP_2x &= (BP_1x + 0) + (0 + CP_2x) \\ &= (Q_1BP_1x) + (Q_2CP_2x), \text{ soit } A = Q_1BP_1 + Q_2CP_2. \end{aligned}$$

Par application de (P 7.10), A est alors compact puisqu'il est construit par un produit d'un opérateur compact par un opérateur borné, puis une somme d'opérateurs compacts.

Remarquons qu'on peut aussi raisonner en appliquant la définition ; un ensemble borné M de E est inclus dans un ensemble borné $M_1 \oplus M_2$ de $E \oplus F$ avec $M_1 \subseteq E, M_2 \subseteq F$.

$A(M_1 \oplus M_2) = B(M_1) \oplus C(M_2)$ est une somme directe d'ensembles relativement compacts donc est relativement compact, si bien que $A(M)$ est relativement compact.

(ii) ***A* compact ⇒.**

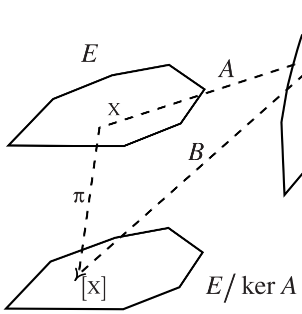
Tout ensemble borné $M \subset E \oplus F$ est transformé par A en un ensemble relativement compact. Et si $M \subset F$, son image $A(M)$ sera une partie relativement compacte de $E \oplus F$, donc une partie relativement compacte de F (une boule ouverte de F est la trace de la boule ouverte de $E \oplus F$ de même centre et de même rayon). Comme $A(M) = C(N), C$ est aussi un opérateur compact. Il en est de même de B.

(4) Un ensemble borné de G est aussi un ensemble borné de E.

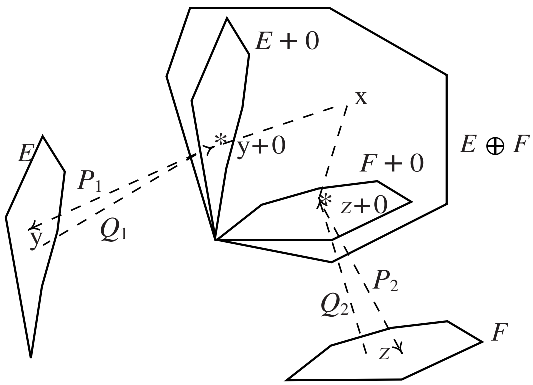
Un ensemble N relativement compact de G est trivialement un ensemble relativement compact de E.

Soit alors $M \subseteq G, M$ borné. $N = A(M) = D(M)$ est relativement compact dans G, et par suite D est compact.

Remarque VII.1 : La question (1) utilise un espace-quotient ; ce n'est pas un sous-espace de E, seule une identification peut être faite si un supplémentaire topologique de $\ker A$ existe. Sinon, le schéma suivant montre la factorisation de A par π utilisée.



Remarque VII.2 : On est attentif à l'usage de la somme directe topologique dans (2). Même si on fait souvent des abus de langage en considérant E comme sous-espace de $E \oplus F$, c'est l'espace noté ci-dessous $E + 0$ qui est dans $E \oplus F$. E et F sont deux espaces distincts et plongés dans $E \oplus F$ par les applications Q_1 et Q_2. E, F ne sont vraiment des sous-espaces de $E \oplus F$ que dans le cadre de la définition (D 1.13) où la donnée initiale est celle de G écrit ensuite sous la forme $E \oplus F$. Dans ce cas la norme de G est aussi une donnée, elle est une « norme équivalente » selon (D 1.12).



Exercice VII.17

(1) On cherche à former un système libre « remplaçant » le système orthonormal de l'espace de Hilbert, en adaptant la technique de construction d'un système orthonormé. Le système cherché pourra être construit pas récurrence si nous savons gérer la distance d'un vecteur normé à l'espace engendré par les vecteurs connus, c'est-à-dire $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$.

(i) **Vecteur normé « presque » orthogonal à un sous-espace F de E.**

Soit F un sous-espace de E de dimension finie, et $y \in E$, $y \notin F$. Notons $d(y, F) = \inf(\|x - y\|\,;\ x \in F) = a > 0$, et montrons d'abord que cette distance est « atteinte ». En effet, soit (x_n) une suite de F telle que $\|x_n - y\| \to a$. $\|x_n\| \leq \|x_n - y\| + \|y\|$, donc (x_n) est bornée, et comme $\dim F < \infty$, il existe $x \in F$ et une suite extraite (x_{n_j})

convergeant vers x. Le passage à la limite dans $\|x_{n_j} - y\| \to a$ donne $\|x - y\| = a$. Le vecteur x joue le rôle de « projection orthogonale » de y sur F.

(ii) **Le système cherché.**

On va former le système souhaité par récurrence à l'aide de (i). Soit e_1 un vecteur normé quelconque de E. Supposons ensuite construits des vecteurs normés $e_1, \ldots, e_n$ tels que

$$1 \leq i, j \leq n \text{ et } i \neq j \Longrightarrow \|e_i - e_j\| \geq 1.$$

Posons $F = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. On a $F \neq E$ puisque $\dim F < \infty$ et $\dim E = \infty$. Soit donc $y \in E \setminus F$, et $a = d(y, F) > 0$. D'après (i), il existe $x \in F$ tel que $\|y - x\| = a$. Posons alors $e_{n+1} = \frac{y-x}{a}$. Ce vecteur est normé, et de plus

$$1 \leq j \leq n \Longrightarrow \|e_{n+1} - e_j\| = \|\frac{y - (x + ae_j)}{a}\| = \frac{1}{a}\|y - (x + ae_j)\| \geq \frac{a}{a} = 1,$$

en utilisant le fait que $x + ae_j \in F$. On voit donc qu'on peut construire par récurrence une suite infinie (e_n) ayant la propriété requise.

(2) À l'aide de (1), on peut agir comme dans l'espace de Hilbert. La suite (e_n) est bornée, et ne contient aucune sous-suite convergente d'après (VII.1). L'identité n'est donc pas compacte. Le résultat n'est d'ailleurs rien d'autre que le célèbre *Théorème de Riesz* (P 2.2).

(3) La démarche adapte celle de l'Ex. VII.16 (*cf.* aussi Ex. IV.10(3)).

(i) **Remplacer A par un opérateur injectif.**

On ne peut pas utiliser un supplémentaire de $\ker A$, il peut ne pas en exister. On peut alors faire intervenir l'espace-quotient $E/\ker A$. Soit B défini par $\{E/\ker A \to F, [x] \mapsto Ax\}$ (*cf.* Ex. VII.16). L'opérateur B est compact et injectif, avec même image que A. On peut donc supposer A injectif.

(ii) **Remplacer A par un opérateur bijectif.**

Soit G un sous-espace fermé de dimension infinie de $\operatorname{Im}(A)$, et $H = B^{-1}(G)$. Alors, H est un sous-espace fermé de E, et la restriction de A à H est une bijection linéaire continue et compacte de H sur G. On peut donc supposer A bijectif de E sur F.

D'après le théorème d'isomorphisme de Banach (P 2.16), l'application $A^{-1} : F \to E$ est continue.

Agissons alors comme dans l'Ex. VII.16. Soit I_E l'opérateur identité sur E. Nous avons $I_E = A^{-1}A$, donc I_E est compact d'après (P 7.10) (le produit d'un opérateur continu par un opérateur compact est un opérateur compact).

Par (1), ceci ne peut être vrai si $\dim E = \infty$. $\operatorname{Im}(A)$ ne contient donc aucun sous-espace fermé de dimension infinie.

Exercice VII.18

(1) Si $\lambda_0 \notin \sigma(T+K)$, on a

$$S(T-\lambda_0 I) = S(T+K-\lambda_0 I - K) = I - SK. \qquad (VII.31)$$

$$\text{Donc } [(T-\lambda_0 I)x = 0] \Leftrightarrow [(I-SK)x = 0]. \qquad (VII.32)$$

(2) Si $\lambda_0 \notin \sigma_p(T)$, $I-SK$ est injectif d'après $(VII.32)$, donc inversible d'après (P 7.11) car SK, produit de K compact et de S continu, est compact. Mais alors, d'après (VII.31), $T-\lambda_0 I = S^{-1}(I-SK)$ est inversible, comme produit d'opérateurs inversibles. Et cette contradiction montre qu'on a bien $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$.

(3) C'est un raisonnement sur les sous-ensembles de $\mathbb{C}$.
Soit $M = \bigcap_{K\in\mathcal{K}(E)} \sigma(T+K)$; on a $M \subseteq \sigma(T)$ (usage de $K=0$).
Soit $\lambda \in \sigma(T) \setminus M$, alors il existe $K \in \mathcal{K}(E)$ tel que $\lambda \notin \sigma(T+K)$.
D'après (2), on doit alors avoir $\lambda \in \sigma_p(T)$. L'égalité $(VII.3)$ est donc valable.

Exercice VII.19

(1) Rappelons qu'une suite orthonormale (g_n) est faiblement convergente vers 0. En effet,

$$y \in H \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, g_n\rangle|^2 \leq \|y\|^2$$

par l'inégalité de Bessel, et $\langle y, g_n\rangle \to 0$ car le terme général d'une série convergente tend vers zéro !

Montrons alors que la suite Tg_n admet 0 pour unique valeur d'adhérence. Comme cette suite est à valeurs dans un compact (la fermeture de l'image par T de la boule unité fermée de H), il en résultera que $Tg_n \to 0$ (*cf.* P 9.11). Soit donc y une telle valeur d'adhérence. Il existe une suite croissante d'entiers $(n_j)_{j\geq 1}$ telle que $Tg_{n_j} \to y$. On a alors, si $z \in H$:

$$\langle Tg_{n_j}, z\rangle = \langle g_{n_j}, T^* z\rangle \to 0 \text{ et } \langle Tg_{n_j}, z\rangle \to \langle y, z\rangle,$$

d'où $\langle y, z\rangle = 0$ et ensuite $y = 0$ en faisant $z = y$. D'où le résultat demandé.

(2) Dans le cas d'un espace de Hilbert, on sait que l'ensemble des opérateurs compacts n'est autre que l'adhérence de l'ensemble des opérateurs bornés de rang fini (P 7.12). On note $h = (\sum_{n=1}^{+\infty} \|Te_n\|^2)^{1/2}$. La condition imposée à la famille des Te_n suggère l'usage (procédé classique) de la suite d'opérateurs T_N définis par, si $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ avec $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$:

$$T_N x = \sum_{n=1}^{N} x_n T e_n = \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle T e_n.$$

Montrons qu'elle nous permet de conclure :

(i) $\boldsymbol{T_N}$ **borné de rang fini.** T_N est de rang fini puisque

$$\operatorname{Im}(T_N) \subseteq \operatorname{Vect}(Te_j,\ j = 1, \ldots, N).$$

Il est trivialement borné vu son écriture.

(ii) $\boldsymbol{T = \lim_N T_N}$**.** Soit $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in H$. Puisque la série précédente converge dans H et puisque T est continu, on peut écrire $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n Te_n$ et par différence, on a $Tx - T_N x = \sum_{n=N+1}^{\infty} x_n Te_n$, d'où

$$\begin{aligned}\|(T - T_N)x\| &= \Big\|\sum_{n=N+1}^{+\infty} x_n Te_n\Big\| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |x_n|\,\|Te_n\| \\ &\leq \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} \|Te_N\|^2\right)^{1/2} \leq \|x\| \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} \|Te_N\|^2\right)^{1/2} \stackrel{def}{=} r_N \|x\|.\end{aligned}$$

D'où $\|T - T_N\| \leq r_N$ (on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz (P 5.4) et celle de Bessel (P 5.11)).

Mais r_N^2 est le reste à l'ordre N d'une série numérique convergente, donc r_N tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$, ce qui montre que $\lim_N (T - T_N) = 0$, et que $T \in \overline{\mathcal{K}_0(H)} = \mathcal{K}(H)$ (P 7.12).

(3) On utilise le fabuleux théorème de Fubini-Tonelli qui nous dit que, puisque $u_{m,n} = |\langle Te_n, f_m\rangle|^2$ est *positive*, on peut écrire sans aucune précaution

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} u_{m,n}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n}\right). \qquad (VII.33)$$

Le membre de gauche de $(VII.33)$ vaut $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2$, par Parseval (P 5.11(iii)) pour la base orthonormée (f_m). D'autre part, puisque T est continu, il possède un adjoint, et l'on a aussi $u_{m,n} = |\langle e_n, T^* f_m\rangle|^2$. Dès lors, par Parseval pour la base orthonormée (e_n), on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle T^* f_m, e_n\rangle|^2 = \|T^* f_m\|^2,$$

et le membre de droite de $(VII.33)$ vaut $\sum_{m=1}^{\infty} \|T^* f_m\|^2$. $(VII.33)$ implique donc, pour tout couple de bases orthonormées $(e_n), (f_m)$ de H et tout $T \in \mathcal{L}(H)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|T^* f_m\|^2. \qquad (VII.34)$$

En faisant $(e_n) = (f_m)$, on trouve en particulier $\sum_{n=1}^{\infty} \|Tf_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|T^* f_m\|^2$. En reportant dans $(VII.34)$, on obtient la relation souhaitée

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Tf_n\|^2.$$

Remarque VII.3 : La condition imposée en (2) est plus restreinte que celle de (1) : $\sum_{n=1}^{+\infty} \|Te_n\|^2 < \infty \Rightarrow \lim_n \|Te_n\| = 0$. Les opérateurs de Hilbert-Schmidt rencontrés en (2) forment donc une partie seulement des opérateurs compacts sur H.

Remarque VII.4 : On notera la différence des conditions imposées en (1) et (2) ou (3). En (1) la condition trouvée est valable pour toute suite orthonormale, en (2) et (3) la condition intervient a priori sur une base orthonormale choisie, mais on démontre a posteriori qu'elle vaut sur **toute** base orthonormale. En ce qui concerne (2), on pourra voir aussi le chapitre suivant.

Exercice VII.20

(1) Un opérateur normal (D 6.3) T vérifie $\|T^*u\| = \|Tu\|$ pour tout $u \in H$. On écrit donc ici, avec $u = Tx$ et en utilisant Cauchy-Schwarz :

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leq \|T^*Tx\|\,\|x\| = \|T^2x\|\,\|x\|.$$

(2) (i) ***T*^{2} compact et *T* normal ⇒ *T* compact.**
Soit (x_n) une suite de la boule unité M de H. Utilisons (1) pour montrer que

$$(T^2x_n) \text{ de Cauchy} \Longrightarrow (Tx_n) \text{ de Cauchy}.$$

En effet, il résulte de (1) que

$$\|Tx_p - Tx_q\|^2 \leq \|T^2x_p - T^2x_q\|\,\|x_p - x_q\| \leq 2\|T^2x_p - T^2x_q\|,$$

ce qui donne le résultat. Soit alors (y_n) une suite quelconque de M. Puisque T^2 est compact, elle contient une sous-suite (x_n) telle que la suite (T^2x_n) soit convergente, donc de Cauchy. Alors, la suite (Tx_n) est de Cauchy, donc convergente, ce qui montre que T est compact.

(ii) ***T*^{d} compact et *T* normal ⇒ *T* compact.**
Changeons x en $T^{d-2}x$ dans (1). Il vient $\|T^{d-1}x\|^2 \leq \|T^dx\|\,\|T^{d-2}x\|$, d'où il résulte comme en (2) que T^{d-1} est compact. De proche en proche, $T^{d-2}, \ldots, T^2, T$ sont compacts.

Remarque : Pour la preuve , on a seulement utilisé le caractère *hyponormal* de T, i.e. le fait qu'il vérifie l'inégalité

$$\|T^*u\| \leq \|Tu\| \text{ pour tout } u \in H,$$

de façon équivalente $T^*T - TT^* \geq 0$. La preuve et la conclusion de l'exercice valent donc également pour un opérateur hyponormal. En dimension finie, les deux notions (normal-hyponormal) coïncident, via le fait que

$$T^*T - TT^* \geq 0 \text{ et } \mathrm{Tr}\,(T^*T - TT^*) = 0 \Longrightarrow T^*T - TT^* = 0.$$

Elles coïncident aussi (*cf.* Halmos) si T est compact.

Exercice VII.21

On va donner une présentation globale de (1) et (2). L'opérateur T est normal compact, donc « diagonalisable en base orthonormale », c'est-à-dire que (P 7.16) :

Si $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est la suite des valeurs propres distinctes non-nulles de T, si $E_0 = \ker T$ et si $E_n = \ker(T - \lambda_n I)$, alors $H = E_0 \oplus (\oplus_{n=1}^{\infty} E_n)$ est somme directe orthogonale de E_0 et des E_n, i.e. tout vecteur $x \in H$ s'écrit comme une série convergente de vecteurs orthogonaux

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \text{ avec } x_n \in E_n \text{ si } n \in \mathbb{N} \text{ et } \langle x_p, x_q \rangle = 0 \text{ si } p \neq q.$$

De plus :

$$x \in E_0 \Longrightarrow Tx = 0\,;\, x \in E_n \text{ et } n \geq 1 \Longrightarrow Tx = \lambda_n x \text{ et } \dim E_n < \infty.$$

D'autre part (puisque $\ker(T - \lambda I) = \ker(T^* - \overline{\lambda} I)$ pour un opérateur normal) :

$$x \in E_0 \Longrightarrow T^* x = 0\,;\, x \in E_n \text{ et } n \geq 1 \Longrightarrow T^* x = \overline{\lambda_n} x.$$

Une fois qu'on a cette décomposition orthogonale « réduisante » (i.e. les E_n sont stables à la fois par T et T^*, *cf.* D 4.11, D 6.10), on lit facilement l'action de T et T^*, ainsi que leur positivité. On a en effet :

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \Longrightarrow Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \text{ et } T^* x = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda_n} x_n,$$

$$\text{ainsi que } \langle Tx, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|x_n\|^2.$$

Donc, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in H$ étant arbitraires, on voit que

$$\sigma(T) \subset \mathbb{R} \Longrightarrow \overline{\lambda_n} = \lambda_n \Longrightarrow T^* x = Tx \Longrightarrow T^* = T.$$

$$\sigma(T) \subset \mathbb{R}^+ \Longrightarrow \lambda_n \geq 0 \Longrightarrow \langle Tx, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|x_n\|^2 \geq 0 \Longrightarrow T \geq 0.$$

Exercice VII.22

(1) Un exemple est fourni par l'Ex. IV.5 (2). Soit $E = \ell^2$ et si $n \in \mathbb{N}^*$, e_n la suite dont le terme de rang n vaut 1 et les autres sont nuls. L'opérateur S est donné par : $Se_n = e_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit T « défini » comme suit : $Te_{n+1} = e_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*, Te_1 = 0$. On a $TS = I$ et $ST(e_1) = 0$ donc $ST \neq I$ (en réalité, $T = S^*$).

On sait que dans le cas particulier où $E = F$ est de dimension finie, les deux égalités $ST = I$ et $TS = I$ sont équivalentes. Ceci est un conséquence de l'équivalence des caractères surjectif et injectif pour un élément de $\mathcal{L}(E)$.

(2) (i) **Si $AB = I$.**

Notons $I - A = K$. $\mathrm{Im}(A) \supseteq \mathrm{Im}(AB) = E$ donc $I - K$ est surjectif. Alors, par (P 7.14), $A = I - K$ est injectif donc inversible. Son inverse à droite B est aussi son inverse à gauche et $BA = I$.

(ii) **Si $CA = I$.**

$A = I - K$ est injectif donc surjectif, par (P 6.14). Il est inversible et $AC = I$.

Exercice VII.23

(1) C'est une conséquence évidente de la définition de Lip_α : on a

$$f \in M \text{ et } (x, y) \in J \Longrightarrow |L_{x,y}(f)| \leq p_\alpha(f) < \infty.$$

(2) Puisque M est fermé dans E, c'est un espace de Banach, et on peut appliquer le théorème de la borne uniforme de Banach-Steinhaus (P 2.13) à la famille $(L_{x,y})_{(x,y)\in J}$ de formes linéaires continues sur M. D'après (1), on a donc

$$\sup_{(x,y)\in J} \left(\sup_{f\in M, \|f\|_\infty \leq 1} |L_{x,y}(f)| \right) \stackrel{def}{=} C < \infty.$$

En décodant tranquillement ces symboles, cela veut simplement dire que

$$f \in M,\ \|f\|_\infty \leq 1 \text{ et } (x, y) \in J \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

Notons que cette inégalité a trivialement lieu si $x = y$. On en déduit l'inégalité de l'énoncé par homogénéité de la norme.

(3) (i) On sait reconnaître un ensemble relativement compact dans E par l'usage du théorème d'Ascoli (P 2.3). Montrons donc que pour B les hypothèses de ce théorème sont satisfaites. D'abord, B est équicontinue, car d'après (2) :

$$\text{Pour toute } f \in B,\ \text{pour tous } x, y \in [-1, 1], |\ f(x) - f(y)\ | \leq C|x - y|^\alpha.$$

Ensuite, par définition

$$f \in B \Longrightarrow \text{ pour tout } x \in [-1, 1], |f(x)| \leq 1.$$

La seconde condition du théorème d'Ascoli est donc vérifiée, et B est relativement compacte dans E. Comme elle est fermée, elle est compacte.

(ii) La boule unité de M est compacte. D'après (P 7.15) (théorème de F. Riesz), M doit être de dimension finie.

(4) (i) Soit $f \in M$. Posons $a = \|f\|_\infty$ et $b = \sup_{0\leq k\leq N, k\in\mathbb{N}} |f(\frac{k}{N})|$. Soit $x \in I$. Il est clair qu'il existe un entier $0 \leq k \leq N$ tel que l'on ait $|x - \frac{k}{N}| \leq \frac{1}{2N}$ *(Un dessin peut aider)*. On voit alors que

$$|f(x)| \leq |f(x) - f\left(\frac{k}{N}\right)| + |f\left(\frac{k}{N}\right)| \leq aC|x - \frac{k}{N}|^\alpha + b \leq aC\left(\frac{1}{2N}\right)^\alpha + b = a\delta + b,$$

d'où en passant au sup sur $x \in I : a \leq a\delta + b$, soit $a \leq \frac{b}{1-\delta}$, ce qui est exactement l'inégalité souhaitée.

(ii) Soit $T : M \to \mathbb{C}^{N+1}$ l'application linéaire définie par

$$T(f) = \left(f\left(\frac{k}{N}\right)\right)_{0 \leq k \leq N}.$$

L'inégalité qu'on vient d'établir montre que

$$T(f) = 0 \Longrightarrow f\left(\frac{k}{N}\right) = 0 \text{ si } 0 \leq k \leq N \Longrightarrow \|f\|_\infty \leq \frac{1}{1-\delta} \times 0 = 0 \Longrightarrow f = 0.$$

Ceci montre que T est injective. Il en résulte l'inégalité entre dimensions $\dim M \leq \dim \mathbb{C}^{N+1} = N + 1$. Cela achève la démonstration.

Exercice VII.24

(1) On va utiliser la notation du cours (*cf.* D 7.4) $(a \otimes b)(x) = \langle x, b\rangle a$ pour désigner l'opérateur de rang un associé à $a, b \in H$. Soit D une partie dénombrable dense de H. Soit ensuite $\varDelta$ la partie de $\mathcal{K}_0(H)$ constituée des sommes finies

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \otimes b_j, \text{ avec } a_j, b_j \in D.$$

On voit que $\varDelta$ est dénombrable. De plus, elle est dense dans $\mathcal{K}_0(H)$. En effet, tout élément $T \in \mathcal{K}_0(H)$ s'écrit $T = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j$ avec $x_j, y_j \in H$ et en approchant les x_j, y_j par des éléments $a_j, b_j \in D$, on approche T par

$$S = \sum_{j=1}^{n} a_j \otimes b_j \in \varDelta.$$

(2) C'est évident. $\varDelta$ est dense dans $\mathcal{K}_0(H)$, lui-même dense dans $\mathcal{K}(H)$ comme on le sait (P 7.12), donc $\varDelta$ est dense dans $\mathcal{K}(H)$.

(3) (i). On procède par récurrence. On part d'un vecteur normé v_1 perpendiculaire à $A_1 e_1$. Supposons construits $v_1, \ldots, v_n$ vérifiant ($VII.4$). Soit $V_n = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n, A_{n+1}e_{n+1})$. On a $V_n \neq H$ car $\dim H = \infty$. On peut donc trouver un vecteur normé $v_{n+1} \in V_n^\perp$ et les vecteurs $v_1, \ldots, v_{n+1}$ vérifient ($VII.4$) à l'étape $n + 1$.

(ii) Il existe $T \in \mathcal{L}(H)$, isométrique, tel que

$$Te_n = v_n \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Il suffit en effet de définir T par la relation

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n v_n \text{ si } x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in H.$$

Cela a un sens, car la série $\sum x_n v_n$ est convergente dans H, ses sommes partielles formant une suite de Cauchy grâce à l'orthonormalité des v_n :

$$\|\sum_{n=p+1}^{q} x_n v_n\|^2 = \sum_{n=p+1}^{q} |x_n|^2 \to 0 \text{ quand } p, q \to \infty.$$

De plus, $\|Tx\| = \|x\|$ pour tout x, d'après la relation de Parseval pour les e_n et pour les v_n. Et l'opérateur T répond à la question, puisqu'en utilisant l'orthogonalité de v_n et $A_n e_n$, on a :

$$\|T - A_n\| \geq \|Te_n - A_n e_n\| = \|v_n - A_n e_n\| = (\|v_n\|^2 + \|A_n e_n\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (1 + \|A_n e_n\|^2)^{\frac{1}{2}} \geq 1.$$

On notera le caractère « théorie des jeux » de cette construction : la suite (A_n) étant donnée, on répond en fabriquant un opérateur T qui est loin de tous les A_n à la fois.

(4) (i). Les sommes $A_n + K_m$ forment un ensemble dénombrable qu'on peut organiser en une seule suite (B_j). Par exemple, si $h : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ est une bijection et si $h(j) = (n_j, m_j)$, on peut prendre $B_j = A_{n_j} + K_{m_j}$. D'après la question (3) appliquée à la suite (B_j), on peut trouver $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|T - B_j\| \geq 1$ pour tout $j \geq 1$. L'opérateur T répond à la question.

(ii). Soit $K \in \mathcal{K}(H)$ et n un entier ≥ 1. Il existe une suite d'entiers (μ_l) de limite infinie telle que K_{μ_l} tende vers K quand $l \to \infty$. Mais on a d'après (4)(i) :

$$\|T - A_n - K_{\mu_l}\| \geq 1.$$

Le passage à la limite dans cette inégalité, quand $l \to \infty$, donne

$$\|T - A_n - K\| \geq 1.$$

Notons que la non-séparabilité de l'algèbre de Calkin $C(H)$ reste valable si H n'est plus séparable, en utilisant ce qui précède pour un sous-espace séparable H_0 de H de dimension infinie, et la projection orthogonale de H sur H_0.

Exercice VII.25

(1) Par (P 7.1) et (P 7.4), T est un opérateur compact auto-adjoint.

Si $Tf = \lambda f$ pour un $\lambda \neq 0$, alors $f \in \operatorname{Im}(T)$.

$$\text{Pour tous } f \in H, x \in [0,1], (Tf)(x) = x\int_0^x (t+1)f(t)dt + (x+1)\int_x^1 tf(t)dt,$$

donc Tf est une fonction continue. Comme tout vecteur propre f relatif à une valeur propre non nulle λ vérifie $f = \lambda^{-1}Tf$, c'est une fonction continue.

(2) Comme T est auto-adjoint, toute valeur propre est réelle. L'équation aux (valeurs propres, vecteurs propres), (λ, f), est

$$\lambda f(x) = x \int_0^x (t+1) f(t)dt + (x+1) \int_x^1 t f(t)dt. \qquad (VII.35)$$

On va en déduire, par dérivations successives, une équation différentielle en f associée à des conditions aux limites, comme on l'a déjà fait dans d'autres exercices. On obtient après simplification :

$$\begin{cases} \lambda f'(x) &= \int_0^x (t+1) f(t)dt + \int_x^1 t f(t)dt \\ \lambda f''(x) &= f(x) \\ \lambda f(0) &= \int_0^1 t f(t)dt = \lambda f'(0) \\ \lambda f(1) &= \int_0^1 (t+1) f(t)dt = \lambda f'(1) \end{cases}$$

Le système suivant est alors équivalent à $(VII.35)$.

$$\begin{cases} \lambda f''(x) &= f(x) \\ f(0) &= f'(0) \\ f(1) &= f'(1) \end{cases}$$

Deux cas sont à étudier.

(i) $\lambda = \mu^{-2}, \mu > 0$. Alors

$$\begin{cases} f(x) = A \exp(\mu x) + B \exp(-\mu x) \\ (\mu - 1)A - (\mu + 1)B = 0 \\ (\mu - 1)\exp(\mu)A - (\mu + 1)\exp(-\mu)B = 0 \end{cases}$$

Un couple $(A, B) \neq (0, 0)$ est solution si et seulement si $\mu^2 = 1$ donc $\mu = 1$. Alors $B = 0$, $f(x) = A \exp(x)$. $(1, \mathrm{Vect}(f_0))$, où $f_0(x) = \exp x$ est le seul couple solution.

(ii) $\lambda = -\mu^{-2}, \mu > 0$. Alors

$$\begin{cases} f(x) = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x) \\ \mu B - A = 0 \\ B(1 + \mu^2)\sin\mu = 0 \end{cases}$$

Un couple $(A, B) \neq (0, 0)$ est solution si et seulement si $\sin(\mu) = 0$ donc $\mu = k\pi, k \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\{(-(k\pi)^{-2}, \mathrm{Vect}(f_k), f_k(x) = k\pi \cos(k\pi x) + \sin(k\pi x), k \in \mathbb{N}^*\}$$

sont les solutions.

On a trouvé des valeurs propres négatives ; T n'est donc pas un opérateur positif, bien que son noyau K soit une fonction positive.

(3) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$ est, à un facteur scalaire près, la somme des carrés des valeurs propres de T. On peut donc l'expliciter en appliquant (P 8.5), $\|K\|_2^2$ est la somme des carrés des valeurs propres de T ; donc

$$1 + \pi^{-4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \int_0^1 t^2 \left(\int_0^t (x+1)^2 dx \right) dt + \int_0^1 x^2 \left(\int_0^x (t+1)^2 dt \right) dx$$
$$= \frac{2}{3} \int_0^1 t^2 (t^3 + 3t^2 + 3t) dt = \frac{91}{90}.$$

On obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Remarque : On peut comparer ce dernier résultat à celui de l'Ex. VIII.2 obtenu à partir d'un autre opérateur intégral.

Exercice VII.26

(1) (i) Posons $h = (\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - f_n\|^2)^{\frac{1}{2}}$. Soit $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in H$, avec $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|^2 < \infty$. Alors, la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n$ converge dans H, comme somme de la série convergente $\sum x_n e_n$ et de la série absolument convergente $\sum x_n(f_n - e_n)$. On a en effet par Cauchy-Schwarz (P 5.4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \|f_n - e_n\| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - f_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = h\|x\|.$$

On peut alors poser $Ux = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n$, et ce qui précède nous donne

$$\|Ux\| \leq \|x\| + h\|x\| = (1+h)\|x\|, \text{ et } Ue_n = f_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Ceci montre que $U \in \mathcal{L}(H)$ et $\|U\| \leq 1 + h$. L'opérateur U répond à la question.

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j e_j \in H$. On voit que

$$\langle U^* f_n, y \rangle = \langle f_n, Uy \rangle = \left\langle f_n, \sum_{j=1}^{\infty} y_j f_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{y_j} \langle f_n, f_j \rangle = \overline{y_n} = \langle e_n, y \rangle,$$

d'où $U^* f_n = e_n$ par identification. Et si $x \in G = F^{\perp}$, on a cette fois, en notant que $U(H) \subset F$ par construction :

$$\langle U^* x, y \rangle = \langle x, Uy \rangle = 0 = \langle 0, y \rangle,$$

d'où $U^* x = 0$ par identification.

(2) On a par construction $Te_n = f_n - e_n$, donc le fait que T est Hilbert-Schmidt n'est rien d'autre que l'hypothèse sur les f_n. Et on a $\|T\|_2 = h$.

(3) Supposons $G \neq \{0\}$. Soit alors x un vecteur normé de G. Le système constitué par x et les f_n est orthonormé, on peut donc le compléter en une base orthonormée (g_n) de H. Et d'après les propriétés de la norme Hilbert-Schmidt établies dans l'Ex. VII.19, on a puisque $T^* = U^* - I$:

$$\begin{aligned} h^2 = \|T\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \|T^* g_n\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \|T^* f_n\|^2 + \|T^* x\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \|U^* f_n - f_n\|^2 + \|U^* x - x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - f_n\|^2 + \|x\|^2 = h^2 + 1, \end{aligned}$$

autrement dit $h^2 \geq h^2 + 1$, ce qui est absurde. Par conséquent, $G = \{0\}$, ce qui veut exactement dire que (f_n) est une base orthonormée de H.

Exercice VII.27

(1) On observe que

$$\langle S^* T S e_j, e_i \rangle = \langle T S e_j, S e_i \rangle = \langle T e_{j+1}, e_{i+1} \rangle = t_{i+1,j+1}$$

et que, si $A, B \in \mathcal{L}(H)$, alors

$$A = B \Longleftrightarrow \langle A e_j, e_i \rangle = \langle B e_j, e_i \rangle \quad \forall i, j.$$

L'équivalence demandée découle immédiatement de ces deux observations.

(2) On sait que, si $x = \sum_{j=0}^{\infty} x_j e_j \in H$, on a

$$\|S^{*n} x\|^2 = \|\sum_{j=n}^{\infty} x_j e_{j-n}\|^2 = \sum_{j=n}^{\infty} |x_j|^2 \to 0.$$

Autrement dit, la suite de fonctions (S^{*n}) converge simplement vers zéro. Comme d'autre part $\|S^{*n}\| = 1$, cette suite de fonctions (S^{*n}) est équicontinue, donc uniformément convergente vers zéro sur tout compact de H, *d'après le théorème d'Ascoli* (P 2.3). Si maintenant $K \in \mathcal{L}(H)$ est compact, et si B est la boule unité fermée de H, $X = \overline{K(B)}$ $(=K(B))$ est compact dans H, et donc

$$\|S^{*n} K\| = \sup_{x \in X} |S^{*n}(x)| \to 0.$$

Comme d'autre part

$$\|S^{*n} K S^n\| \leq \|S^{*n} K\| \|S^n\| = \|S^{*n} K\|,$$

on a les résultats demandés.

(3) **2 $\Longrightarrow$ 1 :**

Si $T = A + K$, on a

$$S^{*n} T S^n = S^{*n} A S^n + S^{*n} K S^n = A + S^{*n} K S^n \to A + 0 = A$$

en norme-opérateur, d'après la question précédente.

$1 \Longrightarrow 2$:

Soit $A = \lim_{n\to\infty} S^{*n}TS^n$. Alors, $S^*AS = \lim_{n\to\infty} S^{*n+1}TS^{n+1} = A$, et l'opérateur A est Toeplitz. Reste à montrer que $T - A \overset{def}{=} K$ est compact. Soit pour cela Q_n la projection orthogonale sur l'espace vectoriel fermé engendré par les e_j, $j \geq n$. On observe que

$$Q_n = S^n S^{*n}. \qquad (VII.36)$$

En effet, on voit que

1. $j \geq n \Longrightarrow S^n S^{*n}(e_j) = S^n(e_{j-n}) = e_{j-n+n} = e_j$;
2. $j < n \Longrightarrow S^n S^{*n}(e_j) = S^n(0) = 0$.

Il s'ensuit que

$$\lim_{n\to\infty} \|Q_n K Q_n\| = 0. \qquad (VII.37)$$

En effet, on peut écrire via $(VII.36)$:

$$\|Q_n K Q_n\| = \|S^n S^{*n} K S^n S^{*n}\| = \|S^{*n} K S^n S^{*n}\| \leq \|S^{*n} K S^n\|$$

$$= \|S^{*n}TS^n - S^{*n}AS^n = \|S^{*n}TS^n - A\| \to 0.$$

Notant $P_n = I - Q_n$ la projection complémentaire de Q_n, qui est d'image $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$ et de rang $n - 1$, on a donc d'après $(VII.37)$:

$$\|(I - P_n)K(I - P_n)\| = \|K - (P_n K + K P_n - P_n K P_n)\| \overset{def}{=} \|K - R_n\| \to 0,$$

ce qui montre que K est limite en norme-opérateur de la suite d'opérateurs de rang fini R_n, et par suite est compact (P 7.12), comme annoncé.

OPÉRATEURS INTÉGRAUX VIII

1 ÉNONCÉS

Exercice VIII.1

Le but de l'exercice est entre autres de retrouver les deux propriétés (P 8.1) et (P 8.2) ; on ne suppose donc pas connus les résultats du chapitre 8.

Soit $H = L^2([0,1], dx)$ et $K \in L^2([0,1]\times[0,1], dxdt)$. Soit T l'opérateur « défini » par

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t)dt. \qquad (VIII.1)$$

(1) Montrer que T est un élément de $\mathcal{L}(H)$.

(2) On suppose que K est de la forme

$$K(x,t) = \sum_{j=1}^{N} a_j(x)b_j(t) \qquad (VIII.2)$$

où $a_j, b_j \in H$ et $N \in \mathbb{N}$. Montrer que T est un opérateur borné de rang fini.

(3) On note, pour $n, p, q \in \mathbb{Z}$, $e_n(t) = \exp(2i\pi nt)$ et $e_{p,q}(x,t) = e_p(x)e_q(t)$. Utiliser par exemple ces fonctions pour établir que T est un opérateur compact.

(4) Quel est l'adjoint T^* de T ?

Exercice VIII.2

Soit $H = L^2([0,1], dx)$ et $T \in \mathcal{L}(H)$ défini, pour $f \in H$ et $x \in [0,1]$, par

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t)dt,$$

où le noyau K (*covariance du pont brownien*) est défini par :

$$K(x,t) = \begin{cases} x(1-t) & \text{si } 0 \le x \le t \le 1 \\ t(1-x) & \text{si } 0 \le t \le x \le 1 \end{cases}$$

(1) Montrer que l'image de T, $\operatorname{Im}(T)$, est incluse dans l'ensemble des fonctions continues sur [0, 1].

(2) Déterminer le spectre de T et les fonctions propres de T.

(3) En déduire la norme de T.

(4) Établir, pour $0 \leq x, t \leq 1$, la formule

$$\frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x)\sin(n\pi t)}{n^2} = K(x, t) = \min(x, t) - xt.$$

(5) Calculer $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$ (*cf.* P 8.6 et P 8.7).

Exercice VIII.3

H est l'espace de Hilbert complexe $L^2([-\pi, +\pi], dx)$. Un opérateur A est défini sur H par

$$\forall f \in H, Af = g \text{ avec } g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(xy) f(y) dy.$$

(1) Montrer que A est un opérateur compact auto-adjoint.

(2) Exprimer A comme limite d'une suite d'opérateurs de Hilbert-Schmidt auto-adjoints de rang fini (P 8.3).

Exercice VIII.4

Soit $H = L^2([0, \pi], dx)$ et G le sous-espace préhilbertien de H formé des fonctions indéfiniment dérivables sur $[0, \pi]$ telles que $f^{(n)}(0) = f^{(n)}(\pi) = 0$ si n est pair.

(1) Montrer que $\{f_n \,; f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), n \in \mathbb{N}^*\}$ est une base orthonormale de H. (**Indication :** Prolonger une fonction de H en une fonction impaire de $F = L^2([-\pi, +\pi], dx)$).

(2) On considère l'application $B : \{G \to G, f \mapsto g, g(x) = f''(x)\}$. Quels sont les couples (valeur propre, espace propre) de B ?

(3) Montrer que B est une application linéaire inversible de G dans $\operatorname{Im}(B)$. Soit A_0 son inverse ; montrer que A_0 est prolongeable en un élément A de $\mathcal{K}(H)$, et donner une expression de A comme opérateur intégral.

Exercice VIII.5

Soit $H = L^2([0, 1], dx)$ muni de la norme hilbertienne notée $\| \|_2$ et du produit scalaire associé.

Soit $K \in C([0,1]\times[0,1])$ « hermitien », i.e. $K(x,y) = \overline{K(y,x)}\ \forall x, y \in [0,1]$, et vérifiant de plus la condition *de Bochner*

$$\sum_{1\le i,j\le n} K(x_i, x_j) z_i \overline{z_j} \ge 0\ \forall x_1, \ldots, x_n \in [0,1],\ \forall z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}.$$

Soit $T : H \to H$ l'opérateur de noyau K défini par

$$\forall f \in H, (Tf)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy.$$

On sait déjà d'après le cours que T est auto-adjoint (*cf.* (P 8.1) et (P 8.2)).

(1) Montrer plus précisément que $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur *positif*, c'est-à-dire :

$$\langle Tf, f\rangle \ge 0\ \forall f \in H.$$

(On pourra écrire $\langle Tf, f\rangle$ comme une intégrale double, qu'on approchera ensuite par des sommes de Riemann).

(2) Montrer que $K(x,y) = e^{-|x-y|}$ satisfait les conditions de la question (1).

Exercice VIII.6

Soit $H = L^2([0,1], dx)$ et $T : H \to H$ l'opérateur à noyau défini par

$$\forall f \in H, (Tf)(x) = \int_0^1 e^{-|x-y|} f(y) dy. \qquad (VIII.3)$$

(1) On sait d'après l'Ex. VIII.5 que $T \in \mathcal{L}(H)$, et même que T est auto-adjoint positif. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de T.

(2) En déduire la valeur de $\sum_{n\ge1}(\frac{1}{1+\mu_n^2})^2$ où les μ_n sont les solutions positives de l'équation $\cot\mu = \frac{1}{2}(\mu - \frac{1}{\mu})$ (cot est la cotangente).

Exercice VIII.7

Soit $H = L^2([0,1], dx)$ et l'opérateur T défini sur H par

$$\forall f \in H, (Tf)(x) = \int_0^1 K(x,t) f(t) dt \qquad (VIII.4)$$

$$K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\text{sh(x) sh (1-t)}}{\text{sh1}} & \text{si } 0 \le x \le t \le 1 \\[2ex] \dfrac{\text{sh(t) sh (1-x)}}{\text{sh1}} & \text{si } 0 \le t \le x \le 1 \end{cases} \qquad (VIII.5)$$

(1) Montrer que $T \in \mathcal{K}(H)$ et déterminer les valeurs propres et espaces propres de T.

(2) Quelle est la norme de T ?

(3) En déduire la valeur de $\sum_{n\ge0} \frac{1}{1+\pi^2 n^2}$.

Exercice VIII.8

Soit H l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, dx)$, dont on note $\| \ \|_2$ la norme, et A l'application donnée sur H par

$$\forall f \in H, (Af)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} f(y)dy. \qquad (VIII.6)$$

(1) (i) Montrer que

$$\forall f, g \in H, \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-|x-y|} |f(y)g(x)| dxdy \leq 2\|f\|_2 \ \|h\|_2,$$

puis que

$$\forall f, g \in H, \left| \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-|x-y|} f(y)\overline{g(x)} |dxdy \right| \leq 2\|f\|_2 \ \|h\|_2. \qquad (VIII.7)$$

(ii) Si J est un segment de $\mathbb{R}$, on note $(Af)_J$ la restriction de Af à J. En prenant $g = (Af)_J$ dans $(VIII.7)$, montrer que $Af \in H$.

(iii) Montrer que $A \in \mathcal{L}(H)$ (D 2.5).

(2) En utilisant par exemple la suite des fonctions f_n définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

montrer que $\|A\| = 2$.

(3) En utilisant par exemple la suite des fonctions g_n définies par

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [n, n+1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

montrer que A n'est pas un opérateur compact.

Exercice VIII.9

On munit l'espace de Hilbert $H = L^2([-\pi, +\pi], \frac{dx}{2\pi})$ de la base orthonormale $(e_n, n \in \mathbb{N}^*)$ donnée par

$$e_1(x) = 1, e_{2n}(x) = \sqrt{2}\cos(nx), e_{2n+1}(x) = \sqrt{2}\sin(nx).$$

Un opérateur linéaire A est donné par

$$Ae_1 = e_1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* : Ae_{2n} = \frac{1}{n} e_{2n+1} \text{ et } Ae_{2n+1} = \frac{1}{n} e_{2n}. \qquad (VIII.8)$$

(1) Montrer que $(VIII.8)$ définit un élément auto-adjoint de $\mathcal{L}(H)$.

(2) Montrer que A est un opérateur intégral de Hilbert-Schmidt et expliciter son noyau K sous forme de série (*cf.* P 8.9).

(3) Résoudre dans H l'équation en h, $Ah - 2h = g$ où $g(x) = \cos x$.

Exercice VIII.10 : Équation de Daugavet

Soit $J = [0, 1]$, E l'espace des fonctions complexes continues sur J avec la norme-sup, I l'identité de E, $x_0 \in J$ et $g \in E$. On pose $\|g\|_1 = \int_J |g(t)|dt$.

(1) On a vu dans l'Ex. III.3 (auquel on renvoie) que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists f \in E \text{ telle que } \|f\|_\infty \leq 1 \text{ et } \Re\left(\int_J fg\right) \geq \|g\|_1 - \varepsilon.$$

Comment modifier le choix de f pour obtenir le renforcement

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \varphi \in E \text{ telle que } \|\varphi\|_\infty \leq 1, \Re\left(\int_J \varphi g\right) \geq \|g\|_1 - \varepsilon \text{ et } \varphi(x_0) = 1?$$

(2) Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur intégral (donc compact) associé à un noyau continu $K \in C(J^2)$. On a calculé la norme de T dans l'Ex. VII.8. En s'inspirant de cela et de la question (1), montrer *l'équation de Daugavet*

$$\|I + T\| = 1 + \|T\|. \tag{DE}$$

(3) En réfléchissant à la modification de (2), montrer que l'équation de Daugavet (DE) reste vraie *pour tout opérateur compact* $T : E \to E$.

(4) Soit maintenant E=ℓ^1. Montrer qu'il existe des opérateurs $T \in \mathcal{L}(E)$ de rang un, donc compacts, tels que

$$\|I + T\| < 1 + \|T\|.$$

2 SOLUTIONS

Exercice VIII.1

(1) (i) $\boldsymbol{Tf \in H}$.

Posons $I = [0,1]$ et $F(x) = \int_0^1 |K(x,t)||f(t)|dt \leq +\infty$. Ce nombre est toujours défini, éventuellement égal à $+\infty$, car la fonction qu'on intègre est *positive*. L'inégalité de Schwarz appliquée à $F(x)$ donne :

$$F^2(x) \leq \|f\|_2^2 \int_0^1 |K(x,t)|^2 dt \tag{VIII.9}$$

soit en réintégrant par rapport à x et en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli pour les intégrales doubles de fonctions *positives :*

$$\int_0^1 F^2(x)dx \leq \|f\|_2^2 \int_0^1 \int_0^1 |K(x,t)|^2 dtdx = \|f\|_2^2 \|K\|_2^2 < \infty.$$

Ceci implique $F(x) < \infty$ pour $x \in E$, où $E \subset [0,1]$ est mesurable et $m(E) = 1, m$ désignant la mesure de Lebesgue sur I. Et pour $x \in E$, l'intégrale $Tf(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t)dt$ est bien définie car elle est *absolument convergente*. En posant $Tf(x) = 0$ si $x \notin E$, on obtient une fonction Tf mesurable. De plus, on a $|Tf(x)| \leq F(x)\ \forall x \in I$, ce qui implique $Tf \in H$ et

$$\|Tf\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \|K\|_2^2. \tag{VIII.10}$$

Rappelons le sens de la notation $\|K\|_2^2$:

$$\|K\|_2^2 = \iint_{[0,1]^2} |K(x,t)|^2 dtdx. \tag{VIII.11}$$

(ii) $\boldsymbol{T \in \mathcal{L}(H)}$.

C'est écrit dans l'inégalité ($VIII$.10). On reconnaît en effet la continuité de T à l'existence d'une constante h telle que $\|Tf\|_2 \leq h\|f\|_2$ pour toute $f \in H$ (P 2.5), et h est un majorant de $\|T\|$. On a donc ici

$$\|T\| \leq \|K\|_2. \tag{VIII.12}$$

(2) Dans l'écriture de ($VIII$.1), on remplace K par l'expression donnée en ($VIII$.2), ce qui donne :

$$(Tf)(x) = \int_0^1 \sum_{j=1}^N a_j(x)b_j(t)f(t)dt = \sum_{j=1}^N a_j(x) \int_0^1 b_j(t)f(t)dt. \tag{VIII.13}$$

L'intégrale est à valeur dans $\mathbb{C}$. On obtient donc

$$Tf \in \text{ Vect } (a_j, j = 1, \ldots, N). \tag{VIII.14}$$

Par ($VIII$.1), T est un opérateur borné ; par ($VIII$.14), il est de rang $\leq N$.

(3) H est un espace de Hilbert, il revient donc au même d'établir que T s'approche en norme-opérateur par des opérateurs continus de rang fini (P 7.12).

Soit $(e_j)_{j\geq 1}$ une base orthonormale du Hilbert séparable H, qu'on pourrait expliciter avec les fonctions de l'énoncé. Alors, l'espace $L^2([0,1]\times[0,1], dxdt)$ admet pour base orthonormale les $(g_{p,q}, p, q \geq 1)$ définis par $g_{p,q}(x,t) = e_p(x)e_q(t)$. Dans cette base $K = \sum_{p,q\geq 1} k_{p,q}g_{p,q}$, la série étant inconditionnellement convergente et les $k_{p,q}$ étant des scalaires.

$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que, en posant $K_N = \sum_{1\leq p\leq N, 1\leq q\leq N} k_{p,q}g_{p,q}$, on ait $\| K - K_N \|_2 \leq \varepsilon$.

L'opérateur intégral T_N obtenu en remplaçant K par K_N est borné de rang fini, d'après $(VIII.7)$; on a $\mathrm{Im}\,(T_N) \subset \mathrm{Vect}\,(e_n\,;1 \leq n \leq N)$.

L'inégalité $(VIII.12)$ pour $T - T_N$ montre que $\|T - T_N\| \leq \|K - K_N\|_2 \leq \varepsilon$. T est donc compact.

(4) On détaille, dans un cas plus général, un résultat signalé sans preuve dans l'Ex. VII.2. Si $T = T_K$ est l'opérateur associé au noyau K, alors T_K^* est associé au noyau $K^* = L$ défini par $L(x,t) = \overline{K(t,x)}$. Soit en effet $f, g \in H$. L'intégrale double $I = \iint_{[0,1]^2} |K(x,t)||f(t)||g(x)|dxdt$ est convergente par l'inégalité de Schwarz (P 5.4) :

$$I^2 \leq \iint_{[0,1]^2} |K(x,t)|^2 dxdt \iint_{[0,1]^2} |f(t)|^2|g(x)|^2 dxdt = \|K\|_2^2\|f\|_2^2\|g\|_2^2.$$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini à l'intégrale double

$$\iint_{[0,1]^2} K(x,t)f(t)\overline{g(x)}dxdt$$

pour obtenir (attention au nom des variables) :

$$\begin{aligned}\langle f, T_L g\rangle &= \int_0^1 f(t)\overline{T_L g(t)}dt = \int_0^1 f(t)\left[\int_0^1 K(x,t)\overline{g(x)}dx\right]dt \\ &= \int_0^1 \overline{g(x)}\left[\int_0^1 K(x,t)f(t)dt\right]dx = \langle T_K f, g\rangle = \langle f, T_K^* g\rangle. \qquad (VIII.15)\end{aligned}$$

Par identification, on a bien $T_K^* = T_L$ comme annoncé, soit encore

$$(T^* f)(x) = \int_0^1 \overline{K(t,x)}f(t)dt,$$

ce qui montre que T^* est un opérateur intégral de même nature que T, où K est remplacé par K^*, $K^*(x,t) = \overline{K(t,x)}$ (*cf.* P 8.2).

Remarque : On pourra comparer les résultats de (2) à ceux des exercices (Ex. VII.1) et (Ex. VII.2).

Exercice VIII.2

(1) La première question est valable pour toute fonction K continue, donc uniformément continue, sur le compact $[0, 1] \times [0, 1]$. Soit donc $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0, 1], |x - y| \leq \delta \text{ implique } |K(x, t) - K(y, t)| \leq \varepsilon.$$

Par majoration sous le signe $\int$ et par l'inégalité de Schwarz, on a alors

$$|(Tf)(x) - (Tf)(y)| \leq \sup_{t\in[0,1]} (|K(x, t) - K(y, t)|)\|f\|_2 \leq \varepsilon\|f\|_2.$$

Ceci exprime la continuité uniforme de Tf, et même *l'équicontinuité* (D 2.2) de l'ensemble de fonctions $\{Tf\ ; \|f\|_2 \leq 1\}$.

(2) Par (P 8.2) ou l'exercice précédent, on voit que T est un opérateur compact auto-adjoint, dont le spectre et l'écriture spectrale vérifient (P 7.15) et (P 7.16). Ajoutons une précision : il existe un processus gaussien (X_t) centré (indexé par $[0, 1]$) dont $K(s, t)$ est la covariance, c'est-à-dire que, $\mathbf{E}$ désignant l'espérance mathématique, on a $K(s, t) = \mathbf{E}(X_s X_t)$. D'où, si $f \in H$, la relation

$$\begin{aligned}\langle Tf, f\rangle &= \iint_{0\leq s,t\leq 1} K(s, t)f(s)\overline{f(t)}dsdt = \iint_{0\leq s,t\leq 1} \mathbf{E}(X_s X_t)f(s)\overline{f(t)}dsdt \\ &= \mathbf{E}\left(\iint_{0\leq s,t\leq 1} X_s X_t f(s)\overline{f(t)}dsdt\right) = \mathbf{E}\left(\left|\int_0^1 X_s f(s)ds\right|^2\right) \geq 0.\end{aligned}$$

Ceci montre que T est auto-adjoint *positif*, ce que nous allons retrouver par la suite. En effet, $(Tf)(x)$ peut s'écrire

$$(Tf)(x) = (1 - x)\int_0^x tf(t)dt + x\int_x^1 (1 - t)f(t)dt \qquad (VIII.16)$$

Le second membre est une fonction continue de x. Cette remarque nous permet de remplacer l'équation donnant valeurs propres et fonctions propres par des égalités faciles à résoudre.

(i) **Valeurs propres non nulles.**

L'équation $Tf = \lambda f, \lambda \neq 0$ s'écrit

$$\lambda f(x) = (1 - x)\int_0^x tf(t)dt + x\int_x^1 (1 - t)f(t)dt. \qquad (VIII.17)$$

f est alors continue, puis dérivable. $(VIII.17)$ est équivalente à

$$\lambda f'(x) = -\int_0^x tf(t)dt + \int_x^1 (1 - t)f(t)dt \text{ et } f(0) = 0. \qquad (VIII.18)$$

On dérive une seconde fois pour ne plus avoir d'intégrale, et on ajoute comme précédemment une condition de valeur en un point obtenu à partir de $(VIII.18)$

$$\lambda f''(x) = -xf(x) - (1-x)f(x) = -f(x) \text{ et } f(0) = f(1) = 0. \qquad (VIII.19)$$

On cherche maintenant les solutions non-nulles de $(VIII.19)$, qui vont forcer un certain choix des λ, les valeurs propres non-nulles de T, qui sont réelles car T est auto-adjoint. Cette résolution est classique :

Si $\lambda = -a^{-2}, a \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = \alpha e^{ax} + \beta e^{-ax}$. Les conditions aux limites donnent $f(0) = \alpha + \beta = 0, f(1) = \alpha e^{a} + \beta e^{-a} = 0$, soit $\alpha = \beta = 0$, donc $f = 0$. Aucune valeur propre n'a la forme proposée ici.

Si $\lambda = a^{-2}, a \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = \alpha\cos(ax) + \beta\sin(ax)$. Les conditions aux limites donnent $f(0) = \alpha = 0$; on peut choisir $\beta \neq 0$ à condition d'imposer $\sin a = 0$ donc $a = n\pi$ et $\lambda = (n\pi)^{-2}, n \in \mathbb{N}^*$.

Les couples (valeur propre, vecteur propre) relatifs à une valeur propre non nulle (chaque espace propre est de dimension 1) sont donc

$$((n\pi)^{-2}, e_n, e_n(x) = \sin(n\pi x)), n \in \mathbb{N}^*. \qquad (VIII.20)$$

(ii) **0 est-il valeur propre ?**

Non, car $(VIII.19)$ donne alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

(iii) **Spectre de T.**

La propriété (P 7.15) exprime que $0 \in \sigma(T)$ et $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$; on obtient donc

$$\sigma(T) = \{(n\pi)^{-2}\ ; n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}. \qquad (VIII.21)$$

Cette positivité des valeurs propres de T auto-adjoint compact redonne la positivité de cet opérateur.

(3) Comme T est auto-adjoint compact, sa norme est égale à son rayon spectral (P 6.6), et la partie non nulle du spectre est constituée de valeurs propres. Le rayon spectral est le sup des modules des valeurs propres, d'où

$$\| T \| = \pi^{-2}. \qquad (VIII.22)$$

(4) Par (P 8.5) on sait écrire le noyau

$$K(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n g_n(x)\overline{g_n(t)}. \qquad (VIII.23)$$

Les g_n forment une base orthonormale du Hilbert engendré par les vecteurs propres relatifs aux valeurs propres non nulles, λ_n étant la valeur propre relative à g_n. La série converge au sens de la norme dans H.

Comme $\| e_n \|_2^2 = \int_0^1 (\sin(n\pi t))^2 dt = \frac{1}{2}$, on choisit $g_n = e_n \sqrt{2}$.
L'expression demandée est obtenue en remplaçant dans ($VIII.23$) les quantités λ_n, g_n par leurs valeurs. On a bien

$$\frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x)\sin(n\pi t)}{n^2} = \begin{cases} x(1-t) & \text{si } 0 \leq x \leq t \leq 1 \\ t(1-x) & \text{si } 0 \leq t \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{VIII.24}$$

(5) Si on sait (ce qui est le cas comme on l'a vu) que $T \geq 0$ au sens des opérateurs, on peut employer le théorème de Mercer (P 8.6), qui affirme que la convergence de la série de ($VIII.24$) est uniforme. Cela se voit aussi directement ici car le terme de rang n est majoré par n^{-2}.

(i) L'écriture de K dans ($VIII.23$) est celle de sa décomposition sur un système orthonormé. On a alors (via la symétrie $K(x,t) = K(t,x)$)

$$\|K\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \tag{VIII.25}$$

$$\begin{aligned} \text{soit } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \pi^4 \int_0^1 \int_0^1 |K(x,t)|^2 dx dt \\ &= 2\pi^4 \int_0^1 \left[\int_0^x t^2(1-x)^2 dt \right] dx = 2\frac{\pi^4}{3} \int_0^1 x^3(1-x)^2 dx = \frac{\pi^4}{90}. \end{aligned}$$

(ii) Le théorème de Mercer exprime aussi (P 8.7) que la « trace » de T est

$$\operatorname{tr}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \int_0^1 K(x,x) dx. \tag{VIII.26}$$

L'application de ($VIII.26$) fournit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2 \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice VIII.3

(1) A vérifie la définition (D 8.2) ; c'est un opérateur intégral de Hilbert-Schmidt (P 8.5) dont le noyau K, i.e. $K(x,y) = \sin(xy)$, est une fonction continue réelle et symétrique en (x,y). La propriété (P 8.4 (ii)) montre qu'il est compact et auto-adjoint.

(2) On cherche naturellement à approcher A par un opérateur intégral de rang fini. Soit

$$K_N(x,y) = \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \frac{x^{2j+1} y^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

le début du développement en série de $\sin(xy)$. Ce nouveau noyau est de la forme $\sum_{j=1}^{p} f_j(x)g_j(y)$ avec f_j, g_j continues sur $[-\pi, \pi]$ et $p = 2N + 1$, donc l'opérateur associé A_N est continu de rang fini, comme on l'a vu dans l'exercice 1.

La propriété (P 8.1) dit que $\|A - A_N\| \leq \|K - K_N\|_2 \leq \|K - K_N\|_\infty$, et cette dernière norme tend vers zéro, car la série du sinus converge uniformément sur tout compact. Ainsi, A est limite en norme-opérateur d'opérateurs de rang fini, et par suite il est compact. *À vrai dire, il est même Hilbert-Schmidt car* $K \in L^2([0,1] \times [0,1])$, *et mieux encore nucléaire car* $\|A - A_N\| \leq \frac{C^N}{(2N+1)!}$, *où C est une constante.*

Exercice VIII.4

(1) À une fonction f sur $[0, \pi]$ à valeurs complexes, on associe $\widetilde{f}$ impaire coïncidant avec f sur $[0, \pi]$ (il s'agit toujours d'égalités presque partout). Si $f \in L^2([0, \pi])$ alors $\widetilde{f} \in L^2([-\pi, \pi])$, car :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |\widetilde{f}(t)|^2 dt = 2 \int_0^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

On sait qu'un élément de F est somme de sa série de Fourier. S'il est impair, il est somme d'une série de Fourier ne comprenant que des termes en $\sin(nx)$, donc $\widetilde{f}$ s'approche dans $L^2([-\pi, \pi])$ par des combinaisons linéaires finies de fonctions $\sin nx$, et par imparité il en est de même de f dans $L^2([0, \pi])$, ce qui montre bien que $\{f_n \,; n \geq 1\}$ est une base orthonormale de H.

(2) C'est un problème qu'on a déjà vu dans l'Ex. VIII. 2 sous une forme très voisine. Les conditions

$$f''(x) = \lambda f(x), f(0) = f(\pi) = 0 \text{ et } f \neq 0 \text{ imposent}$$

$$\lambda = -\nu^2, \nu > 0, f(x) = b \sin(\nu x),\ b \neq 0,\ \nu \in \mathbb{N}^*.$$

Les solutions forment un espace vectoriel de dimension 1.

Les systèmes (valeurs propres, espaces propres) sont donc

$$\{(-n^2,\ \mathrm{Vect}(f_n, f_n(x) = \sin(nx)) \,; n \in \mathbb{N}^*\}.$$

(3) On a montré en (2) que 0 n'est pas valeur propre de B.

B est donc une application linéaire injective de G dans G, elle admet algébriquement une inverse $A_0 :\ \mathrm{Im}\,(B) \to G$.

Les fonctions propres f_n de B forment un système orthonormal complet dans E, donc A_0 est donc complètement décrite par les relations

$$A_0 f_n = a_n f_n \text{ avec } a_n = -\frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*.$$

L'application A définie sur H entier par

$$A\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n f_n \text{ avec } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

est un opérateur diagonal borné prolongeant A_0, de norme $\|A\| = \sup_n |a_n| = 1$, et compact puisque $\lim_n a_n = 0$.

(4) Le fait que l'on passe de g à Ag en multipliant les coefficients de Fourier-sinus par a_n fait penser à une convolution. On a donc envie d'introduire la fonction $C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ et de considérer la convolution

$$(g \star C)(x) \stackrel{def}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C(x-y)g(y)dy = \int_0^{\pi} K(x,y)g(y)dy$$

$$\text{avec } K(x,y) = \frac{1}{\pi}(C(x-y) - C(x+y)) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx \sin ny}{n^2},$$

où on a utilisé l'imparité de g, prolongée à $[-\pi,\pi]$. On prétend que $g \star C = Ag$. En effet, si les coefficients de Fourier-sinus de g sont les $c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\sin(ny)dy$, on a par convergence dominée

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C(x-y)g(y)dy &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos nx \cos ny + \sin nx \sin ny)g(y)dy \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin nx \sin ny)g(y)dy = \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n \sin nx = Ag(x).\end{aligned}$$

Cela montre que, pour $0 \le x \le \pi$, on a :

$$Ag(x) = \int_0^{\pi} K(x,y)g(y)dy,$$

et le calcul de $K(x,y)$ a déjà été fait dans l'Ex. VIII.2. En effet, posant

$$x = \pi X, y = \pi Y \text{ avec } 0 \le X, Y \le 1,$$

on a d'après $(VIII.24)$ de cet exercice :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx \sin ny}{n^2} = \frac{\pi^2}{2}[\min(X,Y) - XY],$$

soit

$$K(x,y) = -\pi\left[\min\left(\frac{x}{\pi},\frac{y}{\pi}\right) - \frac{xy}{\pi^2}\right] = -\left[\min(x,y) - \frac{xy}{\pi}\right] \text{ pour } 0 \le x, y \le \pi.$$

Exercice VIII.5

On note $I = [0,1]$, $\varDelta = I^2$.

(1) Il est clair, par une application simple du théorème de Fubini, que l'on a

$$\langle Tf, f\rangle = \iint_{\varDelta} K(x,y)f(x)\overline{f(y)}dxdy.$$

Il suffit, par densité des fonctions continues dans H et par la continuité de T, revue dans l'Ex. VIII.1, de montrer le résultat pour f continue. On peut alors approcher l'intégrale double précédente par des sommes de Riemann

$$S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i,j \leq n} K\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) f\left(\frac{i}{n}\right) \overline{f\left(\frac{j}{n}\right)}.$$

Mais d'après l'hypothèse avec $x_i = \frac{i}{n}$ et $z_i = f(\frac{i}{n})$, toutes les sommes S_n sont positives, ce qui par passage à la limite donne la positivité de $\langle Tf, f \rangle$.

(2) On utilise la représentation intégrale (donnée par la formule d'inversion de Fourier ou le théorème des résidus)

$$e^{-|x|} = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} h(t) dt,$$

dans laquelle h désigne la fonction *strictement positive* définie par

$$h(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + t^2}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j,k \leq n} K(x_j, x_k) z_j \overline{z_k} &= \sum_{1 \leq j,k \leq n} \int_{\mathbb{R}} e^{-it(x_j - x_k)} z_j \overline{z_k} h(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{1 \leq j,k \leq n} e^{-it(x_j - x_k)} z_j \overline{z_k} h(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{j=1}^{n} e^{-itx_j} z_j \Big|^2 h(t) dt \geq 0, \end{aligned}$$

comme intégrale d'une fonction positive. L'opérateur à noyau associé est donc positif. La représentation intégrale précédente donne même plus. En effet, on a par le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \langle Tf, f \rangle &= \iint_{\Delta} f(x) \overline{f(y)} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-it(x-y)} h(t) dt \right) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(t) \left(\iint_{\Delta} e^{-it(x-y)} f(x) \overline{f(y)} dx dy \right) dt = \int_{\mathbb{R}} h(t) \Big| \int_I e^{-itx} f(x) dx \Big|^2 dt. \end{aligned}$$

Donc

$$Tf = 0 \Longrightarrow F(t) \overset{def}{=} \int_I e^{-itx} f(x) dx = 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \Longrightarrow f = 0$$

en utilisant la continuité de F pour passer de « F nulle presque partout » à « F nulle partout » et l'injectivité de la transformation de Fourier (ici de la fonction qui vaut f sur I et 0 ailleurs). Ainsi, T est *injectif*. On va en étudier d'autres aspects dans l'exercice suivant.

Exercice VIII.6

(1) La fonction $[0,1]^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto e^{-|x-y|}$ est continue, donc de carré sommable sur $[0,1]^2$, et réelle, symétrique. Elle est donc le noyau d'un opérateur T de Hilbert-Schmidt (donc compact) auto-adjoint, et positif, injectif comme on l'a vu dans l'exercice précédent. $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est constitué de valeurs propres d'ordre fini. Les espaces propres sont orthogonaux deux à deux (P 6.6).

Comme dans l'Ex. VIII.3, on est amené à dériver l'équation $Tf = \lambda f$ pour trouver les couples ($\lambda \in \mathbb{R}^*, f \in H, f \neq 0$) qui en sont les solutions. L'équation ($VIII.3$) s'écrit

$$(Tf)(x) = e^{-x}\int_0^x e^y f(y)dy + e^x \int_x^1 e^{-y} f(y)dy. \qquad (VIII.27)$$

La fonction du second membre est continue, puis dérivable lorsque $Tf = \lambda f$ avec $\lambda \neq 0$, et on obtient en dérivant cette équation

$$\begin{aligned}\lambda f'(x) &= -e^{-x}\int_0^x e^y f(y)dy + f(x) - f(x) + e^x\int_x^1 e^{-y} f(y)dy\\ &= -e^{-x}\int_0^x e^y f(y)dy + e^x\int_x^1 e^{-y} f(y)dy,\\ \lambda f''(x) &= e^{-x}\int_0^x e^y f(y)dy + e^x\int_x^1 e^{-x} f(y)dy - 2f(x). \qquad (VIII.28)\end{aligned}$$

Cela s'écrit encore :

$$\lambda f''(x) = \lambda f(x) - 2f(x) \text{ et } f''(x) = \left(1 - \frac{2}{\lambda}\right) f(x). \qquad (VIII.29)$$

Revenant à $Tf = \lambda f,\ \lambda \neq 0$ (rappelons que T est injectif), on obtient :

$$\begin{aligned}\lambda f(0) &= \int_0^1 e^{-y} f(y)dy = \lambda f'(0)\\ \text{et } \lambda f(1) &= e^{-1}\int_0^1 e^y f(y)dy = -\lambda f'(1),\end{aligned}$$

donc

$$f(0) - f'(0) = 0\ ;\ f(1) + f'(1) = 0 \qquad (VIII.30)$$

Les (valeurs propres, vecteurs propres) de T sont les solutions, non nulles en f, du système ($VIII.29$), ($VIII.30$) avec conditions aux limites.

(i) **Si $\lambda = 2$.**

$f''(x) = 0, f(x) = ax + b, b - a = 0, 2a + b = 0$ et donc $a = b = 0$; $\lambda = 2$ n'est pas une valeur propre de T.

(ii) **Si $\lambda > 2$.**

Notons $1 - \frac{2}{\lambda} = r^2, r > 0$.

$f''(x) - r^2 f(x) = 0$; $f(x) = ae^{rx} + be^{-rx}$,

$0 = f(0) - f'(0) = a(1 - r) + b(1 + r)$,

$0 = f(1) + f'(1) = a(1 + r)e^r + b(1 - r)e^{-r}$.

D'où $a = b = 0$, puis $f = 0$. Il n'y a pas de valeur propre > 2.

(iii) **Si $\lambda < 2$.**

Notons $1 - \frac{2}{\lambda} = -r^2, r > 0$.

$f''(x) + r^2 f(x) = 0$; $f(x) = a\cos(rx) + b\sin(rx)$,

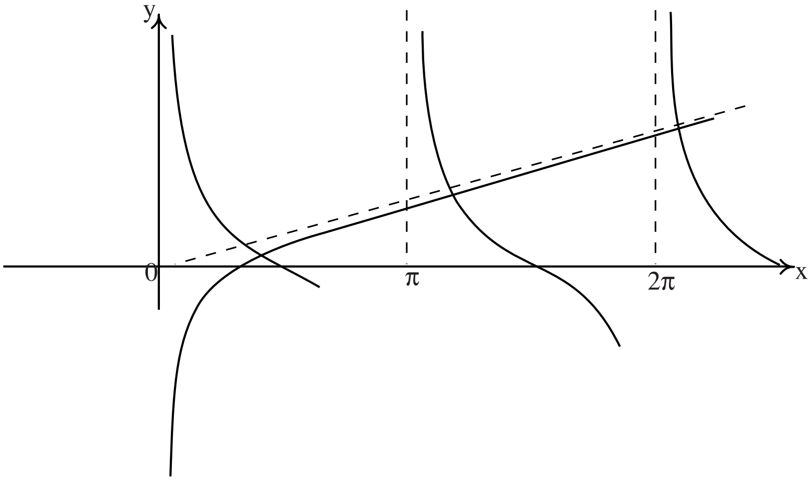
$0 = f(0) - f'(0) = a - rb$,

$0 = f(1) + f'(1) = a(\cos r - r\sin r) + b(\sin r + r\cos r)$.

Le déterminant de ce système linéaire homogène doit donc être nul si on veut $f \neq 0$, soit encore $\sin r + r\cos r + r(\cos r - r\sin r) = 0$, ce qui s'écrit après division par $\sin r \neq 0$:

$$\cot r = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right). \qquad (VIII.31)$$

L'étude des graphes des fonctions des deux membres montre que ($VIII$.31) admet une infinité dénombrable de solutions



1/2(x-1/x) et 1/tan x

Les valeurs de r, notées $\mu_n, n \in \mathbb{N}^*$, sont représentées par les abscisses des points d'intersection de ces courbes. μ_n est la solution comprise entre $(n-1)\pi$ et $(n + \frac{1}{2})\pi$. Les couples (valeur propre, espace propre) sont

$$\lambda_n = \frac{2}{1 + \mu_n^2}, \text{ Vect } (f_n \text{ ; } f_n(x) = \mu_n \cos(\mu_n x) + \sin(\mu_n x)).$$

(2) Les μ_n de cette question sont les μ_n considérées ci-dessus.

La somme demandée S est donc le quart de la somme S_0 des carrés des valeurs propres de T. On sait que cette somme S_0 est fournie par le carré de la norme de la fonction noyau K de l'opérateur T selon (P 8.5), puisque $T \geq 0$. Cela nous donne :

$$S_0 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 = \|K\|_2^2 = \iint_{\Delta} e^{-2|x-y|} dxdy = 2 \int_{0 \leq y \leq x \leq 1} e^{-2(x-y)} dxdy$$
$$= 2 \int_0^1 e^{-2x} \left(\int_0^x e^{2y} dy \right) dx = \int_0^1 (1 - e^{-2x}) dx = \frac{1 + e^{-2}}{2}.$$

La somme demandée est donc

$$S = \frac{S_0}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + \mu_n^2} \right)^2 = \frac{1}{8}(e^{-2} + 1).$$

Exercice VIII.7

(1) La méthode est la même que dans l'exercice précédent. K est une fonction réelle continue symétrique en (x, t). T est donc un opérateur compact de Hilbert-Schmidt auto-adjoint.

L'équation aux (valeurs propres, vecteurs propres) peut se résoudre en dérivant la fonction $g = Tf = \lambda f$ qui est continue, puis dérivable, quand $\lambda \neq 0$:

$$g(x) = \frac{\text{sh(1-x)}}{\text{sh1}} \int_0^x \text{sh(t)} f(t) dt + \frac{\text{sh(x)}}{\text{sh1}} \int_x^1 \text{sh(1-t)} f(t) dt. \qquad (VIII.32)$$
$$g'(x) = -\frac{\text{ch(1-x)}}{\text{sh1}} \int_0^x \text{sh(t)} f(t) dt + \frac{\text{ch(x)}}{\text{sh1}} \int_x^1 \text{sh(1-t)} f(t) dt$$

et, via sh(x)ch(1-x) + sh(1-x)ch(x) = sh1 :

$$g''(x) = g(x) - f(x). \qquad (VIII.33)$$

Si $Tf = \lambda f$, l'équation précédente s'écrit :

$$\lambda f''(x) = (\lambda - 1) f(x). \qquad (VIII.34)$$

Il convient d'ajouter les conditions aux limites issues de $(VIII.32)$:

$$f(0) = f(1) = 0. \qquad (VIII.35)$$

Si $\lambda = 0$, par $(VIII.34)$, $f = 0$; 0 n'est donc pas valeur propre.

Si $\frac{\lambda-1}{\lambda} = \mu^2, \mu > 0$, par $(VIII.33)$ et $(VIII.34)$

$$f(x) = A\text{ch}(\mu x) + B\text{sh}(\mu x), A = 0, \text{ puis } A = B = 0.$$

Les λ de cette forme ne sont pas valeurs propres.
Si maintenant $\frac{\lambda-1}{\lambda} = -\mu^2$ avec $\mu > 0$, $(VIII.33)$ et $(VIII.34)$ donnent :

$$f(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x), A = B\sin\mu = 0.$$

$f(x) = B\sin(\mu x), B \neq 0$, convient si $\sin(\mu) = 0$ donc $\mu = n\pi, n \in \mathbb{N}^*$.
Nous obtenons les couples (valeur propre, espace propre)

$$\left(\lambda_n = \frac{1}{1+n^2\pi^2},\ \text{Vect}\,(e_n)\right) \text{ avec } e_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x), n \in \mathbb{N}^*$$

$(e_n\,; n \in \mathbb{N}^*)$ est une base orthonormale de H.

(2) T est compact auto-adjoint *positif* (toutes ses valeurs propres sont positives). Sa norme est égale à son rayon spectral (P 6.6) donc à la plus grande des valeurs propres, soit

$$\|T\| = \frac{1}{1+\pi^2}.$$

(3) $S = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+n^2\pi^2} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+n^2\pi^2}$; la seconde somme est la somme des valeurs propres de T ; on peut appliquer la formule de trace (P 8.7) soit

$$\begin{aligned} S &= 1 + \int_0^1 K(x,x)dx = 1 + \frac{1}{\text{sh}1}\int_0^1 \text{sh}(x)\,\text{sh}(1-x)dx \\ &= 1 + \frac{1}{2\text{sh}1}\int_0^1 (\text{ch}1 - \text{ch}(2x-1))dx = 1 + \frac{1}{2\text{sh}1}(\text{ch}1 - \text{sh}1) \\ &= \frac{\text{ch}1 + \text{sh}1}{2\text{sh}1} = \frac{e^2}{e^2-1}. \end{aligned}$$

Remarque : On notera dans les exercices précédents l'importance de la prise en compte des conditions aux limites quand on cherche une fonction propre relative à une valeur propre non nulle. On remarque aussi l'outil « opérateur compact » utilisé pour des calculs de sommes de séries reliées à des valeurs propres.

Exercice VIII.8

(1) (i) La fonction $h_x, h_x(y) = e^{-|x-y|}$ est positive et de carré sommable :
$\int_{-\infty}^{+\infty}(h_x(y))^2dy = \int_{-\infty}^{+\infty}(h_0(y))^2dy = 2\int_0^{+\infty} e^{-2y}dy = 1.$
L'inégalité de Schwarz (P 5.4) montre alors que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|}f(y)dy$$

est absolument convergente, donc convergente, si bien que $Af(x)$ a un sens pour tout x. De plus, $|(Af)(x)| \leq \|f\|_2$, et Af est une fonction bornée.

(ii) L'intégrale double

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-|x-y|}|f(y)g(x)|dxdy$$

de l'énoncé est celle d'une fonction mesurable *positive* ; elle a donc toujours un sens, même si elle peut valoir $+\infty$. Pour étudier cette intégrale, on fait le changement de variable (de jacobien 1) $x = u, x - y = v,$ soit $x = u, y = u - v$. I se récrit comme suit :

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-|v|}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(u-v)g(u)|du\right)dv \overset{def}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-|v|}F(v)dv. \qquad (VIII.36)$$

L'inégalité de Schwarz nous donne maintenant

$$|F(v)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(u-v)|^2 du\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(u)|^2 du\right)^{\frac{1}{2}} = ||f||_2||g||_2.$$

L'inégalité ($VIII.36$) implique alors

$$I \leq ||f||_2||g||_2 \int_{\mathbb{R}} e^{-|v|}dv = 2||f||_2||g||_2. \qquad (VIII.37)$$

Cela assure l'intégrabilité de $e^{-|x-y|}|f(y)\overline{g(x)}$ ainsi que, par l'inégalité triangulaire, l'inégalité ($VIII.7$) de l'énoncé, à savoir :

$$\forall f, g \in H, \left|\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-|x-y|}f(y)\overline{g(x)}dxdy\right| \leq 2||f||_2\ ||g||_2.$$

(iii) On note que l'intégrale ($VIII.7$) ne représente le produit scalaire $\langle Af, g\rangle$ que si l'on sait déjà que $Af \in H$. Cette écriture n'est pas valable pour l'instant avec f et $g \in H$ arbitraires. Choisissons alors g à support contenu dans un segment J. Af est mesurable bornée, donc de carré sommable sur le segment J, et l'intégrale ($VIII.7$) est cette fois le produit scalaire $\langle (Af)_J, g\rangle$. Elle donne ainsi l'inégalité

$$|\langle (Af)_J, g\rangle| \leq 2||f||_2\ ||g||_2. \qquad (VIII.38)$$

Si on choisit $g = (Af)_J$, ($VIII.38$) donne après simplification par $||g||_2$:

$$\forall J, \forall f \in H, ||(Af)_J||_2 \leq 2||f||_2. \qquad (VIII.39)$$

($VIII.39$) entraîne donc, en faisant « tendre » J vers $(-\infty, +\infty)$ et en utilisant le théorème de Beppo Levi, l'inégalité :

$$||Af||_2 \leq 2||f||_2,$$

ce qui montre à la fois que $Af \in H$ et que $||A|| \leq 2$.

(2) Soit (f_n) la suite de l'énoncé. On a par définition

$$||A|| \geq \frac{\langle Af_n, f_n\rangle}{||f_n||^2}. \qquad (VIII.40)$$

Mais on peut écrire

$$\begin{aligned}\langle Af_n, f_n\rangle &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-|x-y|} f_n(x) f_n(y)\,dxdy = \iint_{0\le x,y\le n} e^{-|x-y|}dxdy\\ &= 2\iint_{0\le y\le x\le n} e^{-(x-y)}dxdy = 2\int_0^n e^{-x}\left(\int_0^x e^y dy\right)dx\\ &= 2\int_0^n (1-e^{-x})dx = 2n + O(1),\end{aligned}$$

tandis que $\|f_n\|^2 = n$. Reportant ces valeurs dans ($VIII$.40), nous obtenons

$$\|A\| \ge \frac{2n+O(1)}{n} = 2 + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Faisant tendre n vers l'infini, nous obtenons $\|A\| \ge 2$ et finalement $\|A\| = 2$.

(3) Il suffit (*cf.* chapitre VII et Ex. VII.19) de contredire la propriété (P 9.11) d'un opérateur compact en mettant en évidence une suite orthonormée (g_n) telle que $\langle Ag_n, g_n\rangle$ ne tende pas vers zéro. La suite proposée $g_n = 1_{[n,n+1[}$ est bien une suite orthonormée, car les supports des g_n sont deux à deux disjoints. Et d'autre part, un calcul presque identique à celui de (2) donne, posant $x = u$, $x - y = v$:

$$\begin{aligned}\langle Ag_n, g_n\rangle &= \iint_{n\le x,y\le n+1} e^{-|x-y|}dxdy\\ &= \iint_{n\le u\le n+1, -1\le v\le 1} e^{-|v|}dudv = \int_{-1}^{1} e^{-|v|}dv \overset{def}{=} \delta > 0.\end{aligned}$$

On a ainsi établi le caractère non-compact de l'opérateur A.

Remarque : Le noyau de l'opérateur est une fonction continue mais n'est pas de carré sommable sur l'intervalle d'intégration non borné envisagé ici. L'opérateur peut alors être non-compact ; il fait partie d'une catégorie plus générale d'opérateurs intégraux (voir par exemple [W] et [Y]).

Exercice VIII.9

(1) (i) $\boldsymbol{A \in \mathcal{L}(H)}$. Posons $v_n = Ae_n$. La suite (v_n) est orthogonale bornée par 1 en norme d'après la définition de l'énoncé, ce qui donne envie de définir A sur H tout entier par la formule :

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} x_n v_n \text{ si } x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \text{ avec } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty. \qquad (VIII.41)$$

Ax est correctement défini car les sommes partielles de la série $\sum x_n v_n$ forment une suite de Cauchy :

$$\|\sum_{n=p+1}^{q} x_n v_n\|^2 = \sum_{n=p+1}^{q} |x_n|^2\|v_n\|^2 \le \sum_{n=p+1}^{q} |x_n|^2.$$

On note de plus que $\forall x \in H$, on a $\|Ax\| \leq \|x\|$, donc que $\|A\| \leq 1$ et la relation $Ae_1 = e_1$ montre que $\|A\| = 1$.

(ii) ***A* auto-adjoint.** Par (P 6.12), on reconnaît le caractère auto-adjoint de A au fait que $\forall x \in H, \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$. Or, $x = \sum_{p=1}^{+\infty} x_p e_p$ entraîne :

$$\begin{aligned}\langle Ax, x\rangle &= \left\langle x_1 e_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(x_{2n}e_{2n+1} + x_{2n+1}e_{2n}), x_1 e_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(x_{2n}e_{2n} + x_{2n+1}e_{2n+1})\right\rangle \\ &= x_1\overline{x_1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(x_{2n}\overline{x_{2n+1}} + \overline{x_{2n}}x_{2n+1}\right).\end{aligned}$$

$\langle Ax, x\rangle$ est donc réel, et A est auto-adjoint.

(2) A est auto-adjoint, a fortiori normal (D 6.2 et D 6.3). S'il admet une écriture d'opérateur intégral de Hilbert-Schmidt, la propriété (P 8.5) permet la construction du noyau K, qui est déterminé à partir des couples (valeurs propres, espaces propres) de A.

(i) **Valeurs propres, espaces propres de *A*.**

Ils sont ici faciles à déterminer.

e_1 est vecteur propre pour la valeur propre 1. On a d'autre part :

$$A(e_{2n} + e_{2n+1}) = \frac{1}{n}(e_{2n} + e_{2n+1}) \text{ et } A(e_{2n} - e_{2n+1}) = -\frac{1}{n}(e_{2n} - e_{2n+1}).$$

Pour n entier ≥ 1, notons

$$f_1 = e_1, f_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2n} + e_{2n+1}) \text{ et } f_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2n} - e_{2n+1}).$$

$(f_n, n \in \mathbb{N}^*)$ est une base orthonormale de H formée de vecteurs propres.

La valeur propre 1 admet l'espace propre Vect (f_1, f_2) ; les autres valeurs propres sont simples ; les couples (valeurs propres, espaces propres) sont alors $(\frac{1}{n}, \text{ Vect }(f_{2n})), (-\frac{1}{n}, \text{ Vect }(f_{2n+1}))$.

(ii) **Écriture du noyau *K*.**

Selon (P 8.5), si $\forall f \in H, (Af)(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} K(x, y) f(y) \frac{dy}{2\pi}$, alors

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n f_n(x) f_n(y) \text{ avec } \lambda_1 = 1, \lambda_{2n} = \frac{1}{n}, \lambda_{2n+1} = -\frac{1}{n}. \qquad (VIII.42)$$

Le système $(g_{n,p}(x, y) = f_n(x)f_p(y)\ ; n, p \in \mathbb{N}^*)$ est une base orthonormale de $L^2([-\pi, +\pi]^2, \frac{dxdy}{4\pi^2})$, et l'écriture de $(VIII.42)$ est celle d'un élément de $L^2([-\pi, +\pi]^2, \frac{dxdy}{4\pi^2})$ dont la norme est $\|K\|_2^2 = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$. On voit donc que $K \in L^2([-\pi, +\pi]^2, \frac{dxdy}{4\pi^2})$.

L'opérateur intégral B donné par $(Bf)(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} K(x,y)f(y)\frac{dy}{2\pi}$ a les mêmes couples (valeurs propres, espaces propres) que A. Comme les vecteurs propres $(f_n\ ; n \in \mathbb{N}^*)$ forment une base orthonormale de H, on a $A = B$ et A est bien un opérateur de Hilbert-Schmidt, dont le noyau K peut s'expliciter à l'aide des e_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lambda_{2n} f_{2n}(x) f_{2n}(y) + \lambda_{2n+1} f_{2n+1}(x) f_{2n+1}(y)$$

$$= \frac{1}{n}[(\cos nx + \sin nx)(\cos ny + \sin ny) + (\cos nx - \sin nx)(\cos ny - \sin ny)]$$

$$= \frac{2}{n}\cos n(x-y).$$

Donc finalement $K(x,y) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}\cos n(x-y)$.

La convergence de la série est valable au sens de la norme dans $L^2([-\pi,+\pi]^2$ pour la mesure $\frac{dxdy}{4\pi^2}$.

(3) (i) **Existence et unicité de solution.**

L'équation $Ah-2h = g$ est une égalité dans l'espace H. L'étude précédente montre que 2 n'est pas une valeur propre de A ; comme A est un opérateur compact, ceci signifie que 2 n'est pas un point du spectre de A. Alors l'équation proposée admet une solution unique ($A - 2I$ est inversible).

(ii) **Détermination de la solution.**

Comme on l'a déjà dit, la solution existe et est unique. Le calcul va confirmer ce fait. Plaçons-nous sur la base orthonormale de l'énoncé $(f_n\ ; n \in \mathbb{N}^*)$, et écrivons g sur cette base.

(a) **Écriture de g.**

$$f_2(x) = \cos x + \sin x,\ f_3(x) = \cos x - \sin x, \text{ donc } g = \frac{f_2+f_3}{2}. \qquad (VIII.43)$$

(b) **Solution.** Si $h = \sum_{n=1}^{\infty} h_n f_n$, nous avons

$$Ah - 2h = -h_1 f_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[h_{2n}\left(\frac{1}{n}-2\right)f_{2n} + h_{2n+1}\left(-\frac{1}{n}-2\right)f_{2n+1}\right]. \qquad (VIII.44)$$

La comparaison des seconds membres de $(VIII.43)$ et $(VIII.44)$ conduit à

$$h_n = 0 \text{ si } n \neq 2 \text{ ou } 3,\ h_2 = -\frac{1}{2},\ h_3 = -\frac{1}{6},$$

et finalement $h = -\frac{1}{2}f_2 - \frac{1}{6}f_3$, c'est-à-dire :

$$h(x) = -\frac{1}{3}(2\cos x + \sin x).$$

Exercice VIII.10

(1) Pour fixer les idées, supposons $0 < x_0 < 1$. Soit $\delta > 0$ assez petit pour que $J_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset J$. On pose $\varDelta = J \setminus J_\delta$. Dans l'Ex. III.3, on avait défini f par $f(x) = \frac{\overline{g(x)}}{|g(x)|+\varepsilon}$. On définit la fonction φ corrigée de f comme suit :

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{\overline{g(x)}}{|g(x)|+\varepsilon} & \text{si } \; x \notin J_\delta \\ \\ 1 & \text{si } \; x = x_0 \\ \text{affine par morceaux} & \text{si } \; x \in J_\delta = [x_0 - \delta, x_0] \cup [x_0, x_0 + \delta] \end{cases}$$

Il est clair que $\varphi \in E$ et que $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ et $\varphi(x_0) = 1$. On voit de plus que

$$\begin{aligned} \Re\left(\int_J \varphi g\right) &\geq \int_\varDelta \frac{|g|^2}{|g| + \varepsilon} - \int_{J_\delta} |g| \geq \int_\varDelta (|g| - \varepsilon) - \int_{J_\delta} |g| \\ &\geq \int_J |g| - 2\int_{J_\delta} |g| - \varepsilon \geq \|g\|_1 - 4\delta\|g\|_\infty - \varepsilon \geq \|g\|_1 - 2\varepsilon, \end{aligned}$$

en ajustant $\delta > 0$ assez petit. Quitte à changer ε en $\frac{\varepsilon}{2}$, on a répondu à la question.

(2) Il est clair que la seule chose à montrer est l'inégalité $\|I + T\| \geq 1 + \|T\|$. Soit $x_0 \in J$ tel que, en posant $g(y) = K(x_0, y)$, on ait $\|T\| = \|g\|_1$. Un tel x_0 existe d'après l'Ex. VII.8. Choisissons ensuite φ comme dans la question (1). Nous voyons que, puisque $T\varphi(x_0) = \int_J K(x_0, y)\varphi(y)dy = \int_J g(y)\varphi(y)dy$:

$$\begin{aligned} \|I + T\| &\geq \|\varphi + T\varphi\|_\infty \geq |\varphi(x_0) + T\varphi(x_0)| \geq \Re(\varphi(x_0) + T\varphi(x_0)) \\ &= 1 + \Re\left(\int_J \varphi g\right) \geq 1 + \|g\|_1 - \varepsilon = 1 + \|T\| - \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme ε est arbitraire, cela achève la démonstration.

(3) Cette question est un peu difficile, et on se borne aux idées essentielles. Mais en même temps, c'est un bon exercice de généralisation abstraite de (2). Dans cette question (2), nous avons commencé par fixer une $f \in E$ vérifiant $\|f\|_\infty \leq 1$ et un $x_0 \in J$ tels que l'on ait $\|T\| \sim \Re(Tf(x_0))$. Ensuite, nous avons *corrigé* f pour obtenir une fonction φ, $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, telle que ($\sim$ voulant dire ici presque égal) :

1. $\varphi(x_0) = 1$
2. On a $\Re(Tf(x_0)) \sim \Re(T\varphi(x_0))$ car $\varphi - f$ est à petit support dans J_δ.

Pour voir que, même sans autre information sur T que sa *compacité*, on peut conclure de manière analogue, on fait les observations suivantes, dans lesquelles B désigne la boule unité fermée de E :

1. Soit $x_0 \in J$ et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall h \in B \text{ avec } h(x_0) = 0 \text{ et } \operatorname{supp} h \subset [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \text{ on a } \|Th\|_\infty \leq \varepsilon.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in J, \forall \varphi \in B, |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |T\varphi(x) - T\varphi(y)| \leq \varepsilon.$$

En effet, si 1. n'a pas lieu, on peut trouver une suite $(h_n) \subset E$ telle que

$$h_n(x_0) = 0\,;\, h_n \in B\,;\ \operatorname{supp} h_n \subset \left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right]\,;\ \text{mais } \|Th_n\|_\infty > \varepsilon.$$

Il est facile de voir que (h_n) tend simplement vers 0. Comme $\|h_n\|_\infty \leq 1$, la suite (h_n) tend *faiblement* vers 0 (*cf.* D 9.6). Comme T est compact, $\|Th_n\|_\infty \to 0$ (*cf.* P 9.9), contrairement à l'hypothèse. Et quant à 2., elle exprime simplement l'équicontinuité de $T(B)$, qui est une conséquence du fait que $\overline{T(B)}$ est compacte par hypothèse et de la partie facile du théorème d'Ascoli (P 2.3). Cela étant, on procède comme suit : Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver $f \in B$ et $x_0 \in J$ tels que (quitte à changer f en $e^{i\theta} f$) :

$$\|Tf\| = \Re(Tf(x_0)) \geq \|T\| - \varepsilon.$$

On fixe δ vérifiant 1. et 2., et on prend $x_1 \neq x_0,\ x_1 \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] = J_\delta$. Puis on corrige f en $\varphi \in B$ telle que :

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } \ x \notin J_\delta \\ f(x_0) & \text{si } \ x = x_0 \\ 1 & \text{si } \ x = x_1 \\ \text{affine par morceaux} & \text{si } \ x \in [x_0 - \delta, x_1] \cup [x_1, x_0] \cup [x_0, x_0 + \delta] \end{cases}$$

On a alors la minoration

$$\begin{aligned} \|I + T\| &\geq \|\varphi + T\varphi\|_\infty \geq |\varphi(x_1) + T\varphi(x_1)| \geq \Re(\varphi(x_1) + T\varphi(x_1)) \\ &= 1 + \Re(T\varphi(x_1)) \\ &= (1 + \Re(Tf(x_0)) + (\Re(T\varphi(x_0) - Tf(x_0))) + (\Re(T\varphi(x_1) - T\varphi(x_0))) \\ &\geq 1 + \|T\| - \varepsilon - |T\varphi(x_0) - \ Tf(x_0)| - |(T\varphi(x_1) - T\varphi(x_0)| \geq 1 + \|T\| - 4\varepsilon, \end{aligned}$$

où on a utilisé le point 1. avec $h = \frac{f-\varphi}{2}, h \in B, h(x_0) = 0$, $\operatorname{supp} h \subset J_\delta$ pour majorer le terme $|T\varphi(x_0) - \ Tf(x_0)|$, et le point 2. avec $|x_1 - x_0| \leq \delta$ pour majorer le terme $|(T\varphi(x_1) - T\varphi(x_0)|$. Ceci achève la preuve, $\varepsilon > 0$ étant arbitraire.

(4) Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la « base » canonique de ℓ^1 et T l'opérateur de rang un défini par $T(f) = -f_1 e_1$ si $f = \sum_{n=1}^\infty f_n e_n$ avec $f_n \in \mathbb{C}$. On a $\|T\| = 1$, mais $(I + T)f = \sum_{n=2}^\infty f_n e_n$, donc

$$\|(I + T)f\| = \sum_{n=2}^{\infty} |f_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \|f\|_1,$$

et par conséquent

$$\|I + T\| = 1 < 1 + \|T\| = 2.$$

Remarque : La fonction φ construite dans (3) est bien dans B. Car si l'on prend par exemple
$x = (1-t)x_0 + tx_1 \in [x_0, x_1]$ avec $t \in [0,1]$, on a, φ étant affine sur $[x_0, x_1]$:

$$\varphi(x) = (1-t)\varphi(x_0) + t\varphi(x_1) \Longrightarrow |\varphi(x)| \leq (1-t)|\varphi(x_0)| + t|\varphi(x_1)|$$

$$\leq (1-t) + t = 1.$$

Et on procède de même si $x \in [x_0 - \delta, x_0] \cup [x_1, x_0 + \delta]$. Cette remarque vaut aussi pour la question (1).

CONVERGENCE FAIBLE ET... IX

1 ÉNONCÉS

Exercice IX.1

(1) E_2 est un espace vectoriel complexe de dimension 2, dont (e_1, e_2) est une base fixée. On norme E_2 par :

$$\text{Pour tout } x = x_1e_1 + x_2e_2, \|x\| = |x_1| + |x_2|,$$

et on note $B_2 = \{x \in E_2 \,;\, \|x\| \leq 1\}$ sa boule unité fermée.

Montrer que les points extrêmes de B_2 sont les x de la forme

$x = e_1 \exp(i\alpha)$ ou $x = e_2 \exp(i\alpha), \alpha \in [0, 2\pi[$.

(2) E est l'espace ℓ^1, on note $\| \ \|$ sa norme usuelle et $B = \{x \in \ell^1 \,;\, \|x\| \leq 1\}$ sa boule unité fermée (*cf.* D 1.15).

(i) Déterminer l'ensemble des points extrêmes de B.

(ii) Montrer que $B = \overline{\text{co}}(\text{Ext}(B))$ (enveloppe convexe fermée de l'ensemble des points extrêmes de B).

Exercice IX.2

c_0 est l'espace de Banach des suites complexes $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, normé par $\|x\| = \sup(|x_n| \,;\, n \in \mathbb{N}^*)$. ($c_0$ a été étudié dans l'Ex. I.1 et l'Ex. II.7.)

(1) Montrer que la boule unité fermée de c_0 n'admet aucun point extrême.

(2) Montrer que c_0 n'est isométrique à aucun dual d'espace de Banach.

Exercice IX.3

Soient E, F deux espaces de Hilbert complexes.

(1) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite normée de E. Elle admet toujours une sous-suite faiblement convergente. Pourquoi ? (*cf.* D 9.8)

(2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite normée de E faiblement convergente vers x. Établir l'égalité

$$\lim_n \|x_n - x\|^2 = 1 - \|x\|^2. \qquad (IX.1)$$

(3) Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$ tel qu'aucun vecteur x normé ne vérifie $\|A\| = \|Ax\|$ (norme non atteinte).

Montrer l'existence d'une suite normée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ faiblement convergente telle que $\|A\| = \lim_n \|Ax_n\|$. Montrer que toute telle suite converge faiblement vers zéro.

Exercice IX.4

E est l'espace ℓ^p, $1 < p < \infty$. On note $f = (f(1), \ldots, f(n), \ldots)$ un élément f de E. Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite de ℓ^p, $1 < p < \infty$.

(1) Montrer l'équivalence des propriétés

(a) $w - \lim_{j\to\infty} f_j = 0$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{j\to\infty} f_j(n) = 0$; et $\sup_{j\in\mathbb{N}^*} \|f_j\| < \infty$.

(2) Expliciter cette équivalence si E est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie.

Exercice IX.5

E est un espace de Banach complexe. On note $F = E^*$.

On désigne par F_1 l'espace F muni de la topologie de la norme, F_2 l'espace F muni de la w-topologie $\sigma(F, F^*)$ (topologie faible) et F_3 l'espace F muni de la w*-topologie $\sigma(F, E)$ (topologie *-faible).

Ω_i est la famille des ouverts de F_i, Φ_i la famille des fermés, $i = 1, 2, 3$.

Pour un sous-ensemble M de F, on note M_1 son adhérence pour la topologie de la norme, M_2 son adhérence pour la w-topologie, M_3 son adhérence pour la w*-topologie.

(1) Comparer les familles Ω_i, $i = 1, 2, 3$ (selon les données des définitions (D 9.6) et (D 9.7) en particulier).

(2) Montrer que, pour $i = 1, 2, 3$, F_i est un EVTLC (D 9.3).

(3) Quelles relations d'inclusion y a-t-il entre les trois ensembles M_1, M_2, M_3 ?

(4) Chercher des exemples de couples (E, M) montrant les égalités ou les différences possibles entre M_1, M_2, M_3 (on pourra utiliser les espaces les plus simples connus et l'espace c_0 introduit dans l'Ex. I.1).

Exercice IX.6

(1) L'opérateur A est celui de l'Ex. VII.6. En utilisant les propriétés de ce chapitre, établir une condition nécessaire pour que A soit un opérateur compact.

(2) L'opérateur S est celui de l'Ex. VII.9. En utilisant les propriétés de ce chapitre, redémontrer que l'isométrie S n'est pas un opérateur compact(!). Montrer que, plus précisément, on a $d(S, \mathcal{K}(H)) = 1$.

Exercice IX.7

$E = C_0(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, de limite nulle à l'infini, soit encore telles que

$$\text{Pour tout } r > 0, K_r \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } |f(x)| \geq r\} \text{ est compact.} \qquad (IX.2)$$

(1) Montrer que les éléments de E sont des fonctions bornées.

(2) On munit E de la norme uniforme $\|f\|_u = \sup(|f(x)|\ ; x \in \mathbb{R})$. On le note alors E_u. Montrer que E_u est un espace de Banach.

(3) Montrer que la boule unité $B = \{f \in E_u \text{ tel que } \|f\|_u \leq 1\}$ n'admet pas de point extrême.

(4) Montrer que E_u n'est pas isométrique au dual d'un espace de Banach.

Exercice IX.8

Soit $E = c_0$ (*cf.* l'Ex. VII.10). On sait que $F = E^*$ s'identifie à l'espace de Banach ℓ^1, dont on note $(e_n, n \in \mathbb{N}^*)$ la « base » canonique. On étudie cette suite dans F muni de l'une des topologies $\sigma(F, F^*)$, ou $\sigma(F, E)$, ou de la norme.

La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente pour l'une de ces trois topologies ?

Exercice IX.9

$E = C(I)$ est l'espace de Banach des fonctions continues sur $I = [0, 1]$ à valeurs complexes muni de la norme uniforme $\|f\|_u = \sup(|f(x)|\ ; x \in J)$.

On rappelle (théorème de Riesz) que le dual de E s'identifie à l'ensemble des mesures de Borel μ sur I. Elles agissent par $\langle f, \mu\rangle = \int f d\mu, \quad \forall f \in E$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 \ \text{ si } & x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Montrer que, pour toute μ, $(\langle f_n, \mu\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy mais que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas faiblement convergente dans E (*cf.* D 9.6). On dit que E n'est pas *faiblement séquentiellement complet*.

Exercice IX.10

E est un espace de Banach de dimension infinie.

On note $B = \{x \in E\ ; \|x\| \leq 1\}$ sa boule unité fermée, $S = \{x \in E\ ; \|x\| = 1\}$ sa sphère unité.

$\overline{A}$ désignera toujours l'adhérence de $A \subset E$ pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.

(1) Montrer que tout voisinage ouvert de 0 pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ contient un espace vectoriel de dimension 1 (une droite).

(2) Montrer que $\overline{S} \supseteq B$.

(3) Montrer que $\overline{S} = B$.

Exercice IX.11

E est un espace de Banach complexe, $F = E^*$ son dual, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de E.

(1) On suppose que

$$\text{Pour tout } f \in E^*, (\langle x_n, f\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite de Cauchy .} \qquad (IX.3)$$

(i) Montrer que l'ensemble $\{x_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ est borné.

(ii) On suppose de plus que, pour une sous-suite $(x_{n(p)})_{p\in\mathbb{N}^*}$ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$$\text{Il existe } y \in E \text{ telle que } y = w - \lim_p x_{n(p)}. \qquad (IX.4)$$

Montrer que $y = w - \lim_n x_n$.

(2) On suppose que E est réflexif, c'est-à-dire (*cf.* D 2.9) :

$$(E^*)^* = E. \qquad (IX.5)$$

Montrer que toute suite bornée de E admet une sous-suite w-convergente.

(3) E et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifient $(IX.3)$ et $(IX.4)$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est faiblement convergente dans E.

Exercice IX.12 : Propriété de Banach-Saks

H est un espace de Hilbert complexe, et (x_n) une suite de vecteurs de H convergeant faiblement vers 0, c'est-à-dire :

$$\langle x_n, x\rangle \to 0 \text{ pour tout } x \in H. \qquad (IX.6)$$

Cette suite faiblement convergente est bornée en norme d'après P 9.4 :

$$\sup_n \|x_n\| = C < \infty.$$

On se propose de montrer que (x_n) contient une sous-suite (y_n) dont les moyennes de Cesàro convergent *en norme* vers 0 (Propriété de Banach-Saks, possédée aussi par les espaces $L^p, 1 < p < \infty$).

(1) Montrer qu'il existe une suite extraite $y_j = x_{n_j}$, à indices croissants avec $n_1 < n_2 < \ldots n_j < n_{j+1} < \ldots$ telle que l'on ait :

$$\forall j, k \in \mathbb{N}^*, k > j \Longrightarrow |\langle y_j, y_k \rangle| \leq \frac{1}{k}. \tag{IX.7}$$

(2) Montrer que l'on a

$$\left\| \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n} \right\|^2 \leq \frac{C^2 + 2}{n} \tag{IX.8}$$

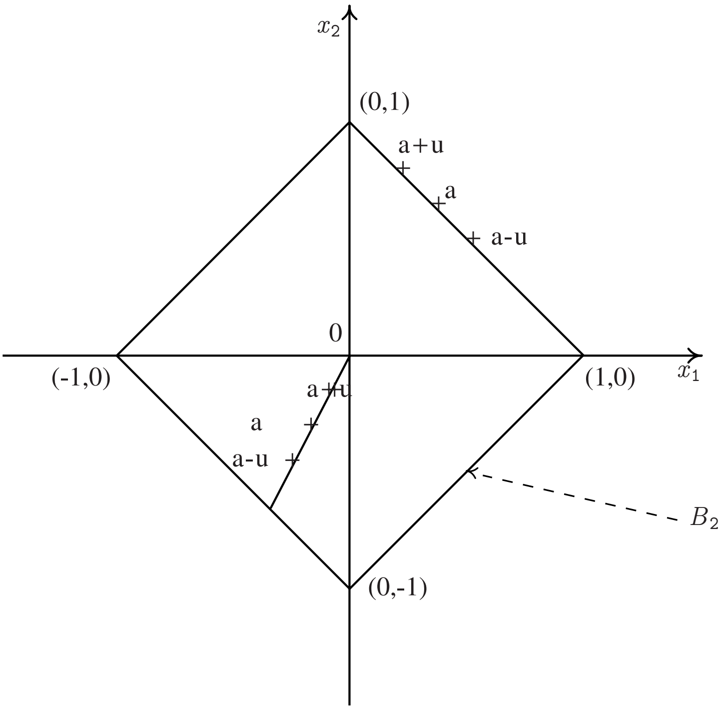
et conclure.

2 SOLUTIONS

Exercice IX.1

(1) Un point extrême a d'un convexe fermé M (D 9.4) est défini par : si $a \in [y, z]$, segment inclus dans M, alors $y = a$ ou $z = a$. *Une caractérisation évidente, mais commode de ces points extrêmes est* : $a \pm u \in M \Longrightarrow u = 0$.

(i) Par le schéma de la boule unité fermée B_2 dans l'espace réel, cette boule est un losange, on peut imaginer le résultat et le procédé de la preuve.



Sur le schéma ci-dessus sont notés deux systèmes $(a - u, a, a + u)$.
On est attentif aux différentes catégories de points de B_2 ; elles sont étudiées ci-dessous.

(i) Si $\|a\| < 1$, soit $u = re_1, r \in]0, 1[$ tel que $\|a\| + r \leq 1$. On a $u \neq 0$, $\|a \pm u\| \leq \|a\| + r \leq 1$ donc $a \pm u \in B_2$, et a n'est pas un point extrême de B_2.

(ii) Si $\|a\| = 1$, alors

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2, \text{ avec } a_1 = r_1 \exp(i\theta_1), a_2 = r_2 \exp(i\theta_2), r_1 \geq 0, r_2 \geq 0, r_1 + r_2 = 1.$$

Supposons $r_1 r_2 > 0$, et choisissons

$$u = r(e^{i\theta_1} e_1 - e^{i\theta_2} e_2), \text{ avec } 0 < r \leq \min(r_1, r_2).$$

Nous avons alors $a + u = (r_1 + r)e^{i\theta_1}e_1 + (r_2 - r)e^{i\theta_2}e_2$, d'où

$$\|a + u\| = (r_1 + r) + (r_2 - r) = r_1 + r_2 = 1$$

et de même $\|a - u\| = 1$. Ce u montre le caractère « non extrême » de a dans B_2. Un point extrême a devra donc vérifier, par exemple, $a_2 = 0$ et $|a_1| = 1$. Nous allons voir que ces points conviennent effectivement.

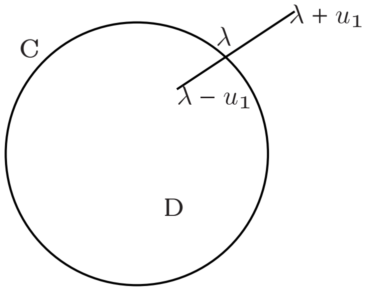
(iv) Soit $a = \lambda e_1, |\lambda| = 1$. On va voir que a est extrême (on traiterait de même $a = \lambda e_2$). Soit $u = u_1e_1 + u_2e_2$ tel que $a \pm u \in B_2$, i.e.

$$|\lambda + u_1| + |u_2| \leq 1 \text{ et } |\lambda - u_1| + |u_2| \leq 1.$$

En particulier $|\lambda \pm u_1| \leq 1$, ce qui implique $u_1 = 0$. Ceci est géométriquement évident, *cf.* figure, avec D (resp.C) le disque unité (resp.le cercle unité). Si on préfère, une preuve analytique est fournie par l'identité du parallélogramme :

$$|\lambda + u_1|^2 + |\lambda - u_1|^2 = 2(|\lambda|^2 + |u_1|^2) = 2(1 + |u_1|^2) \leq 2,$$

d'où $u_1 = 0$ et ensuite $u_2 = 0$ et $u = 0$.



On peut remarquer que tout point de B_2 est combinaison linéaire à coefficients réels compris entre 0 et 1 de points $e_1 \exp(i\alpha_1)$ et $e_2 \exp(i\alpha_2)$, c'est l'écriture relative à la base. On a alors $B_2 = \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(B_2)) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{Ext}(B_2))$. Ceci est confirmé par le théorème de Krein-Milman (P 9.2).

(2) L'étude des points extrêmes de B s'appuie sur celle faite pour B_2.

(i) Si un point $y \in B$ admet dans la base canonique $(e_n, n \in \mathbb{N}^*)$ au moins deux composantes y_j, y_k non nulles, il n'est pas extrême. Soit en effet $r = |y_j| + |y_k|$ et $a = \frac{y_je_j+y_ke_k}{r} \in B$. On utilise a comme élément de $E_2 = \mathrm{Vect}(e_j, e_k)$. Avec les notations de (1), a n'est pas un point extrême de B_2, et il existe $u \in B_2, u \neq 0$ tel que $a \pm u \in B_2$. Alors, $ru \neq 0$ et $y \pm ru \in B$ car on a par exemple

$$\|y + ru\| = \sum_{n \neq i,j} |y_n| + |y_j + ru_j| + |y_k + ru_k| \leq \sum_{n \neq i,j} |y_n| + r \leq 1.$$

(ii) Il reste comme points extrêmes possibles les points admettant une seule composante non nulle et de module 1.

Soit donc $a = \lambda e_j, |\lambda| = 1$. Supposons que $a \pm u \in B$, autrement dit : $|\lambda \pm u_j| + \sum_{n \neq j} |u_n| \leq 1$ et en particulier $|\lambda \pm u_j| \leq 1$. Le raisonnement fait pour B_2 montre que $u_j = 0$ et ensuite $u_n = 0$ pour $n \neq j$, d'où $u = 0$. Le point a est donc extrême.

(iii) Comme dans le cas de B_2 mais avec utilisation nécessaire de l'adhérence, l'écriture de $x \in B$ dans la base $(e_n, n \in \mathbb{N}^*)$ est celle d'un point dans $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{Ext}(B))$. Soit en effet $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n e_n \in B$, avec

$$|\lambda_n| = 1, \ \alpha_n \geq 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leq 1.$$

On pose

$$u_n = \lambda_n e_n \in \mathrm{Ext}(B), l_N = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n, y_N = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n + \frac{1 - l_N}{2} e_1 + \frac{1 - l_N}{2}(-e_1).$$

Alors, on a $y_N \in \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(B))$, car

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n + \frac{1 - l_N}{2} + \frac{1 - l_N}{2} = l_N + 1 - l_N = 1. \text{ Et } \lim_{N \to \infty} y_N = x.$$

On note qu'ici le théorème de Krein-Milman ne s'applique pas, B n'est pas compacte en norme (*cf.* P 9.2). La conclusion du théorème reste cependant valable.

Exercice IX.2

(1) On sait que la boule unité fermée d'un espace de Banach est un ensemble convexe. Cela découle de la convexité de la fonction norme. Il s'agit de montrer ici (D 9.4), qu'aucun point a de la boule unité fermée M de c_0 n'est extrême.

Soit donc $a = (a_n) \in M$. On a $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, donc $\exists\, n_0$ tel que $|a_{n_0}| < 1$. Soit $r > 0$ tel que $|a_{n_0}| + r \leq 1$ et $u = r e_{n_0}$, où (e_n) est la « base » canonique de c_0. On a $u \neq 0$ et $a \pm u \in M$, donc a n'est pas extrême.

(2) Si $T : c_0 \to E^*$ est une isométrie de c_0 sur le dual E^* d'un espace de Banach, soit B la boule unité fermée de E^*. Le théorème d'Alaoglu (P 9.6) exprime que B est w*-compacte. Le théorème de Krein-Milman (P 9.2) montre alors qu'elle est l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble de ses points extrêmes, et en particulier $\mathrm{Ext}(B) \neq \emptyset$. Or, T est une isométrie linéaire, donc $\mathrm{Ext}(B) = T(\mathrm{Ext}(M))$. Mais on vient de voir que $\mathrm{Ext}(M) = \emptyset$! Cette contradiction montre que c_0 ne peut être isométrique à E^*. Avec un peu plus d'efforts (propriété de Radon-Nikodym non possédée par c_0), on peut montrer qu'il n'est pas non plus *isomorphe* à un espace dual E^*.

Exercice IX.3

(1) Un espace de Hilbert s'identifie à son dual (P 5.7), donc la w*-topologie sur E coïncide avec la w-topologie. D'après le théorème d'Alaoglu (P 9.6), la boule unité fermée de E est w-compacte, donc séquentiellement compacte *(théorème d'Eberlein-Smŭlyan)*. On peut ici être moins savant : soit (x_n) notre suite bornée, et V le sous-espace fermé et séparable qu'elle engendre. D'après le procédé diagonal, on peut extraire une sous-suite (y_p) telle qu'il existe $y \in V$ avec :

$$\text{Pour tout } v \in V, \lim_{p\to\infty} \langle y_p, v\rangle = \langle y, v\rangle. \qquad (IX.9)$$

Ensuite, comme ce qui se passe dans $V^\perp$ joue un rôle inerte, on a encore $(IX.9)$ pour $v \in H$, ce qui montre que $w - \lim_{p\to\infty} y_p = y$.

(2) On utilise le caractère d'espace de Hilbert en exprimant les normes à l'aide du produit scalaire (formule « $a + b$ au carré » !), et puisque $\|x_n\| = 1$:

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\Re\langle x_n, x\rangle = 1 + \|x\|^2 - 2\Re\langle x_n, x\rangle. \qquad (IX.10)$$

D'après l'identification de E à son dual selon (P 5.7), la convergence faible de la suite (x_n) vers x s'écrit :

$$\text{Pour tout } y \in E,\ \lim_n \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Le passage à la limite dans $(IX.10)$ donne donc

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2 = 1 + \|x\|^2 - 2\Re\langle x, x\rangle = 1 - \|x\|^2.$$

(3) (i) **Existence d'une suite (x_n).**

Par définition de $\|A\|$, il existe une suite normée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, $\lim_{n\to\infty} \|Ax_n\| = \|A\|$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, incluse dans la boule unité fermée de E, admet d'après (1) une sous-suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ qui est w-convergente, pour laquelle on a encore $\lim_{p\to\infty} \|Ay_p\| = \|A\|$. Pour simplifier l'écriture, on supposera dans la suite que (x_n) elle-même est w-convergente dans B.

(ii) **Limite de la suite (x_n).**

Soit $w - \lim_n x_n = x$. Passons à la limite dans l'inégalité

$$\|Ax_n - Ax\|^2 \leq \|A\|^2\|x_n - x\|^2. \qquad (IX.11)$$

Le membre de droite tend vers $\|A\|^2(1 - \|x\|^2)$ d'après la question (1). Pour le membre de gauche, on procède comme dans (1) en développant et en utilisant l'hypothèse sur x_n :

$$\begin{aligned}\|Ax_n - Ax\|^2 &= \|Ax_n\|^2 + \|Ax\|^2 - 2\Re\langle Ax_n, Ax\rangle \\ &= \|Ax_n\|^2 + \|Ax\|^2 - 2\Re\langle x_n, A^*Ax\rangle \longrightarrow \|A\|^2 + \|Ax\|^2 - 2\Re\langle x, A^*Ax\rangle \\ &= \|A\|^2 + \|Ax\|^2 - 2\|Ax\|^2 = \|A\|^2 - \|Ax\|^2.\end{aligned}$$

Le passage à la limite dans $(IX.11)$ donne donc

$$\|A\|^2 - \|Ax\|^2 \leq \|A\|^2 - \|A\|^2\|x\|^2,$$

d'où il résulte clairement que $\|Ax\| = \|A\| \, \|x\|$. Mais cela impose $x = 0$, sinon A atteindrait sa norme !

Exercice IX.4

(1) Soit q l'exposant conjugué de p défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et (e_n) la « base » canonique de ℓ^q définie par $e_n(k) = \delta_{n,k}$, où δ est le symbole de Kronecker. On sait que les (e_n) forment une partie totale de ℓ^q et aussi que $(\ell^p)^* \stackrel{def}{=} E^* = \ell^q$ (P 2.11).

Pour tous $f \in E, X \in E^*$, on a$\langle f, X\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)X(n)$, où de même X est identifié à $\{X(n)_{n\in\mathbb{N}^*}\}$.

(i) **(a)⇒(b).**

D'après (P 9.4),

$$w - \lim_{j\to\infty} f_j = 0 \Leftrightarrow \text{ pour tout } X, \lim_{j\to\infty}\langle f_j, X\rangle = 0. \qquad (IX.12)$$

Si on choisit $X = e_n$, on obtient : pour tout $n, \lim_{j\to\infty} f_j(n) = 0$. La première partie est donc vraie. La deuxième partie est l'application du théorème de la borne uniforme (P 2.13). Chaque f_j est considéré comme un élément de E^{**}. Soit $X \in E^*$. On a par hypothèse $\lim_{j\to\infty}\langle f_j, X\rangle = 0$, donc

$$\sup_j |\langle f_j, X\rangle| < \infty.$$

Le théorème de la borne uniforme nous donne alors

$$\sup_j \left(\sup_{\|X\|\leq 1} |\langle f_j, X\rangle| \right) < \infty.$$

Mais on sait que le plongement de E dans son bidual est isométrique, d'après le théorème de Hahn-Banach (*cf.* P 3.8). La relation précédente se lit donc $\sup_j \|f_j\| < \infty$, ce qu'il fallait démontrer.

(ii) **(b)⇒(a).**

Si (b) est vrai, on étudie $\lim_{j\to\infty}\langle f_j, X\rangle$ pour X arbitraire dans ℓ^q pour appliquer ensuite (P 9.4).

Si $X = e_n, n \in \mathbb{N}^*$ est dans la « base » canonique de ℓ^q, on a $\langle f_j, X\rangle = f_j(n) \to 0$ par hypothèse. Par linéarité, la relation est encore vraie si $X \in V$, où $V = \mathrm{Vect}(e_n)$. Mais V est dense dans ℓ^q, car si $X \in \ell^q$, on a

$$X = \sum_{n=1}^{+\infty} X(n)e_n = \lim_{N\to\infty} X_N, \text{ avec } X_N = \sum_{n=1}^{N} X(n)e_n.$$

On utilise alors la deuxième des conditions (b). Soit h un majorant des $\|f_j\|$, $X \in \ell^q$, et $\varepsilon > 0$. On peut trouver $Y \in V$ tel que $\|X - Y\| \leq \varepsilon$. On a alors $|\langle f_j, Y\rangle| \leq \varepsilon$ pour $j \geq J(\varepsilon)$, d'où pour ces mêmes j :

$$|\langle f_j, X\rangle| \leq |\langle f_j, X - Y\rangle| + |\langle f_j, Y\rangle| \leq \|f_j\|\|X - Y\| + |\langle f_j, Y\rangle|$$

$$\leq h\varepsilon + |\langle f_j, Y\rangle| \leq (h+1)\varepsilon,$$

ce qui achève la preuve.

(2) Si E est un espace de Hilbert séparable (de dimension infinie), il s'identifie isométriquement à ℓ^2 au moyen d'une base orthonormée $(e_n, n \in \mathbb{N}^*)$, par la correspondance $f \to (\langle f, e_n\rangle)_{n\geq 1}$. L'hypothèse (b) se traduit d'une part par la convergence de chaque $\langle f_j, e_n\rangle$ vers $\langle f, e_n\rangle$, d'autre part par le caractère borné de $\|f_j\|$, qui n'admet pas de traduction plus précise.

Remarque : On note que la première partie de la condition (b) n'est pas suffisante. Si $f_j = ju_j$, où u_j est la « base » canonique de ℓ^p, i.e. $u_j(n) = \delta_{j,n}$, on a $f_j(n) = ju_j(n) = 0$ dès que $j > n$, mais $\|f_j\| = j$ n'est pas bornée (et donc il existera $X \in \ell^q$ tel que $\langle f_j, X\rangle$ ne tende pas vers zéro).

Exercice IX.5

Pour éviter trop de *répétitions,* il est utile d'adopter ici un point de vue plus général : Soit E un $\mathbb{C}$- espace vectoriel, par exemple, et $(p_i)_{i\in I}$ une famille « séparante » de semi-normes sur E, i.e.

$$x \in E \text{ et } x \neq 0 \Longrightarrow \text{ il existe } i \text{ tel que } p_i(x) \neq 0. \qquad (IX.13)$$

Pour $a \in E$, J partie finie de I, et $\varepsilon > 0$, on pose (ceci généralise (D 9.7)) :

$$V_J(a, \varepsilon) = \{x \in E \text{ tels que } \max_{i\in J} p_i(x - a) < \varepsilon\}.$$

Alors, la topologie sur E dont les ouverts sont les réunions de $V_J(a, \varepsilon)$ est une topologie séparée (par $(IX.13)$) et les $V_J(a, \varepsilon)$ forment une base de voisinages *convexes* de a, donc E avec ces ouverts est un EVTLC séparé. Cette topologie s'appelle *la topologie associée à la famille de semi-normes* (p_i). Il est évident que, si la famille $(q_j)_{j\in J}$ de semi-normes contient la famille $(p_i)_{i\in I}$, elle définit sur E une topologie plus fine.

(1) Trois familles d'ouverts sont à comparer, mais deux comparaisons suffiront ici.

(i) **Topologies faible et *-faible.**

Selon la définition, la topologie de F_3 est celle associée à la famille de semi-normes $(p_x)_{x\in E}$ définies par

$$p_x(f) = |f(x)|, \text{ pour tout } f \in F.$$

Cette famille est séparante par définition.Tandis que la topologie de F_2 est celle associée à la famille de semi-normes $(q_L)_{L\in F^*}$ définies par

$$q_L(f) = |L(f)|, \text{ pour tout } f \in F.$$

Tout élément $x \in E$ définit $\delta_x \in F^{**}$ par la formule $\delta_x(f) = f(x)$, donc il y a plus de q_L que de p_x, et cette nouvelle topologie est plus fine que celle de F_3, a fortiori séparante, et elle a davantage d'ouverts : $\Omega_2 \supseteq \Omega_3$.

(ii) **Topologie de la norme et topologie faible.**

On a

$$q_L(f) \leq \|L\|\|f\|, \text{ pour tout } f \in F, \text{ pour tout } L \in F^*.$$

Cela montre que la topologie de F_1 est plus fine que celle de F_2, et a donc davantage d'ouverts : $\Omega_1 \supseteq \Omega_2$. Finalement, $\Omega_3 \subseteq \Omega_2 \subseteq \Omega_1$.

(2) Cela résulte de l'étude générale faite en (1).

(3) Puisque $\Omega_3 \subseteq \Omega_2 \subseteq \Omega_1$, on a aussi $\Phi_3 \subseteq \Phi_2 \subseteq \Phi_1$ et on a trivialement les inclusions des adhérences en sens inverse : $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3$.

(4) On cherche toujours les exemples les plus simples possibles en pensant aux espaces de dimension finie et aux ensembles finis ou dénombrables.

(i) ***E* de dimension finie.**

Ce cas est trivial au niveau d'un Mastère. Les trois topologies sont les mêmes, on laisse les détails au lecteur.

(ii) ***M* est un ensemble fini.**

Comme les topologies sont séparées, pour chacune des topologies un ensemble réduit à un point est un ensemble fermé donc tout ensemble fini est fermé. Alors $M = M_1 = M_2 = M_3$.

(iii) $\boldsymbol{E = E^{**}}$**.**

Alors la w-toplogie et la w*-topologie sur $F = E^*$ coïncident et $F_2 = F_3$. Les ensembles M_2 et M_3 sont identiques. Ceci est par exemple vrai si E est un espace de Hilbert, par application de (P 4.7), ou encore si $E = \ell^p$, $1 < p < \infty$ d'après (P 1.17).

(iv) ***M* est un ensemble dénombrable. Premier exemple.**

Soit $E = \ell^2$ muni de sa base canonique $(e_n, n \in \mathbb{N}^*)$; $E = E^* = F$, donc $F_2 = F_3$. On choisit $M = \{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

(a) Dans F_1, si $p \neq q, \|e_p - e_q\| = \sqrt{2}$. Il en résulte que tous les points de M sont isolés, donc M est fermé, et coïncide avec son adhérence M_1.

(b) Dans F_2, soit $f \in E = E^{**},\ f = \sum_{p=1}^{+\infty} \langle f, e_p \rangle e_p$.

Comme $\sum_{p=1}^{+\infty} |\langle f, e_p \rangle|^2 < +\infty$ on a $\lim_p \langle f, e_p \rangle = 0$. Ceci exprime que la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente vers 0 dans F_2. Donc $0 \in M_2$, et on a bien sûr $M_2 = M \cup \{0\}$, puisque la topologie de F_2 est séparée.

On a obtenu $M_1 \neq M_2 = M_3$.

(v) ***M* est un ensemble dénombrable. Deuxième exemple.**

(a) **Choix de *E*.** On utilise maintenant un espace tel que $E \neq E^{**}$. Prenons $E = c_0$ défini en l'Ex. VI.10, pour lequel on sait que $F = E^* = \ell^1$ et $F^* = E^{**} = \ell^\infty$. Soit $(e_n, n \in \mathbb{N}^*)$ la « base » canonique $((e_n(j) = \delta_{n,j})$ de $\ell^1 = F$ et soit encore $M = \{e_n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

(b) **Étude de M_1.** Si $p \neq q, \|e_p - e_q\| = 2$, donc M est constitué de points isolés et $M_1 = M$.

(c) **Étude de M_3.** Pour tout $f \in c_0, \langle f, e_n\rangle = f(n) \to 0 = \langle f, 0\rangle$, donc la suite $M = (e_n, n \in \mathbb{N}^*)$ converge vers 0 dans F_3. Comme dans l'exemple précédent, ceci montre que $M_3 = M \cup \{0\}$.

(d) **Étude de M_2.** Ce cas est plus difficile, mais donne l'occasion de signaler un résultat important.

Théorème de Schur : *Soit (x_n) une **suite** de ℓ^1 faiblement convergente vers $x \in \ell^1$. Alors, x_n converge vers x en norme.*

Il en résulte que l'adhérence en norme du M considéré est égale à son adhérence faible. On a obtenu $M = M_1 = M_2 \neq M_3$. On peut donner ici une preuve directe de l'égalité $M_2 = M$. En effet, l'inclusion $M_1 \subset M_2 \subset M_3$ entraîne que l'on a soit $M_2 = M$, soit $M_2 = M \cup \{0\}$. Pour exclure cette dernière égalité, on considère $f \in \ell^\infty$ définie par $f(n) = 1$ pour tout n, et V le voisinage faible de 0 défini par

$$V = \{x \in \ell^1, |\langle x, f\rangle| < 1\}.$$

Alors, $V \cap M = \emptyset$, car $|\langle e_n, f\rangle| = |f(n)| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $0 \notin \overline{M}$.

Exercice IX.6

(1) Pour que A soit un opérateur compact il est nécessaire, par (P 9.11(ii)), que la suite $(\langle Ae_n, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit convergente vers 0. Or, $\langle Ae_n, e_n\rangle = a_n$; on doit donc avoir $\lim_n a_n = 0$. Une étude plus précise a été faite dans l'Ex. VII.6.

(2) On utilise cette fois le fait (*cf.* P 9.11(iii)) que pour une suite orthonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on doit avoir $\lim_{n\to\infty} \|S e_n\| = 0$. Mais ici $\|S e_n\| = 1$! Si on voulait encore utiliser (P 9.11(ii)), la relation $\langle S e_n, e_n\rangle = \langle e_{n+1}, e_n\rangle = 0$ ne permettrait pas de conclure. On peut alors utiliser la suite orthonormale $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $f_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2n} + e_{2n+1})$. $\langle S f_n, f_n\rangle = \frac{1}{2}\langle S e_{2n}, e_{2n+1}\rangle = \frac{1}{2}$, et de nouveau S ne peut être compact. Soit maintenant $d = d(S, \mathcal{K}(H))$ et K un opérateur compact ; on a l'inégalité

$$\|S - K\| \geq \sup_n \|S(e_n) - K(e_n)\| \geq \sup_n(\|S(e_n)\| - \|K(e_n)\|) = \sup_n(1 - \|K(e_n)\|),$$

autrement dit $\|S - K\| \geq 1$ puisqu'on sait que $\lim_{n\to\infty} K(e_n) = 0$ par (P 9.11). Par conséquent, $d \geq 1$. Mais $d \leq \|S - 0\| = 1$, donc $d = 1$.

Exercice IX.7

(1) Montrons d'abord l'équivalence des deux définitions de E. Si on suppose $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, soit $r > 0$. Il existe $A > 0$ tel que $|x| > A \Longrightarrow |f(x)| < r$. Donc, on a $K_r \subset [-A, A]$, ce qui montre que K_r est fermé, borné, i.e. compact. La réciproque s'établit de la même façon.

Soit $f \in E$. Choisissons $r = 1$. La fonction continue f est bornée en module par M sur le compact K_1, et on peut toujours supposer $M \geq 1$. Et par définition $x \notin K_1 \Longrightarrow |f(x)| \leq 1 \leq M$. On a donc $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(2) Notons d'abord que cette question a aussi été traitée, dans un cadre un peu différent, dans l'Ex. I.3. Ensuite, E_u est un sous-ensemble de l'espace de Banach F_u des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme.

(i) **E_u espace vectoriel.**

C'est évident.

(ii) **E espace de Banach.**

Il suffit de prouver que E_u est un sous-espace fermé de F_u. Soit $f \in \overline{E_u}$, $\varepsilon > 0$, $g \in E_u$ telle que $\|f - g\|_u \leq \varepsilon$. Il existe $A > 0$ tel que $|x| \geq A \Longrightarrow |g(x)| \leq \varepsilon$. On voit donc que

$$|x| \geq A \Longrightarrow |f(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x)| \leq \|f - g\|_u + |g(x)| \leq 2\varepsilon,$$

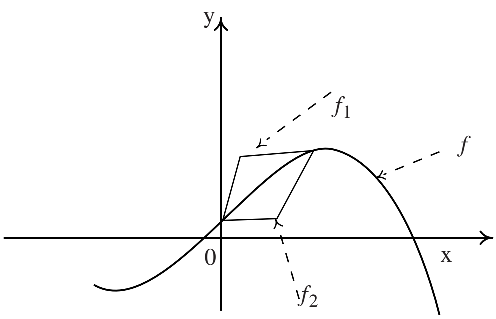
ce qui montre que $f \in E_u$.

(3) (i) **Les points de la boule unité ouverte.**

Comme dans tout espace de Banach, un point de la boule unité ouverte ne peut pas être point extrême de la boule unité fermée. En effet, si $\|f\|_u < 1$, soit $r = 1 - \|f\|_u > 0$ et $g \in E_u$ avec $\|g\|_u = r$. Alors $f \pm g \in B$, mais $g \neq 0$.

(ii) **Les points de la sphère unité.**

Notons que la condition de norme uniforme égale à 1 n'est pas très contraignante puisqu'il suffit qu'en un point x_0 l'on ait $|f(x_0)| = 1$ et qu'en tous les autres $x, |f(x)| \leq 1$. Un graphe de fonction réelle f non constante montre qu'une fonction non constante est intérieure à S.



Sur le schéma ci-dessus, f, choisie pour atteindre sa norme dans l'intervalle du schéma, a été modifiée sur une partie de sorte que f_1 majore strictement f, les normes de f, f_1, f_2 ont la même valeur, et on a $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$. Faisons maintenant une preuve rigoureuse. Soit $f \in B$, et $A > 0$ tel que $|x| > A \implies |f(x)| \leq \frac{1}{2}$, ainsi que $g \in E_u$ une fonction triangle, nulle hors de $[A, A+1]$, de hauteur $\frac{1}{2}$. Alors, nous avons $g \neq 0$ et $f \pm g \in B$. En effet, on voit par exemple que $\|f+g\|_u \leq 1$ puisque $|x| \leq A \implies |f(x)+g(x)| = |f(x)| \leq 1$, alors que

$$|x| > A \implies |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Donc, f n'est pas extrême dans B et $\mathrm{Ext}(B) = \emptyset$.

(4) Même raisonnement que dans l'Ex. IX.2.

Exercice IX.8

(i) **Topologie de la norme.**

Si $n \neq p$, $\|e_n - e_p\| = 2$, donc $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas une suite de Cauchy au sens de la norme dans F, et elle n'est pas convergente.

(ii) **Topologie faible.**

$F = \ell^1$ admet pour dual $F^* = \ell^\infty$, avec comme dualité $\langle a, f\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} a(j)f(j)$, pour tous $a \in F, f \in F^*$. Si e_n tend vers g pour cette topologie, on a $\lim_{n\to\infty}\langle e_n, f\rangle = \langle g, f\rangle$ pour tout $f \in \ell^\infty$, autrement dit

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \langle g, f\rangle.$$

Mais ceci est absurde, car il y a des éléments $f \in \ell^\infty$ tels que $f(n)$ n'ait pas de limite, par exemple $f = ((-1)^n)$. La suite étudiée n'est donc pas faiblement convergente.

(iii) **Topologie *-faible.**

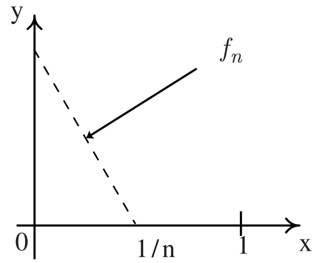
Si $f \in c_0$, on a cette fois

$$\lim_{n\to\infty}\langle e_n, f\rangle = \lim_{n\to\infty} f(n) = 0 = \langle 0, f\rangle,$$

ce qui veut dire que la suite (e_n) converge vers zéro pour la topologie $*$-faible $\sigma(F, E)$.

Exercice IX.9

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est d'usage courant pour l'étude d'exemples. Son graphe



indique qu'elle décroît. Pour tout $x \in]0, 1]$, $\lim_n f_n(x) = 0$; $\lim_n f_n(0) = 1$.

(i) **Suite $(\langle f_n, \mu\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*}$.**

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, et *partout* convergente, en particulier μ-presque partout convergente, vers f_0, fonction indicatrice du singleton $\{0\}$. Le théorème de Lebesgue (noter que $0 \leq f_n \leq 1$) exprime alors que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, \mu\rangle = \int f_0 d\mu = \mu(\{0\}).$$

Ainsi, chaque suite $(\langle f_n, \mu\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, donc de Cauchy.

(ii) **Non convergence faible de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.**

On va utiliser les éléments particuliers du dual de E constitués par les « masses de Dirac »

$$\delta_t : \{E \to \mathbb{C},\ f \mapsto f(t)\}, t \in I.$$

Si la suite (f_n) est faiblement convergente vers $g \in E$, alors

$$\text{Pour tout } t \in I,\ g(t) = \int g d\delta_t = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\delta_t = \lim_{n\to\infty} f_n(t).$$

D'après (i), on doit avoir $g(t) = 0$ si $t \neq 0$, $g(0) = 1$. Mais alors, g n'est pas continue ! La suite (f_n) n'a donc pas de limite faible dans E.

Remarque : Si une suite de Cauchy (f_n) de E est définie par la condition que chaque suite $(\langle f_n, \mu\rangle)$ soit de Cauchy, la conclusion précédente traduit un caractère de (E, w-topologie) que l'on peut appeler « non séquentiellement complet ».

Exercice IX.10

(1) Soit U un voisinage de 0. Selon (D 9.7), il existe $(f_1, \ldots, f_j)$ une famille finie d'éléments non nuls de E^* et $\varepsilon > 0$ tels que

$$U \supset \left\{x\ ;\ \max_{1\leq k\leq j} |f_k(x)| < \varepsilon\right\}.$$

Mais ker f_k est de codimension 1, donc par récurrence, $M = \cap_{1\leq k\leq j} \ker f_k$ est de codimension k et en particulier n'est pas réduit à zéro, puisque dim $E = \infty$. $M \subset U$ est donc un espace vectoriel de dimension infinie, et en particulier contient une droite.

(2) Soit $x_0 \in B$, $\|x_0\| \leq 1$. Montrer que $x_0 \in \overline{S}$, c'est établir que tout voisinage V de x_0 rencontre S. Or un voisinage de x_0 est obtenu par la translation de vecteur x_0 à partir d'un voisinage de 0. On peut donc utiliser le résultat de (1) pour affirmer que pour tout voisinage V de x_0 il existe $u \in E$ normé, $\|u\| = 1$, tel que $V \supseteq D = \{x \in E\,;\, x = x_0 + \lambda u, \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Il reste à prouver que D rencontre S.

L'application $\Phi : \{\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \lambda \mapsto \|x_0+\lambda u\|\}$ est une application continue ; $\Phi(0) = \|x_0\| \leq 1$. Et si $\lambda = \|x_0\| + 1$, on a $\Phi(\lambda) = \|x_0 + \lambda u\| \geq |\lambda| - \|x_0\| = 1$. Par le théorème de la valeur intermédiaire (connexité de $\mathbb{R}$!), il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(\lambda_0) = \|x_0 + \lambda_0 u\| = 1$. Cela veut dire que D rencontre S.

On a ainsi obtenu l'inclusion

$$B \subseteq \overline{S}. \tag{IX.14}$$

(3) B est un ensemble convexe. Par (P 9.8) (Hahn-Banach !) son adhérence faible est identique à son adhérence forte, autrement dit B est fermée pour la topologie faible. On a donc

$$\overline{B} = B. \tag{IX.15}$$

Par ailleurs, $S \subseteq B$ donc d'après (IX.15) :

$$\overline{S} \subseteq \overline{B} = B. \tag{IX.16}$$

(IX.14) et (IX.16) fournissent l'égalité cherchée : $\overline{S} = B$.

Remarque : Le résultat précédent montre que la topologie faible est toujours strictement plus faible que la topologie de la norme dès que l'espace normé est de dimension infinie. On sait (voir par exemple l'Ex. IX.5) que si l'espace est de dimension finie les deux topologies sont les mêmes.

Exercice IX.11

(1) (i) Soit $f \in E^*$. La suite $(\langle x_n, f\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, donc bornée : $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} |\langle x_n, f\rangle| < \infty$. Le théorème de borne uniforme (P 2.13) donne donc

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sup_{\|f\|\leq 1} |\langle x_n, f\rangle|\right) < \infty.$$

Or, le théorème de Hahn-Banach (*cf.* P 3.8) nous montre que

$$\sup_{\|f\|\leq 1} |\langle x_n, f\rangle| = \|x_n\|.$$

La relation précédente se lit donc

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \|x_n\| < \infty.$$

(ii) Par (P 9.4), l'égalité de convergence faible $y = w - \lim_{p\to\infty} x_{n(p)}$ se traduit par :

$$\text{Pour tout } f \in E^*,\ \lim_p \langle x_{n(p)}, f\rangle = \langle y, f\rangle.$$

La suite numérique $(\langle x_n, f\rangle)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy et elle admet une sous-suite convergente vers $\langle y, f\rangle$. On en conclut

$$\text{Pour tout } f \in E^*,\ \lim_{n\to\infty} \langle x_n, f\rangle = \langle y, f\rangle.$$

Une nouvelle application de (P 9.4) établit alors que $y = w - \lim_n x_n$.

(2) Il nous faut admettre ici le théorème d'Eberlein-Smŭlyan : *Si $M \subset E$ est relativement w-compacte et si $y \in E$ est w-adhérent à M, il existe une suite (x_n) d'éléments de M avec $x_n \xrightarrow{w} y$.*

Cela étant dit, la propriété à établir ici fait penser à de la compacité. On va en effet s'y ramener par emploi du théorème de Banach-Alaoglu (P 9.6).

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite bornée de E, et $M = \{x_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ l'ensemble de ses points.

On « place » E dans $(E^*)^* = E^{**} = F^*$. La w*-topologie est utilisée sur F^*. M est par hypothèse borné donc inclus dans une boule fermée qui est, d'après la propriété (P 9.6), un ensemble compact. L'ensemble M admet donc un point adhérent y, au sens de la w*-topologie sur E^{**}, qui n'est autre que la topologie $\sigma(E, E^*)$, w-topologie sur E. On peut maintenant utiliser le théorème d'Eberlein-Smŭlyan pour conclure qu'il existe une suite de points de M, donc une sous-suite de (x_n), qui converge faiblement vers y.

(3) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie $(IX.3)$. Par (i), elle est bornée.

Par $(IX.4)$, cette suite admet donc une sous-suite faiblement convergente vers y dans E. Par (1) (ii), on sait alors que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ entière est faiblement convergente vers y dans E.

Remarque : On comparera ce résultat à celui de l'Ex. IX.9. L'espace alors utilisé n'était pas supposé réflexif.

Exercice IX.12

(1) On construit la suite (n_j) par récurrence. On prend $n_1 = 1$. Puisque $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, x_{n_1}\rangle = 0$, on peut trouver $n_2 > n_1$ tel que $|\langle x_{n_2}, x_{n_1}\rangle| \leq \frac{1}{2}$. Ayant construit $n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1}$ avec la propriété requise, on sait que $\lim_{n\to\infty} \sum_{l=1}^{k-1} |\langle x_n, x_{n_l}\rangle| = 0$, on peut donc trouver $n > n_{k-1}$ tel que

$$\max_{1\leq l\leq k-1} |\langle x_n, x_{n_l}\rangle| \leq \frac{1}{k}.$$

Il n'y a plus qu'à prendre $n_k = n$ et la suite d'entiers ainsi construite répond à la question (elle vérifie (IX.7)).

(2) Soit $V_n = \frac{y_1+\ldots+y_n}{n}$. On développe $\|V_n\|^2$ en utilisant les propriétés du produit scalaire, ce qui donne

$$\|V_n\|^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\|y_k\|^2 + 2\sum_{1\leq j<k\leq n}\Re\langle y_j, y_k\rangle\right) \leq \frac{1}{n^2}\left(C^2n + 2\sum_{1\leq j<k\leq n}\frac{1}{k}\right)$$

$$\leq \frac{1}{n^2}\left(C^2n + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{k}\right) \leq \frac{1}{n^2}\left(C^2n + 2n\right) = \frac{C^2+2}{n},$$

ce qui montre (IX.8) : ainsi $\|V_n\| \to 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque : Soit X un espace de Banach et (x_n) une suite de X tendant faiblement vers zéro : $\forall x^* \in X^*, \lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = 0$. Alors on démontre, comme conséquence du théorème de Hahn-Banach géométrique, qu'il existe une suite de combinaisons convexes

$$V_n = \sum_{k=1}^{l_n}\lambda_{n,k}x_k \text{ avec } \lambda_{n,k} \geq 0, \sum_{k=1}^{l_n}\lambda_{n,k} = 1 \text{ telle que } \lim_{n\to\infty}\|V_n\| = 0.$$

L'exercice IX.12 pointe le fait que, dans un Hilbert, tous les poids non-nuls $\lambda_{n,k}$ peuvent être choisis égaux. Cette *propriété de Banach-Saks* n'est pas possédée par tous les Banach, et elle implique notamment la réflexivité de X.

X ALGÈBRES DE BANACH

1 ÉNONCÉS

Dans toute la suite, sauf dans l'Ex. X.9.(4), les algèbres de Banach considérées seront sur le corps des complexes et avec unité e.

Exercice X.1

(1) Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et $a, b \in \mathcal{A}$. Montrer l'égalité ensembliste $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$.

(2) Donner des exemples dans lesquels $\sigma(ab) \neq \sigma(ba)$ ou $\sigma(ab) = \sigma(ba)$.

Exercice X.2

(1) Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach avec la propriété : si $a \in \mathcal{A}$ et $a \neq 0$, alors a est inversible. Montrer que $\mathcal{A} = \mathbb{C}e$.

(2) L'hypothèse de (1) est supposée avoir lieu pour l'algèbre de Banach $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$, où E est un espace de Banach. Comment est alors l'espace E ?

Exercice X.3

Soit E un espace de Banach, $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$, et T un élément de $\mathcal{A}$. On note $\mathcal{A}_T = \{P(T)\ ; P \in \mathbb{C}[X]\}$ et $\mathcal{B}$ l'algèbre de Banach engendrée par T.

(1) On suppose que E est de dimension finie.

- (i) Montrer que $\mathcal{A}_T = \mathcal{B}$.
- (ii) Montrer que si T est inversible, il existe un polynôme Q tel que $T^{-1} = Q(T)$ (c'est-à-dire $T^{-1} \in \mathcal{A}_T$).

(2) Montrer par un exemple qu'en dimension infinie, le résultat de (1) (ii), n'est pas vrai. Pour cela, on considère un espace de Hilbert H, séparable et muni d'une base orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Soit T « définie » par : $\forall n \in \mathbb{Z}\ , Te_n = e_{n+1}$.

- (i) Montrer que T est inversible et calculer son inverse.

(ii) Montrer que $T^{-1} \notin \mathcal{A}_T$
(on pourra considérer pour $n \in \mathbb{Z}$, le sous-espace $E_n = \overline{\text{Vect}(e_j, j \geq n)}$).

(3) Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach complexe. Soit $T \in \mathcal{A}$ inversible et soit Ω_∞ la composante connexe non bornée de l'ensemble résolvant (*cf.* D 10.5) de T. Montrer que l'on a l'implication :

$$0 \in \Omega_\infty \Longrightarrow T^{-1} \in \overline{\mathcal{A}_T}$$

où $\overline{\mathcal{A}_T}$ désigne la fermeture de $\mathcal{A}_T$ dans $\mathcal{A}$.

Exercice X.4

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach, et $x \in \mathcal{A}$. Un polynôme p est dit normalisé si le coefficient de son terme de plus haut degré est égal à 1. On note

$$M(x) = \{p \in \mathbb{C}[X] \text{ normalisés; } p \neq 0,\ p(x) = 0\}.$$

(1) Soit $x \in \mathcal{A}$ tel que $M(x) \neq \emptyset$. Montrer l'existence d'un polynôme unique $p_x \in M(x)$ de degré minimal (on notera r_x ce degré).

(2) Soient $a, b \in \mathcal{A}$. On suppose que $M(ab) \neq \emptyset$. Montrer que $M(ba) \neq \emptyset$.

(On établira que si $p \in M(ab)$, alors q donné par $q(z) = zp(z)$ est un élément de $M(ba)$).

(3) Quelles sont les relations entre p_{ab} et p_{ba} ?

(On aura plusieurs égalités possibles).

(4) Illustrer les résultats précédents par des exemples simples : lorsqu'on a $\mathcal{A} = \mathcal{L}(H)$, H espace de Hilbert, trouver des opérateurs A, B pour lesquels $M(AB) \neq \emptyset$; expliciter des polynômes p_{AB} et p_{BA}.

Exercice X.5

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de $\mathcal{A}$ convergeant vers $a \in \mathcal{A}$.

(1) On suppose qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ convergeant vers $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $\forall n, \lambda_n \in \sigma(a_n)$. Montrer que $\lambda \in \sigma(a)$.

(2) On suppose que a_n est inversible pour tout n et que a ne l'est pas. Montrer que la suite $(\|a_n^{-1}\|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers l'infini.

Exercice X.6

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach, $\mathcal{G}$ le groupe de ses éléments inversibles, et $\partial\mathcal{G}$ la frontière topologique de $\mathcal{G}$.

On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathcal{A}, \quad \|x\|\,\|y\| \leq M\|xy\|.$$

(1) Montrer que $\partial\mathcal{G} = \{0\}$
(On pourra utiliser l'Ex. X.5).

(2) En déduire que $\mathcal{A} = \mathbb{C}e$.

Exercice X.7 : Exponentielle

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach. À $a \in \mathcal{A}$, on associe la fonction $\exp(a)$, « définie » par la formule

$$\exp(a) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} a^p. \qquad (X.1)$$

(1) Justifier l'écriture précédente.

(2) Soient $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$.

(i) Montrer que

$$a_1 a_2 = a_2 a_1 \Rightarrow \exp(a_1 + a_2) = \exp(a_1)\exp(a_2).$$

(ii) Montrer que si $a_1 a_2 \neq a_2 a_1$, on peut avoir $\exp(a_1 + a_2) \neq \exp(a_1)\exp(a_2)$.

(3) Montrer que si $\|e - a\| < 1$, alors $a = \exp(b)$ pour un $b \in \mathcal{A}$.

Exercice X.8

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach, $\mathcal{G}$ le groupe de ses éléments inversibles, et $\mathcal{G}_0$ la composante connexe de $\mathcal{G}$ contenant e. Désignons par

$$\mathrm{Exp}(\mathcal{A}) = \{\Pi_{i=1}^n \exp(a_i);\ a_i \in \mathcal{A}\}$$

l'ensemble (sous-groupe de $\mathcal{G}$) des produits finis d'exponentielles.

(1) Montrer que $\mathrm{Exp}(\mathcal{A})$ est ouvert et fermé dans $\mathcal{G}$.

(2) Montrer que $\mathrm{Exp}(\mathcal{A})$ est un connexe de $\mathcal{G}$ contenant e et en déduire que l'on a $\mathrm{Exp}(\mathcal{A}) = \mathcal{G}_0$.

(3) Montrer que $\mathcal{G}_0$ est un sous-groupe normal de $\mathcal{G}$.

(4) Décrire les composantes connexes de $\mathcal{G}$.

(5) Montrer que $\mathcal{G}/\mathcal{G}_0$, muni de la topologie-quotient, est un groupe discret.

Exercice X.9

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach, et $\mathcal{G}_0$ la composante connexe de $\mathcal{G}$ contenant e.

(1) Soit $a \in \mathcal{A}$ tel que $a^m = e$ pour un $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a \in \mathcal{G}_0$.

(2) Supposons que $\mathcal{A}$ est commutative, et soit $a \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_0$.

(i) Montrer que si $k < j$, alors a^k et a^j ne peuvent pas être dans la même composante connexe de $\mathcal{G}$.

(ii) En déduire que, si $\mathcal{G}$ n'est pas connexe, il admet une infinité de composantes connexes.

(3) Soit $\mathcal{A} = C_{\mathbb{C}}([0,1])$, l'algèbre de Banach des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$, munie de la norme-infini.

Montrer que $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$ est connexe.

(4) Soit $\mathcal{A} = C_{\mathbb{R}}([0,1])$, l'algèbre de Banach *réelle* des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, munie de la norme-infini.

Montrer que $\mathcal{G}/\mathcal{G}_0$ est d'ordre 2.

(5) Soit $\mathcal{A} = \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ l'algèbre de Banach commutative des mesures de Borel complexes sur $\mathbb{R}$, munie de la convolution et de la norme « variation totale ».

(i) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\delta_\alpha \in \mathcal{G}_0$, alors $\alpha = 0$.

(ii) En déduire que $\mathcal{G}/\mathcal{G}_0$ n'est pas dénombrable.

Exercice X.10

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach.

(1) Soit $x, y \in \mathcal{A}$. Montrer que $r(xy) = r(yx)$

(où $r(u)$ est le rayon spectral de u).

(2) Supposons qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in \mathcal{A},\ \|x\| \leq Cr(x)$.

Montrer que $\mathcal{A}$ est commutative.

(Si $x, y \in \mathcal{A}$, on pourra considérer l'application $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\varphi(z) = f(\exp(-zx)y\exp(zx)),$$

dans laquelle $f \in \mathcal{A}^*$).

(3) Supposons qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall x, y \in \mathcal{A},\ \|xy\| \leq C\|yx\|$.

Montrer que $\mathcal{A}$ est commutative.

(4) Supposons qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in \mathcal{A},\ \|x\|^2 \leq C\|x^2\|$.

Montrer que $\mathcal{A}$ est commutative.

Exercice X.11

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ une forme linéaire telle que $\varphi(e) = 1$.

(1) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x \in \mathcal{A},\ \varphi(x) = 0 \Longrightarrow \varphi(x^2) = 0$;

(ii) $\forall x \in \mathcal{A},\ \varphi(x^2) = (\varphi(x))^2$;

(iii) $\forall x, y \in \mathcal{A},\ \varphi(x) = 0 \Longrightarrow \varphi(xy) = 0$;

(iv) $\forall x, y \in \mathcal{A},\ \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

(2) Supposons que φ ne s'annule pas sur les élément inversibles de $\mathcal{A}$ et soit $x \in \mathcal{A}$. Montrer que $\varphi(x) = 0 \Longrightarrow \varphi(x^2) = 0$ (**Indication** : on pourra considérer, pour tout entier $n \geq 1$, le polynôme $P_n(z) = \varphi((ze - x)^n)$ et exploiter le fait que toutes ses racines sont dans le compact $\sigma(x)$).

(3) En déduire le théorème de « **Gleason-Kahane-Zelazko** » : *Si $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach complexe et $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ une forme linéaire vérifiant $\varphi(e) = 1$ et $\varphi(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathcal{G}$, alors φ est multiplicative.*

Exercice X.12 : Réciproque simple de Ex. X.11

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ une forme linéaire non-nulle et multiplicative (i.e. $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ pour tous $x, y \in \mathcal{A}$).

(1) Montrer que $\varphi(e) = 1$ et que $\varphi(x) \neq 0$ pour tout x inversible.

(2) Montrer que $x \in \mathcal{A}$ et $\|x\| < 1$ implique $|\varphi(x)| < 1$.

(3) Montrer que φ est continue et que $\|\varphi\| = 1$.

Exercice X.13

Soit $\mathcal{A}$ une $C^\star$-algèbre unitaire.

(1) Soit a un élément normal de $\mathcal{A}$.

(i) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*, \|a^{2^p}\| = \|a\|^{2^p}$.

(ii) En déduire que $r(a) = \|a\|$.

(2) Montrer que $\mathcal{A}$ est commutative si et seulement si $\forall x \in \mathcal{A},\ x$ est normal.

Exercice X.14 : Rigidité des isomorphismes

Soit $\mathcal{A}$ une $C^\star$-algèbre et $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ un $C^\star$-isomorphisme (c'est-à-dire que Φ est un isomorphisme d'algèbre et que $\Phi(x^*) = \Phi(x)^*$ pour tout $x \in \mathcal{A}$).

(1) Montrer que $\sigma(\Phi(x)) = \sigma(x)$ pour tout $x \in \mathcal{A}$.

(2) Montrer que $\|\Phi(x)\|^2 = r(\Phi(xx^*))$ pour tout $x \in \mathcal{A}$.

(3) En déduire que Φ est une isométrie, c'est-à-dire :

$$\|\Phi(x)\| = \|x\| \text{ pour tout } x \in \mathcal{A}.$$

Exercice X.15

Soit $\mathcal{A}$ une $C^\star$-algèbre et $a \in \mathcal{A}$.

On suppose que $a \geq e$ et que a est à puissances bornées (c'est-à-dire qu'on a $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\| < \infty$). Montrer que $a = e$.

(On pourra poser $b = a - e$ et étudier $\exp(tb)$, $t \geq 0$.)

Exercice X.16

H est un espace de Hilbert séparable muni d'une base orthonormée fixée $(e_n, n \in \mathbb{N}^*)$. L'opérateur $S \in \mathcal{L}(H)$ est donné par $\forall n \in \mathbb{N}^*, S\, e_n = e_{n+1}$. Soit $\mathcal{A}_S$ la $\mathbb{C}^*$-algèbre engendrée par S.

(1) Montrer que $\mathcal{A}_S$ contient tous les $e_n \otimes e_p, n, p \in \mathbb{N}^*$.

(2) Montrer que $\mathcal{A}_S$ contient tous les $x \otimes y$, $x, y \in H$.

(On pourra répondre d'abord pour x et y combinaisons linéaires finies des vecteurs de base).

(3) Montrer que $\mathcal{A}_S$ contient tous les opérateurs compacts.

Exercice X.17 : Algèbre de Deddens

Soit H un espace de Hilbert complexe séparable, $\mathcal{A} = \mathcal{L}(H)$ et $\mathcal{K}(H)$ l'idéal des opérateurs compacts. Pour $A \in \mathcal{L}(H)$, on notera

$$\{A\}' = \{T \in \mathcal{L}(H);\ AT = TA\}$$

le commutant de A. Si de plus $A \in \mathcal{L}(H)$ est inversible, on notera

$$B_A = \{T \in \mathcal{L}(H);\ C_A(T) \overset{def}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A^n T A^{-n}\| < \infty\}.$$

(1) Montrer que B_A est une algèbre contenant $\{A\}'$, que $B_A^* = B_{A^{*-1}}$ et que si $A = LA_1L^{-1}$, alors $B_A = LB_{A_1}L^{-1}$.

(2) (a) Montrer que si $A = \alpha I + N$ où N est nilpotent et $\alpha \neq 0$, alors $B_A = \{A\}'$.

(b) Montrer que si la dimension de H est finie, on a l'équivalence :

$$A = \alpha I + N \iff B_A = \{A\}'.$$

(3) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $B_A = \mathcal{L}(H)$;

(ii) $\mathcal{K}(H) \subseteq B_A$;

(iii) $A = \alpha WUW^{-1}$, avec $\alpha > 0$, W inversible et U unitaire.

Exercice X.18 : Théorème de Fuglede

Soit $\mathcal{A}$ une $C^\star$-algèbre.

(1) Montrer que si $a \in \mathcal{A}$ est normal, alors $\exp(a - a^*)$ est unitaire.

(2) Soit n, m deux éléments normaux de $\mathcal{A}$ et soit $c \in \mathcal{A}$.
Montrer l'implication $nc = cm \Rightarrow n^*c = cm^*$.
(Utiliser la fonction $g(z) = f(\exp(-zn^*)c\exp(zm^*))$ où $f \in \mathcal{A}^*$).

Exercice X.19

Soit $\mathcal{A}$ une $C^\star$-algèbre.

(1) Montrer que si $p \in \mathcal{A}$ un projecteur (c'est-à-dire si $p = p^2 = p^*$), alors

$$\lim_{t\to 0^+}(te + p)^{-1}p = p$$

(2) $v \in \mathcal{A}$ est dite une isométrie partielle si $vv^*v = v$ (voir l'Ex. VI.11).
Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) v est une isométrie partielle ;
(b) $\lim_{t\to 0^+}(te + vv^*)^{-1}v = v$;
(c) $\lim_{t\to 0^+} v(te + vv^*)^{-1} = v$;
(d) $\sum_{k\geq 0} \alpha(e - \alpha vv^*)^k v = v$ pour $0 < \alpha < \frac{2}{\|v\|^2}$.

(3) Soit $a \in \mathcal{A}$.

(i) Montrer que si $a \geq 0$, alors $\lim_{t\to+\infty} \|a\exp(-ta)\| = 0$.
(ii) Si $v \in \mathcal{A}$, montrer que

$$v \text{ est une isométrie partielle } \iff \int_0^\infty \exp(-tvv^*)v\,dt = v.$$

Exercice X.20

Soit $\mathbb{W}$ l'algèbre des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ dont la série de Fourier est absolument convergente, définie par :

$$\mathbb{W} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}; f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \exp(int) \text{ avec } f_n \in \mathbb{C} \text{ et } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f_n| < \infty\}.$$

Cette algèbre $\mathbb{W}$ est appelée algèbre de Wiener. Les f_n sont les coefficients de Fourier de f, soit $f_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$.

(1) Montrer que $\mathbb{W}$ munie de la norme $\|f\|_{\mathbb{W}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f_n|$ est bien une algèbre de Banach.

(On pourra montrer que $\mathbb{W}$ est isométriquement isomorphe à $\ell^1(\mathbb{Z})$).

(2) Montrer que si $g \in \mathbb{W}$ est de classe C^1, alors

$$||g||_{\mathbb{W}} \leq ||g||_\infty + 2||g'||_\infty.$$

(3) **(Lemme de Wiener)**
Soit $f \in \mathbb{W}$ telle que $f(t) \neq 0\ \forall t \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\frac{1}{f} \in \mathbb{W}$, autrement dit que

$$\left(\frac{1}{f}\right)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n e^{int} \text{ avec } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |g_n| < \infty.$$

2 Solutions

Exercice X.1

(1) (i) Soit $\lambda \neq 0$. Si $ab - \lambda e$ est inversible d'inverse u, on vérifie directement que $ba - \lambda e$ est inversible d'inverse $\frac{1}{\lambda}(bua - e)$, car

$$(ba - \lambda e)(bua - e) = b(abu)a - ba - \lambda bua + \lambda = b(\lambda u + e)a - ba - \lambda bua + \lambda = \lambda.$$

De même, $(bua - e)(ba - \lambda e) = \lambda$. Comme $\lambda \neq 0$, $\frac{1}{\lambda}(bua - e)$ est l'inverse de $(ba - \lambda e)$. a et b jouant des rôles symétriques, nous avons bien prouvé l'équivalence demandée.

(2) (i) $\sigma(ab) = \sigma(ba)$.

(a) Ceci est réalisé chaque fois que $ab = ba$. Il existe d'autres cas.

(b) Soit E un espace de dimension finie et $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.
Alors pour tout $a, b \in \mathcal{A}$, $\sigma(ab) = \sigma(ba)$.

(c) Soit E un espace de Banach de dimension infinie et soit T et S dans $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.
Si T ou S est un opérateur compact, alors TS et ST sont compacts, donc non-inversibles. D'après (1), on a $\sigma(TS) = \sigma(ST)$.

(ii) $\sigma(ab) \neq \sigma(ba)$.
D'après l'exemple précédent, on ne peut trouver d'exemple dans $\mathcal{L}(E)$ qu'en dimension infinie.
Soit $E = H$ un espace de Hilbert séparable muni d'une base orthonormée $(e_n, n \in \mathbb{N})$, S et $T = S^* \in \mathcal{L}(E)$ donnés par

$$\forall n \geq 0, Se_n = e_{n+1} \text{ et } Te_0 = 0,\ Te_n = e_{n-1}\ \forall n \geq 1.$$

Alors $TS = I$ donc $\sigma(TS) = \{1\}$; par contre, ST n'est pas inversible, en effet $ST = I - P_{\langle e_0 \rangle}$ où $P_{\langle e_0 \rangle}$ est la projection orthogonale sur le sous-espace engendré par e_0. Donc $0 \in \sigma(ST)$ et $\sigma(TS) \neq \sigma(ST)$.

Exercice X.2

(1) On sait que si $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach, le spectre $\sigma(a)$ de tout élément a de $\mathcal{A}$ est non-vide (P 10.3). Il existe donc un scalaire $\mu = \mu(a) \in \mathbb{C}$ tel que $a - \mu e = 0$, soit $a = \mu e$. $\mathcal{A}$ est ainsi identique à $\mathbb{C}e$.

(2) Si E n'est pas réduit au vecteur nul, il existe $T \neq 0, T \in \mathcal{L}(E)$. Pour un tel $T, \exists\, x \in E$ tel que $Tx \neq 0$. Par le théorème de Hahn-Banach (P 2.5), $\exists f \in E^*$ tel que $\langle x, f \rangle = 1$. Associons au couple (x, f) l'opérateur de rang un $x \otimes f$ défini par (*cf.* D 7.3) :

$$\forall y \in E, (x \otimes f)(y) = \langle y, f \rangle x.$$

Comme $(x \otimes f)(x) = x$, $x \otimes f$ est non-nul ; il est alors inversible donc surjectif. Ceci signifie que $E = \mathrm{Vect}(x)$, et E est un espace vectoriel de dimension 1 admettant pour base le vecteur x.

Dans ce cas, une application linéaire T est donnée par $Tx = zx, z \in \mathbb{C}$ donc $T = zI$ où I est l'identité de $\mathcal{L}(E)$. On retrouve donc $\mathcal{L}(E) = \mathbb{C}I$.

Exercice X.3

(1) (i) Clairement, $\mathcal{A}_T$ est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{A}$. D'autre part, toute sous-algèbre de $\mathcal{A}$ contenant T contient $\mathcal{A}_T$. C'est alors la plus petite sous-algèbre fermée de $\mathcal{A}$ contenant A, autrement dit c'est l'algèbre $\mathcal{B}$.

(ii) Soit P, $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$, le polynôme minimal de T. Puisque T est inversible, $0 \notin \sigma(T)$ et $P(0) = a_0 \neq 0$. Donc

$$0 = P(T) = a_0 I + \sum_{i=1}^n a_i T^i = a_0 I + T \sum_{i=1}^n a_i T^{i-1}.$$

On obtient,

$$T\left(-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^n a_i T^{i-1}\right) = \left(-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^n a_i T^{i-1}\right) T = I.$$

Donc $T^{-1} = -\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^n a_i T^{i-1} = Q(T) \in \mathcal{A}_T$.

(2) (i) Pour $x = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_n e_n \in H$, $Tx = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_n e_{n+1}$, donc $\|x\|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 = \|Tx\|^2$.

T est une isométrie, donc est injective à image fermée. Son image contient tous les e_n, donc T est surjective, et par suite inversible, avec

$$y = \sum_{-\infty}^{+\infty} y_n e_n \in H \Longrightarrow \quad T^{-1}y = \sum_{-\infty}^{+\infty} y_n e_{n-1}. \tag{X.2}$$

(ii) On remarque que si $M \subseteq H$ est un sous-espace invariant par T, au sens où $T(M) \subseteq M$, alors pour tout $S \in \mathcal{A}_T$, $S(M) \subseteq M$.

On a $T(E_n) \subseteq E_n$. Par contre, E_n n'est pas invariant par T^{-1}. En effet, $e_n \in E_n$ et par (X.2), $T^{-1}e_n = e_{n-1} \notin E_n$. Alors E_n n'est pas invariant par T^{-1} et donc $T^{-1} \notin \mathcal{A}_T$.

(3) Supposons que $0 \in \Omega_\infty$, alors par le théorème de Runge, il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes tels que $P_n(w)$ converge uniformément vers w^{-1} dans un voisinage ouvert V du spectre $\sigma(T)$ de T. Soit γ un lacet d'image contenue dans $V \setminus \sigma(T)$ entourant une fois chaque point de $\sigma(T)$. Alors, on sait que, pour tout $z \in \sigma(T)$, on a

$$P_n(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma P_n(w)\frac{1}{w-z}dw \text{ et } P_n(T) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma P_n(w)(wI-T)^{-1}dw. \tag{X.3}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma w^{-1}\frac{1}{w-z}dw \text{ et } T^{-1} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma w^{-1}(wI-T)^{-1}dw. \tag{X.4}$$

Comme $P_n(w)$ converge uniformément vers w^{-1} sur γ, on a $P_n(T) \to T^{-1}$ d'après (X.3) et (X.4). D'autre part, $P_n(T) \in \mathcal{A}_T$ pour tout n, donc $T^{-1} \in \overline{\mathcal{A}_T}$.

Exercice X.4

(1) Soit $x \in \mathcal{A}$. On suppose que $M(x) \neq \emptyset$. L'ensemble des degrés des éléments de $M(x)$ est minoré par 0, donc admet un plus petit élément noté r_x.

Si p et q sont de degré r_x, soit $p = dq + \rho$ l'identité de la division euclidienne de p par q. On a $0 = p(x) = d(x)q(x) + \rho(x)$ donc $\rho(x) = 0$, or le degré de $\rho(x)$ est strictement plus petit que r_x. Ce n'est donc pas un élément de $M(x)$ et il est nul. Comme p et q sont normalisés ils sont identiques, p_x existe donc et il est unique.

(2) Supposons $M(ab) \neq \emptyset$. Si $ab = 0$, on a $(ba)^2 = b(ab)a = 0$ donc $M(ba) \neq \emptyset$.

Si $ab \neq 0$, alors $r_{ab} \geq 1$. On peut utiliser le polynôme minimal de ab.

$$p_{ab}(ab) = (ab)^r + \sum_{j=0}^{r-1} t_j (ab)^j = 0;$$
$$\forall j,\ b(ab)^j a = (ba)^{j+1} = (ba)(ba)^j,$$

donc

$$0 = bp_{ab}(ab)a = (ba)^{r+1} + \sum_{j=0}^{r-1} t_j (ba)^{j+1} = q(ba) \ \text{ où } \ q(z) = zp_{ab}(z).$$

q est donc un élément de $M(ba)$.

(3) Notons $p_0 = p_{ab}$ et p_1 le polynôme $p_1(z) = zp_0(z), q_0 = p_{ba}$ et q_1 le polynôme $q_1(z) = zq_0(z)$.

La réponse à (1) et (2), et la symétrie des rôles de ab et ba, montrent que q_0 est un diviseur de p_1 et p_0 est un diviseur de q_1. Ceci signifie que

$$zp_0(z) = \alpha(z)q_0(z) \text{ et } zq_0(z) = \beta(z)p_0(z)$$

où α et β sont des polynômes. On en déduit que $z^2 p_0(z) = \alpha(z)\beta(z)p_0(z)$.

Comme, par définition de $M(ab)$, on a $p_0 \neq 0$, il en résulte que $\alpha(z)\beta(z) = z^2$.

Il y a alors trois possibilités

$$\alpha(z) = 1 \text{ et } q_0(z) = zp_0(z) \qquad (X.5)$$
$$\alpha(z) = z \text{ et } q_0(z) = p_0(z) \qquad (X.6)$$
$$\alpha(z) = z^2 \text{ et } p_0(z) = zq_0(z). \qquad (X.7)$$

Les cas $(X.5)$ et $(X.7)$ sont les mêmes par échange de a et b.

(4) (i) **Espace de dimension finie**.

Soit $\mathcal{A} = \mathcal{L}(H)$ où H est un espace de Hilbert de dimension finie. Par le théorème de Cayley-Hamilton, $M(X) \neq \emptyset$ pour tout $X \in \mathcal{L}(H)$.

Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Les polynômes p_0, q_0 sont les polynômes minimaux au sens usuel de AB et BA respectivement.

Supposons que $q_0(0) \neq 0$, alors BA est inversible. Puisque la dimension de H est finie, A et B sont inversibles et AB l'est aussi. $p_0(z)$ ne doit donc pas avoir de facteur z. La seule situation est donc celle du cas $(X.6)$.

Supposons que $q_0(0) = 0$, alors BA est non inversible. Ceci peut être obtenu de deux manières :

– soit A est non injectif, donc non surjectif. Alors AB n'est pas surjectif, a fortiori il est non inversible,

– soit B est non surjectif, donc non injectif. Alors, AB est non injectif. Donc $p_0(0) = 0$.

On peut être dans l'un des trois cas, comme le montrent les exemples qui suivent :

Si $A = B$, $p_0 = q_0$ (cas $(X.6)$).

Si H est un espace de Hilbert de dimension 2 muni d'une base (e_1, e_2), pour A donné par $Ae_1 = 0, Ae_2 = e_1$ et B donné par $Be_1 = 0, Be_2 = e_2$, alors $BA = 0, AB \neq 0, (AB)^2 = 0$ d'où $p_0(z) = zq_0(z)$ (cas $(X.7)$).

Le cas $(X.6)$ s'obtient évidemment en échangeant A et B dans l'exemple précédent.

(ii) **Espace de dimension infinie**.

Soit $\mathcal{A} = \mathcal{L}(H)$, où H est un espace de Hilbert de dimension infinie. Il peut arriver que $M(AB)$ soit vide.

(a) **Cas où $M(AB) \neq \emptyset$**. Si X est un opérateur borné de rang fini, $\ker(X)^\perp = \mathrm{Im}(X^*)$ est de dimension finie donc $H_1 = \mathrm{Vect}(\ker(X)^\perp, \mathrm{Im}(X))$ est de dimension finie. Notons $H_2 = (H_1)^\perp$, donc $H = H_1 \oplus H_2$; pour cette écriture on a $X = X_1 \oplus 0$, $X_1 \in \mathcal{L}(H_1)$. X_1 admet un polynôme minimal p_1. X admet pour polynôme minimal :

1. p_0, $p_0(z) = zp_1(z)$ si X_1 est injectif,
2. $p_0 = p_1$ dans le cas contraire $(\ker(X) \cap \mathrm{Im}(X) \neq \{0\})$.

Ceci va servir à fabriquer des couples (A, B) avec $M(AB) \neq \emptyset$.

Supposons A ou B borné de rang fini, il en est de même pour AB et BA.

Les ensembles $M(AB)$ et $M(BA)$ sont donc non-vides.

Choisissons par exemple, pour le Hilbert H muni d'une base orthonormale $(e_n, n \in \mathbb{N}^*)$, $A = e_1 \otimes e_1$ et $\forall n$, $Be_n = e_{n+1}$. On reconnaît dans B l'opérateur S de l'Ex. IV.5.

$BA = (Be_1) \otimes e_1 = e_2 \otimes e_1$; et $\forall n$, $ABe_n = Ae_{n+1} = 0$; par suite, $p_{AB}(z) = z$ et $p_{BA}(z) = z^2$.

(b) **Cas où $M(AB) = \emptyset$**. Soit $H = L^2([0, 1])$, A définie par $Af(x) = xf(x)$ et $B = I$. $p(AB) = p(A)$ est défini par $\forall f \in H, p(A)f(x) = p(x)f(x)$ donc $p(A) \neq 0$.

Exercice X.5

(1) Il est clair que $a_n - \lambda_n e \to a - \lambda e$ quand $n \to \infty$. Si $a - \lambda e$ est inversible, il existe un entier $N > 0$ tel que $\|(a_N - \lambda_N e) - (a - \lambda e)\| < \frac{1}{\|(a-\lambda e)^{-1}\|}$ et il résulte alors du lemme de Neumann P 10.1 que $a_N - \lambda_N e$ est inversible ; ceci est contraire à l'hypothèse ($\lambda_N \in \sigma(a_N)$) : $a - \lambda e$ est donc non inversible.

(2) Il suffit (quitte à prendre une sous-suite des a_n) de montrer que si

$$h = \sup(\|a_n^{-1}\|; n \in \mathbb{N}^*) < \infty,$$

alors a est inversible. Or, nous pouvons écrire

$$\|e - aa_n^{-1}\| = \|(a_n - a)a_n^{-1}\| \leq h\|a_n - a\|. \tag{X.8}$$

Donc, dès que $\|a_n - a\| < \frac{1}{h}$, (X.8) et le lemme de Neumann montrent que aa_n^{-1} est inversible, si bien que a l'est aussi.

Par conséquent, si a n'est pas inversible, la suite $\{\|a_n^{-1}\|, n \in \mathbb{N}^*\}$ tend vers l'infini. (Voir une solution alternative dans l'Ex. V.6).

Exercice X.6

(1) Soit $\mathcal{G}$ le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{A}$ et $\partial\mathcal{G}$ sa frontière.

Soit $y \in \partial\mathcal{G}$. Alors il existe $(y_n) \in \mathcal{G}$ telle que $y_n \to y$ dans $\mathcal{A}$.

Puisque y n'est pas inversible, l'Ex. X.5 montre que $\|y_n^{-1}\| \to +\infty$.

Par hypothèse, on a $\|y_n\|\,\|y_n^{-1}\| \leq M$. Cela implique $y_n \to 0$, puis $y = 0$.

(2) Soit $x \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \partial\sigma(x)$. Alors, $x - \lambda e \in \partial\mathcal{G}$. La question (1) montre que $x - \lambda e = 0$, soit $x = \lambda e$. Ceci montre que $\mathcal{A} = \mathbb{C}e$.

Exercice X.7

(1) La série $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} a^p$ est absolument convergente et donc elle est convergente (*cf.* P 2.1). On note sa somme $\exp(a)$ et l'on a

$$\|\exp(a)\| = \|\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} a^p\| \leq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}\|a\|^p = \exp(\|a\|).$$

(2) (i) Si $a_1 a_2 = a_2 a_1$, alors on a par produit de Cauchy absolument convergent :

$$\exp(a_1)\exp(a_2) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!}(a_1)^p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{q!}(a_2)^q\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}\frac{1}{(n-p)!}(a_1)^p(a_2)^{n-p}\right]$$

On a changé le couple de variables (p, q) en $(p, n = p + q)$. La somme entre crochets s'obtient en tenant compte de la commutation entre a_1 et a_2. Elle a pour valeur, en notant

C_n^p les coefficients usuels du binôme,

$$\frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n} C_n^p (a_1)^p (a_2)^{n-p} = \frac{1}{n!}(a_1 + a_2)^n$$

On a bien $\exp(a_1)\exp(a_2) = \exp(a_1 + a_2)$.

(ii) Un exemple est fourni par a_1, la matrice (2×2) de première ligne (01) et de seconde ligne (00), et $a_2 = a_1^*$.

(3) Si $\|e - a\| < 1$, alors la série $b = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(e - a)^n$ est absolument convergente. Comme dans le cas scalaire, on a $\exp(b) = a$.

Exercice X.8

(1) D'abord, si $a = \Pi_{i=1}^n \exp(a_i) \in \mathrm{Exp}(\mathcal{A})$, a est inversible, et son inverse est $a^{-1} = \Pi_{i=1}^n \exp(-a_{n-i+1})$. Donc, $\mathrm{Exp}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{G}$.

D'autre part, si $a \in \mathrm{Exp}(\mathcal{A})$ et si $x \in \mathcal{A}$ est tel que $\|x - a\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$ alors $\|e - a^{-1}x\| < 1$. Par l'Ex. X.7 (3), $a^{-1} = \exp(b)$ pour un $b \in \mathcal{A}$, et $x = a\exp(b) \in \mathrm{Exp}(\mathcal{A})$. Ceci montre que $\mathrm{Exp}(\mathcal{A})$ est ouvert dans $\mathcal{G}$.

Montrons que $\mathrm{Exp}(\mathcal{A})$ est fermé. Si la suite $a_n \in \mathrm{Exp}(\mathcal{A})$ et converge vers a, alors $a_n^{-1}a$ converge vers e, et pour n assez grand, on a $\|e - a_n^{-1}a\| < 1$. Comme plus haut, $a \in \mathrm{Exp}(\mathcal{A})$. Ceci montre que $\mathrm{Exp}(\mathcal{A})$ est fermé dans $\mathcal{G}$ (On retrouve sur cet exemple le fait qu'un sous-groupe d'un groupe topologique qui est d'intérieur non-vide est à la fois ouvert et fermé).

(2) Si $a = \Pi_{i=1}^n \exp(a_i) \in \mathrm{Exp}(\mathcal{A})$ alors l'application $\phi : [0, 1] \to \mathrm{Exp}(\mathcal{A})$, définie par $\phi(t) = \Pi_{i=1}^n \exp(ta_i)$ est continue, $\phi(0) = e$ et $\phi(1) = a$. Donc $\mathrm{Exp}(\mathcal{A})$ est connexe (par arcs) contenant e, par suite $\mathrm{Exp}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{G}_0$. Comme, d'après (1), $\mathrm{Exp}(\mathcal{A})$ est non-vide, ouvert et fermé, on a $\mathrm{Exp}(\mathcal{A}) = \mathcal{G}_0$.

(3) D'après (2), on voit que $\mathcal{G}_0$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}$.

D'autre part pour tout $b \in \mathcal{G}$, $b\mathcal{G}_0 b^{-1}$ est un connexe contenant e. Donc $b\mathcal{G}_0 b^{-1} = \mathcal{G}_0$. Ceci montre que $\mathcal{G}_0$ est un sous-groupe normal (on dit aussi distingué) de $\mathcal{G}$.

(4) Pour $b \in \mathcal{G}$, $b\mathcal{G}_0$ est connexe, ouvert et fermé dans $\mathcal{G}$. C'est donc une composante connexe de $\mathcal{G}$.

Maintenant, si $\Lambda \subseteq \mathcal{G}$ est une composante connexe et si $b \in \Lambda$, $b^{-1}\Lambda$ est aussi une composante connexe, et elle contient e. D'où $b^{-1}\Lambda = \mathcal{G}_0$, et $\Lambda = b\mathcal{G}_0$.

Finalement, les seules composantes connexes de $\mathcal{G}$ sont les $b\mathcal{G}_0$, avec $b \in \mathcal{G}$.

(5) Puisque $\mathcal{G}_0$ est un sous-groupe normal, $\mathcal{G}/\mathcal{G}_0$ est un groupe.

D'autre part, si $\overline{a} \in \mathcal{G}/\mathcal{G}_0$, on a $\overline{a} = a\mathcal{G}_0$.

Puisque $\mathcal{G}_0$ un sous-groupe ouvert, $a\mathcal{G}_0$ est un ouvert. Donc, par définition de la topologie-quotient, $\forall a \in \mathcal{G}$, $\overline{a}$ est ouvert dans $\mathcal{G}/\mathcal{G}_0$, et les ouverts de $\mathcal{G}/\mathcal{G}_0$ sont toutes les parties de $\mathcal{G}/\mathcal{G}_0$, qui est donc discret.

Exercice X.9

(1) Supposons que $a^m = e$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$, et $b_\lambda = \sum_{k=0}^{m-1}(\lambda - 1)^k(\lambda a)^{m-k-1}$.
Puisque $\lambda^m e - (\lambda - 1)^m e = (\lambda a)^m - ((\lambda - 1)e)^m$, on a

$$\lambda^m e - (\lambda - 1)^m e = (\lambda a + e - \lambda e)b_\lambda = b_\lambda(\lambda a + e - \lambda e).$$

Par conséquent, si $\lambda^m e - (\lambda - 1)^m e \neq 0$, alors $c_\lambda = \lambda a + e - \lambda e$ est inversible. Donc $c_\lambda \in \mathcal{G}$ sauf pour un nombre fini de λ. En particulier, $\Lambda = \{\lambda;\ c_\lambda \in \mathcal{G}\}$ est connexe.

Comme l'application $\phi(\lambda) = c_\lambda$ est continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{A}$, $\{c_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ est connexe. Or, $\phi(0) = c_0 = e$ et $\phi(1) = c_1 = a$, si bien que $a \in \mathcal{G}_0$.

(2) Remarquons que si $\mathcal{A}$ est commutative, on a $\mathcal{G}_0 = \{\exp(a);\ a \in \mathcal{A}\}$.

(i) Soit $a \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_0$ et $k < j$. Supposons que a^k et a^j sont dans une même composante connexe de $\mathcal{G}$. Si $m = j - k$, alors $a^m \in \mathcal{G}_0$. Par suite, il existe $b \in \mathcal{A}$ tel que $a^m = \exp(b)$.

Posons $c = \exp(\frac{1}{m}b)$. Cet élément vérifie $c^m = a^m$ et $(c^{-1}a)^m = e$. D'après (1), $c^{-1}a \in \mathcal{G}_0$. Comme $c \in \mathcal{G}_0$, $a \in \mathcal{G}_0$, ce qui contredit l'hypothèse.

(ii) C'est une conséquence immédiate de (a).

(3) Soit $f \in \mathcal{G}$, montrons qu'il existe un chemin continu dans $\mathcal{G}$, joignant f à 1. En effet, soit $f_t : [0, 1] \to \mathcal{G}$ définie par $f_t(x) = f(tx)$, $t \in [0, 1]$, alors $t \mapsto f_t$ est continue, $f_1 = f$ et $f_0 = f(0)$, la fonction constante. Posons $f(0) = \exp(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et soit g_t définie par $g_t(x) = \exp((1 - t)\alpha)$. Alors g_t joint $f(0)$ à la constante 1. Ceci montre que g est connexe (par arcs). Donc $g = g_0$. (*Signalons sans preuve le fait suivant : si $\mathbb{T}$ est le cercle-unité du plan complexe et si $\mathcal{A} = C_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, alors tout inversible f de $\mathcal{A}$ s'écrit $f(z) = z^n e^{g(z)}$ avec $g \in C_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$, si bien qu'ici $\mathcal{G}/\mathcal{G}_0$ est le groupe discret et dénombrable $\mathbb{Z}$.Un exemple plus extrême sera donné dans (5) qui suit).*

(4) Remarquons d'abord que $f \in \mathcal{G} \iff f(t) \neq 0\ \forall t \in [0, 1]$.

Si $f \in \mathcal{G}$ et f est positive, il existe $g \in \mathcal{A}$ tel que $f = \exp(g)$. Donc $f \in \mathcal{G}_0$.

Maintenant si $f \in \mathcal{G}$, alors f^2 est positive et donc $f^2 \in \mathcal{G}_0$. Ceci montre que $\mathcal{G}/\mathcal{G}_0$ est d'ordre 2. En effet, par le théorème de la valeur intermédiaire, $f \in \mathcal{G}$ est de signe constant. Si ce signe est +, $f \in \mathcal{G}_0$. Si c'est −, on a $-f \in \mathcal{G}_0$. Enfin, $-1 \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_0$.

(5) Remarquons que si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\delta_\alpha \star \delta_{-\alpha} = \delta_0$. D'où $\delta_\alpha \in \mathcal{G}$.

(a) Soit $\delta_\alpha \in \mathcal{G}_0$: il existe $\mu_\alpha \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ telle que $\delta_\alpha = \exp(\mu_\alpha)$. Pour alléger les notations, écrivons μ au lieu de μ_α. Rappelons que la transformée de Fourier $\widehat{\sigma}$ d'une mesure $\sigma \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ est la fonction : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ donnée par

$$\widehat{\sigma}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} d\sigma(x) \text{ et que } \widehat{\sigma_1 \star \sigma_2} = \widehat{\sigma_1}\,\widehat{\sigma_2}. \tag{X.9}$$

Il résulte de $(X.9)$ que $\widehat{\exp(\mu)} = \exp \widehat{\mu}$, si bien qu'on a on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{\delta_\alpha}(t) = \exp(-i\alpha t) = \exp(\hat{\mu}(t)).$$

D'où $-i\alpha t = \hat{\mu}(t) + 2ik(t)\pi$ pour un $k(t) \in \mathbb{Z}$. La fonction $t \mapsto k(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ d'après l'équation précédente, et par le théorème de la valeur intermédiaire, elle est constante puisqu'elle est à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Nous avons donc l'équation

$$-i\alpha t = \hat{\mu}(t) + 2ik(0)\pi \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{X.10}$$

Puisque $\hat{\mu}(t)$ est bornée par $\|\mu\|$ sur $\mathbb{R}$, $(X.10)$ montre que $\alpha = 0$.

(b) D'après (a), si δ_α et $\delta_{\alpha'}$ sont dans la même composante connexe de $\mathcal{G}$, on a $\alpha = \alpha'$. Puisque $\mathbb{R}$ est non-dénombrable, ceci montre que $\mathcal{G}/\mathcal{G}_0$ ne l'est pas non plus.

Exercice X.10

(1) Remarquons que $(xy)^n = x(yx)^{n-1}y$. D'où

$$\|(xy)^n\|^{\frac{1}{n}} \leq (\|x\|\,\|y\|)^{\frac{1}{n}} \|(yx)^{n-1}\|^{\frac{1}{n-1}} \|(yx)^{n-1}\|^{\frac{-1}{n(n-1)}}.$$

Par passage à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient $r(xy) \leq r(yx)$. Par symétrie des rôles de x et y, on a aussi $r(yx) \leq r(xy)$, puis $r(xy) = r(yx)$.

(2) Supposons qu'il existe $C > 0$ tel que : $\forall x \in \mathcal{A}$, $\|x\| \leq Cr(x)$.

Soit $x, y \in \mathcal{A}$ et considérons l'application $\psi(z) = \exp(-zx)y\exp(zx)$.

Par hypothèse et d'après (1), on a $\|\psi(z)\| \leq Cr(\psi(z))$, soit

$$\|\psi(z)\| \leq Cr(\exp(-zx)y\exp(zx)) = Cr(\exp(zx)\exp(-zx)y) = Cr(y).$$

Si $f \in \mathcal{A}^*$, l'application $z \mapsto f(\psi(z)) \stackrel{def}{=} \varphi(z)$ est entière et bornée sur $\mathbb{C}$. Par le théorème de Liouville, φ est constante. En particulier,

$$0 = \varphi'(z) = f(-x\exp(-zx)y\exp(zx) + \exp(-zx)yx\exp(zx)).$$

Faisant $z = 0$, on obtient $f(xy) = f(yx)$. Comme (Hahn-Banach !) les éléments de $\mathcal{A}^*$ séparent les points de $\mathcal{A}$, on en déduit $xy = yx\ \forall x, y \in \mathcal{A}$, ce qui montre bien que $\mathcal{A}$ est commutative.

(3) Supposons qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall x, y \in \mathcal{A}$, $\|xy\| \leq C\|yx\|$.

Comme dans (2), considérons l'application $\varphi(z) = f(\exp(-zx)y\exp(zx))$ avec $x, y \in \mathcal{A}$. Par hypothèse, on a $|\varphi(z)| \leq C\|\exp(zx)\exp(-zx)y\| = C\|y\|$. Par un raisonnement analogue à (2), on montre que $\mathcal{A}$ est commutative.

(4) $\|x\|^2 \leq C\|x^2\|$ implique que $\|x\|^k \leq C^{k-1}\|x^k\|$, $(k = 2^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots)$. D'où

$$\|x\| \leq \lim_{k\to\infty} C^{\frac{k-1}{k}} \|x^k\|^{\frac{1}{k}}.$$

Autrement dit, $\|x\| \leq Cr(x)$. Maintenant, (2) permet de conclure que $\mathcal{A}$ est commutative.

Exercice X.11

(1) (i) $\Rightarrow$ (ii). $\varphi(e) = 1$ implique $\varphi(x - \varphi(x)e) = 0$. Par (i) on a

$$0 = \varphi((x - \varphi(x)e)^2) = \varphi(x^2 - 2x\varphi(x) + \varphi(x)^2 e) = \varphi(x^2) - \varphi(x)^2.$$

D'où $\varphi(x^2) = \varphi(x)^2$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Remplaçant x par $x + y$ dans (ii), on obtient

$$\varphi(xy + yx) = 2\varphi(x)\varphi(y).\ \text{ Donc }\ \varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi(xy + yx) = 0. \tag{X.11}$$

D'où par (ii) de nouveau, $\varphi((xy + yx)^2) = 0$. D'autre part, d'après (X.11) avec y changé en yxy, et l'identité $(xy + yx)^2 + (xy - yx)^2 = 2((xy)^2 + (yx)^2)$, on a

$$\varphi((xy - yx)^2) = \varphi(2(x(yxy) + (yxy)x) - (xy + yx)^2) =$$

$$2\varphi(x(yxy) + (yxy)x) = 4\varphi(x)\varphi(yxy) = 0.$$

On a ainsi $\varphi(xy + yx) = 0$ *et* $\varphi(xy - yx) = 0$, ce qui donne $\varphi(xy) = 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Soit $x, y \in \mathcal{A}$. Puisque $\varphi(x - \varphi(x)e) = 0$, par (iii) on a

$$0 = \varphi((x - \varphi(x)e)y) = \varphi(xy - \varphi(x)y) = \varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y),$$

soit encore $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Évident.

(2) Considérons, pour chaque entier $n \geq 1$, le polynôme

$$P_n(z) = \varphi((ze - x)^n) = z^n - n\varphi(x)z^{n-1} + \tbinom{n}{2}\varphi(x^2)z^{n-2} + \ldots = \Pi_{i=1}^n (z - z_i),$$

où les $\{z_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ sont les racines de P_n et où on a utilisé $\varphi(e) = 1$. Si $i \in [1, n]$, nous avons par définition $0 = P_n(z_i) = \varphi((z_i e - x)^n)$. Puisque φ ne s'annule pas sur les éléments inversibles, $(z_i e - x)^n$ n'est pas inversible et $(z_i e - x)$ non plus, ce qui signifie que l'on a $\{z_i,\ i = 1, \ldots, n\} \subseteq \sigma(x)$ et que $|z_i| \leq r(x)$.

En utilisant les relations entre les coefficients et les racines de P_n, on obtient

$$\sum_{i=1}^n z_i = n\varphi(x) = 0 \ \text{ et } \ \sum_{i<j} z_i z_j = \tbinom{n}{2}\varphi(x^2).$$

D'où

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 + 2\sum_{i<j} z_i z_j = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 + n(n-1)\varphi(x^2)$$

et donc

$$n(n-1)|\varphi(x^2)| = |\sum_{i=1}^{n} z_i^2| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \leq n\big(r(x)\big)^2.$$

Il en résulte que $|\varphi(x^2)| \leq \frac{1}{n-1}\big(r(x)\big)^2$. En faisant tendre n vers l'infini, il vient $\varphi(x^2) = 0$.

(3) apparaît comme une conséquence directe des questions (1) et (2).

Exercice X.12

(1) Puisque $\varphi \neq 0$, soit $x_0 \in \mathcal{A}$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$. Alors, la relation $\varphi(x_0) = \varphi(x_0 e) = \varphi(x_0)\varphi(e)$ montre que $\varphi(e) = 1$.

Si x est inversible, on a $\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(e) = 1$, d'où $\varphi(x) \neq 0$.

(2) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, avec $|z| \geq 1$, $e - z^{-1}x$ est inversible (puisque $\|x\| < 1$). D'où, par (1), $1 - z^{-1}\varphi(x) = \varphi(e - z^{-1}x) \neq 0$. Ceci montre que pour tout $z \in \mathbb{C}$, avec $|z| \geq 1$, $\varphi(x) \neq z$. Donc $|\varphi(x)| < 1$.

(3) D'après (2), φ est bornée et $\|\varphi\| \leq 1$. Comme $\varphi(e) = 1$, on a $\|\varphi\| = 1$.

Exercice X.13

(1) (i) Si a est normal (*cf.* D 10.11),

$$\|a^2\|^2 = \|(a^*)^2 a^2\| = \|(a^*a)^*(a^*a)\| = \|a^*a\|^2 = \|a\|^4.$$

Donc $\|a^2\| = \|a\|^2$.

Comme a normal implique $a^{2^{n-1}}$ normal pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\|a^{2^n}\|^2 = \|(a^{2^{n-1}})^2\|^2 = \|a^{2^{n-1}}\|^4 = \ldots$$

Il en résulte que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}.$$

(ii) D'après (i), on a $\|a^{2^k}\| = \|a\|^{2^k}$ pour $k = 1, 2, \ldots$

D'où $\|a^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \|a\|$ pour $k = 1, 2, \ldots$ Par passage à la limite quand k tend vers l'infini, il vient $\|a\| = r(a)$.

(2) Si $\mathcal{A}$ est commutative, il est évident que tout élément de $\mathcal{A}$ est normal.

Supposons maintenant que tout élément de $\mathcal{A}$ est normal, alors par (1), $\|x\| = r(x)$ pour tout $x \in \mathcal{A}$. En appliquant l'Ex. X.10.(2), on conclut que $\mathcal{A}$ est commutative.

Exercice X.14

(1) Pour $x \in \mathcal{A}$, $\Phi(x) = \Phi(xe) = \Phi(ex) = \Phi(x)\Phi(e) = \Phi(e)\Phi(x)$. D'où $\Phi(e) = e$. D'autre part, si x est inversible, alors

$$e = \Phi(e) = \Phi(xx^{-1}) = \Phi(x^{-1}x) = \Phi(x)\Phi(x^{-1}) = \Phi(x^{-1})\Phi(x)$$

il en résulte que $\Phi(x)$ est inversible et que $\Phi(x^{-1}) = \Phi(x)^{-1}$.

Maintenant, si $\Phi(x)$ est inversible alors $x = \Phi^{-1}(\Phi(x))$ est inversible.

Donc x est inversible si et seulement si $\Phi(x)$ l'est. D'où

$$\begin{aligned} z \notin \sigma(x) &\iff x - ze \text{ inversible } \iff \Phi(x - ze) = \Phi(x) - ze \text{ inversible} \\ &\iff z \notin \sigma(\Phi(x)) \text{ et donc } \sigma(\Phi(x)) = \sigma(x). \end{aligned}$$

(2) Remarquons que $\|x\|^2 = \|xx^*\| = r(xx^*)$ (pour la dernière égalité, voir l'Ex. X.13 (1)), d'où

$$\|\Phi(x)\|^2 = \|\Phi(x)\Phi(x)^*\| = \|\Phi(xx^*)\| = r(\Phi(xx^*)).$$

(3) En utilisant (1) et (2), on obtient que

$$\|x\|^2 = r(xx^*) = r(\Phi(xx^*)) = \|\Phi(x)\|^2.$$

Donc $\|\Phi(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathcal{A}$, CQFD.

Exercice X.15

Soit $\mathcal{A}$ une $C^\star$-algèbre et $a \in \mathcal{A}$. Posons $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|$ et $b = a - e$. Puisque $a \geq e$, on a $b \geq 0$ et $\exp(tb) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$. D'autre part,

$$\|\exp(ta)\| = \|\sum_{n\geq 0} \frac{(ta)^n}{n!}\| \leq \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}\|a^n\| \leq M\exp(t), \ \forall t \geq 0.$$

Ainsi, $\|\exp(tb)\| \leq M$, $\forall t \geq 0$. Remarquons alors que

$$\exp(tb) = e + tb + \frac{t^2b^2}{2!} + \ldots \geq tb, \ \forall t \geq 0.$$

Il en résulte l'inégalité

$$0 \leq b \leq \frac{\exp(tb)}{t}, \ \forall t \geq 0.$$

Par conséquent, $\|b\| \leq \frac{\|\exp(tb)\|}{t} \leq \frac{M}{t}$, $\forall t > 0$. Par passage à la limite quand $t \to \infty$, on obtient $b = 0$ et $a = e$.

Exercice X.16

Rappelons que S est le shift unilatéral maintes fois considéré dans cet ouvrage (*cf.* aussi Ex. VII.27). La $C^\star$-algèbre engendrée par S est la plus petite algèbre de Banach incluse dans $\mathcal{L}(H)$ contenant à la fois S et S^*.

(1) On a $S^*e_1 = 0$ et, pour $n \geq 2$, $S^*e_n = e_{n-1}$, ainsi que $S^*S = I$ et $SS^* = I - e_1 \otimes e_1$. Donc $e_1 \otimes e_1 = I - SS^* \in \mathcal{A}_S$.

D'autre part
$$\forall p, q \in \mathbb{N}^*, S^p e_q = e_{q+p}.$$
Par ailleurs, on peut vérifier facilement (*cf.* P 7.8 et P 7.10) les équations
$$A(u \otimes v) = Au \otimes v \text{ et } (u \otimes v)A = u \otimes A^* v,$$
ce qui nous donne :
$$\forall n, p \in \mathbb{N}^*,\ S^{n-1}(e_1 \otimes e_1)(S^*)^{p-1} = S^{n-1}e_1 \otimes S^{p-1}e_1 = e_n \otimes e_p.$$
Cela montre que tous les $e_n \otimes e_p$ sont dans $\mathcal{A}_S$.

(2) Pour $x_{(p)} = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$ et $y_{(n)} = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$, on peut écrire
$$x_{(p)} \otimes y_{(n)} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} x_j \overline{y_k}(e_j \otimes e_k).$$
On a donc $x_{(p)} \otimes y_{(n)} \in \mathcal{A}_S$.

Remarquons d'abord que si $x, y \in H$, alors
$$\|x \otimes y\| = \sup(\|\langle u, y\rangle x\|; \|u\| = 1) = \|x\| \sup(|\langle u, y\rangle|; \|u\| = 1),$$
soit encore
$$\|x \otimes y\| = \|x\|\,\|y\|.$$
Maintenant, avec les notations précédentes $x_{(p)}, y_{(n)}$, on a
$$x = \lim_{p\to\infty} x_{(p)} \text{ et } y = \lim_{n\to\infty} y_{(n)}$$
$$\text{avec } \|x_{(p)}\| \leq \|x\| \text{ et } \|y_{(n)}\| \leq \|y\|.$$
D'autre part,
$$x \otimes y - x_{(p)} \otimes y_{(n)} = (x - x_{(p)}) \otimes y_{(n)} + x_{(p)} \otimes (y - y_{(n)}),$$
et donc
$$\|x \otimes y - x_{(p)} \otimes y_{(n)}\| \leq \|x - x_{(p)}\|\,\|y\| + \|y - y_{(n)}\|\,\|x\|,$$
ce qui prouve que
$$x \otimes y = \lim_{p,n\to\infty}(x_{(p)} \otimes y_{(n)}).$$
Comme $\mathcal{A}_S$ est fermée dans $\mathcal{L}(H)$, cela donne $x \otimes y \in \mathcal{A}_S$.

(3) Tout opérateur borné de rang fini est combinaison linéaire d'opérateurs $x \otimes y$ de rang 1, donc $\mathcal{K}_0(H) \subseteq \mathcal{A}_S$. L'ensemble des opérateurs compacts est $\mathcal{K}(H) = \overline{\mathcal{K}_0(H)}$. Comme $\mathcal{A}_S$ est fermée, on a aussi $\mathcal{K}(H) \subseteq \mathcal{A}_S$.

Exercice X.17

(1) L'inclusion $\{A\}' \subseteq B_A$ est évidente. B_A est une algèbre car

$$\|A^n T_1 T_2 A^{-n}\| = \|A^n T_1 A^{-n} A^n T_2 A^{-n}\| \leq \|A^n T_1 A^{-n}\| \, \|A^n T_2 A^{-n}\|.$$

D'où $C_A(T_1 T_2) \leq C_A(T_1) C_A(T_2)$.
Puisque $\|A^n T A^{-n}\| = \|(A^n T A^{-n})^*\| = \|A^{*-n} T^* A^{*n}\|$, on a $B_A^* = B_{A^{*-1}}$
D'autre part :

$$\begin{aligned}\|(LA_1L^{-1})^n T (LA_1L^{-1})^{-n}\| &= \|LA_1^n L^{-1} T L A_1^{-n} L^{-1}\| \\ &\leq \|L\| \, \|L^{-1}\| \, \|A_1^n (L^{-1}TL) A_1^{-n}\|,\end{aligned}$$

d'où $L^{-1}TL \in B_{A_1} \Longrightarrow T \in B_A$ et $LB_{A_1}L^{-1} \subset B_{LA_1L^{-1}} = B_A$.
Pour l'autre inclusion, on voit que

$$\|A_1^n L^{-1} T L A_1^{-n}\| = \|L^{-1}(LA_1L^{-1})^n T (LA_1L^{-1})^{-n} L\|$$

$$\leq \|L\| \, \|L^{-1}\| \, \|(LA_1L^{-1})^n T (LA_1L^{-1})^{-n}\| = \|L\| \, \|L^{-1}\| \, \|A^n T A^{-n}\|,$$

d'où $T \in B_A \Longrightarrow L^{-1}TL \in B_{A_1}$, $L^{-1}B_A L \subset B_{A_1}$ et donc $B_A \subset LB_{A_1}L^{-1}$.

(2) (a) Remarquons qu'on peut supposer que $A = I + N$ (quitte à remplacer A par $\frac{A}{\alpha}$). Par ailleurs (*cf.* Ex. V.12), il est facile de voir que

$$A = I + N \iff A = \exp(Q) \text{ avec } Q \text{ nilpotent.}$$

Supposons que Q est nilpotent d'ordre $d \geq 2$: $Q^{d-1} \neq 0; Q^d = 0$. On a alors

$$\exp(nQ) T \exp(-nQ) = \sum_{0 \leq i,j < d} (-1)^j \frac{n^i Q^i}{i!} T \frac{n^j Q^j}{j!}$$

$$= \sum_{k=0}^{2d-2} n^k \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j Q^{k-j} T Q^j}{j!(k-j)!} \right) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{2d-2} C_k n^k.$$

Autrement dit, on a

$$\| \exp(nQ) T \exp(-nQ)\| = \| \sum_{k=0}^{2d-2} C_k n^k \| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En divisant successivement par $n^{2d-2}, \ldots, n$ et en faisant $n \to \infty$, on voit de proche en proche que tous les coefficients $C_k \in \mathcal{A}$ sont nuls :

$$C_{2d-2} = \ldots = C_1 = C_0 = 0.$$

En particulier, on a $C_1 = QT - TQ = 0$, et par suite $AT = TA$.

(b) Supposons que la dimension de H est finie et que $B_A = \{A\}'$.

Montrons alors que $\sigma(A)$ est réduit à un point. Soit de nouveau $u \otimes v \in \mathcal{K}(H)$ l'opérateur de rang un défini par $u \otimes v(x) = \langle x, v \rangle u$. Si $\lambda, \mu \in \sigma(A)$ sont tels que $Au = \lambda u$ et $A^* v = \overline{\mu} v$ avec $u, v \neq 0$ et $|\lambda| \leq |\mu|$, nous avons

$$A^n(u \otimes v)A^{-n} = A^n u \otimes A^{*-n} v = \lambda^n u \otimes \overline{\mu}^{-n} v = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n u \otimes v = O(1).$$

D'après l'hypothèse, $u \otimes v$ commute avec A. Ceci implique que $\lambda = \mu$. En effet :

$$A(u \otimes v) = Au \otimes v = \lambda(u \otimes v) \text{ et } (u \otimes v)A = u \otimes A^* v = u \otimes \overline{\mu} v = \mu(u \otimes v).$$

Par conséquent, le spectre de A inversible est réduit à un point et donc il existe $\alpha \neq 0$ tel que $A = \alpha I + N$ avec N nilpotent.

(3) Les implications (iii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii) sont évidentes via (1).

Montrons que (ii) $\Rightarrow$ (iii). Considérons $T_n(X) = A^n X A^{-n},\ X \in B_A$ et $n \geq 0$.

Par hypothèse, $\mathcal{K}(H) \subseteq B_A$: la suite $T_n : \mathcal{K}(H) \to \mathcal{K}(H)$ vérifie

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(K)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A^n K A^{-n}\| < \infty,\ \forall K \in \mathcal{K}(H).$$

Puisque $\mathcal{K}(H)$ est un espace de Banach, le théorème de Banach-Steinhaus nous donne $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| = M < \infty$.

Pour tout couple (u, v) de vecteurs normés, on a, en utilisant les relations faciles à vérifier et déjà utilisées (*cf.* Ex. X.16 et P 7.8, P 7.10) :

$$P(u \otimes v)Q = Pu \otimes Q^* v \text{ et } \|a \otimes b\| = \|a\|\,\|b\|,$$

l'inégalité

$$M \geq \|T_n(u \otimes v)\| = \|A^n u \otimes A^{*-n} v\| = \|A^n u\|\,\|A^{*-n} v\|.$$

Il en résulte que $\|A^n\|\,\|A^{-n}\| \leq M\ \forall n \geq 0$, en prenant le sup sur les couples (u, v). Puis, en prenant les racines n-ièmes : $\|A^n\|^{\frac{1}{n}} \|A^{-n}\|^{\frac{1}{n}} \leq M^{\frac{1}{n}}$, et par passage à la limite, on obtient $r(A)r(A^{-1}) \leq 1$. Mais on a toujours $1 \leq r(A)r(A^{-1})$, puisque

$$1 = \|A^n A^{-n}\| \leq \|A^n\|\,\|A^{-n}\|\ \forall n \geq 0.$$

D'où $r(A)r(A^{-1}) = 1$. Posons maintenant $\alpha = r(A)$: l'opérateur $A_1 = \frac{1}{\alpha} A$ a son spectre dans le cercle unité ainsi que A_1^{-1}, et on a donc

$$\min(\|A_1^n\|, \|A_1^{-n}\|) \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il en résulte que

$$n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \|A_1^n\| \leq \|A_1^{|n|}\|\,\|A_1^{-|n|}\| = \|A^{|n|}\|\,\|A^{-|n|}\| \leq M.$$

D'après l'Ex. V.11 (théorème de Nagy), l'opérateur A_1 est semblable à un opérateur unitaire U, soit $A_1 = WUW^{-1}$ et finalement $A = \alpha WUW^{-1}$.

Exercice X.18

(1) Posons $b = \exp(a - a^*)$. Puisque a et a^* commutent, nous avons

$$b^*b = \exp(a^* - a)\exp(a - a^*) = \exp((a^* - a) + (a - a^*)) = \exp(0) = e$$

et de même $bb^* = e$, donc b est unitaire.

(2) On voit par récurrence que $nc = cm \Rightarrow n^p c = cm^p\ \forall p \in \mathbb{N}$, puis que $P(n)c = cP(m)$ pour tout polynôme P. Puisque, pour chaque $z \in \mathbb{C}$, $\exp(\overline{z}n)$ et $\exp(\overline{z}m)$ sont des limites dans $\mathcal{A}$ de polynômes en n et m, respectivement, on a également

$$\exp(\overline{z}n)c = c\exp(\overline{z}m),\ \ \forall z \in \mathbb{C}. \tag{X.12}$$

On vise maintenant la relation $\exp(zn^*)c = c\exp(zm^*)\ \forall z \in \mathbb{C}$, ou encore $\exp(-zn^*)c\exp(zm^*) = c$, ce qu'on obtiendra si on prouve que la fonction entière $\varphi(z) = f(\exp(-zn^*)c\exp(zm^*))$ est constante pour toute $f \in \mathcal{A}^*$ fixée. Pour cela, on remarque d'abord que

$$\exp(-zn^*)c\exp(zm^*) = \exp(-zn^*)\exp(\overline{z}n)c\exp(-\overline{z}m)\exp(zm^*). \tag{X.13}$$

$$\exp(-zn^*)c\exp(zm^*) = \exp(-zn^* + \overline{z}n)c\exp(-\overline{z}m + zm^*). \tag{X.14}$$

En effet, $(X.13)$ découle de $(X.12)$ puisque

$$\exp(\overline{z}n)c\exp(-\overline{z}m) = c\exp(\overline{z}m)\exp(-\overline{z}m) = c.$$

Et $(X.14)$ découle de $(X.13)$ et de la normalité de n et m, qui entraîne (rappelons que $\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$ dès que a et b commutent)

$$\exp(-zn^* + \overline{z}n) = \exp(-zn^*)\exp(\overline{z}n); \exp(-\overline{z}m + zm^*) = \exp(-\overline{z}m)\exp(zm^*).$$

Posant $U(z) = \exp(-zn^* + \overline{z}n)$ et $V(z) = \exp(-\overline{z}m + zm^*)$, on voit que $U(z)$ et $V(z)$ sont unitaires d'après la question (1), car $\overline{z}n$ et zm^* sont normaux, et que, d'après $(X.14)$, on a $\varphi(z) = f(U(z)cV(z))$ si bien que

$$|\varphi(z)| \leq \|f\|\,\|U(z)\|\,\|c\|\,\|V(z)\| = \|f\|\,\|c\|.$$

Par le théorème de Liouville, $\varphi(z)$ est constante. Donc $\varphi(z) = \varphi(0)$ et en particulier le coefficient du terme de degré 1 est nul. Or, ce coefficient vaut $f(-n^*c + cm^*)$, d'où $f(n^*c) = f(cm^*)$ et finalement $n^*c = cm^*$.

Exercice X.19

(1) Remarquons que

$$\overset{def}{=} (te + p)^{-1}p = (te + p)^{-1}(te + p - te)p = p - t(te + p)^{-1}p = p - tx.$$

D'où $x = (te + p)^{-1}p = \frac{p}{1+t}$ et donc $\lim_{t\to 0^+}(te + p)^{-1}p = p$.

(2) $(a) \Rightarrow (b)$. Supposons que v est une isométrie partielle. Alors $p = vv^*$ est un projecteur, et en utilisant (1) on obtient :

$$\lim_{t\to 0^+}(te + vv^*)^{-1}v = \lim_{t\to 0^+}(te + p)^{-1}pv = pv = vv^*v = v,$$

ce qui est la conclusion souhaitée.

Montrons que $(b) \Rightarrow (a)$. On a

$$(te + vv^*)^{-1}vv^*v = (te + vv^*)^{-1}(te + vv^* - te)v = v - t(te + vv^*)^{-1}v.$$

D'où

$$vv^*v = \lim_{t\to 0^+}(te + vv^*)^{-1}vv^*v = \lim_{t\to 0^+}(v - t(te + vv^*)^{-1}v) = v,$$

comme demandé.

Pour l'équivalence « $(a) \iff (c)$ », il suffit de remarquer que « $vv^*v = v \iff v^*vv^* = v^*$ » et d'utiliser l'équivalence « $(a) \iff (b)$ ».

$(a) \Rightarrow (d)$ Supposons que v est une isométrie partielle. Puisque $p = vv^*$ est un projecteur, on a $(e - \alpha p)^k p = (1 - \alpha)^k p$. D'où

$$\sum_{k\geq 0}\alpha(e - \alpha vv^*)^k vv^* = \sum_{k\geq 0}\alpha(1 - \alpha)^k vv^* = vv^*\alpha\sum_{k\geq 0}(1 - \alpha)^k = vv^*$$

Comme $vv^*v = v$, on a $\sum_{k\geq 0}\alpha(e - \alpha vv^*)^k v = v$.

$(d) \Rightarrow (a)$. Soit $A_n = \sum_{k=0}^n \alpha(e - \alpha vv^*)^k v$. Par hypothèse, on a $A_n \to v$. D'où, $A_n v^*v \to vv^*v$. D'autre part,

$$A_n v^*v = \sum_{k=0}^n (e - \alpha vv^*)^k(\alpha vv^* - e + e)v = \left(-\sum_{k=0}^n (e - \alpha vv^*)^{k+1} + \sum_{k=0}^n (e - \alpha vv^*)^k\right)v$$

$$= (e - (e - \alpha vv^*)^{n+1})v = v - (e - \alpha vv^*)^{n+1}v.$$

Comme, $(e - \alpha vv^*)^{n+1}v \to 0$, $A_n v^*v \to v$, par l'unicité de la limite, on obtient $vv^*v = v$ et donc v est une isométrie partielle.

(3) (i) On a, pour tout $t \geq 0$, $\exp(ta) = e + ta + \frac{(ta)^2}{2!} + \ldots \geq ta$, et par suite $\exp(ta) - ta \geq 0$. Mais puisque $\exp(-ta) = \exp(-\frac{t}{2}a)\exp(-(\frac{t}{2}a)^*)$ est ≥ 0 et commute avec $\exp(ta) - ta$, on a d'après l'Ex. VI.6 :

$$\exp(-ta)(\exp(ta) - ta) = e - ta\exp(-ta) \geq 0.$$

Par conséquent, $0 \leq ta\exp(-ta) \leq e$ et $\|ta\exp(-ta)\| \leq 1$, ce qui implique

$$\lim_{t\to +\infty}\|a\exp(-ta)\| \leq \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t} = 0.$$

(ii) Supposons que v est une isométrie partielle. Puisque vv^* est un projecteur, on a

$$\exp(-tvv^*) = e - vv^* + \exp(-t)vv^* \text{ et par suite } \exp(-tvv^*)v = \exp(-t)v.$$

Il en résulte que

$$\int_0^\infty \exp(-tvv^*)v dt = \left(\int_0^\infty \exp(-t)dt\right) v = v.$$

Réciproquement, supposons cette relation vérifiée, et posons $A(t) = \int_0^t \exp(-svv^*)v ds$. Alors :

$$\begin{aligned} A(t)v^* &= \int_0^t \left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n (vv^*)^n vv^* \frac{s^n}{n!}\right) ds = \sum_{n\geq 0}(-1)^n (vv^*)^n vv^* \int_0^t \frac{s^n}{n!} ds \\ &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}(vv^*)^{n+1} = -\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{t^n}{n!}(vv^*)^n = e - \exp(-tvv^*), \end{aligned}$$

d'où

$$v^*A(t)v^* = -v^* \exp(-tvv^*) + v^*.$$

Maintenant, nous voyons que

$$\|v^* \exp(-tvv^*)\|^2 = \|(v^* \exp(-tvv^*))^*(v^* \exp(-tvv^*))\| = \|vv^* \exp(-2tvv^*)\|,$$

et (i) montre que le dernier terme tend vers 0, d'où $\lim_{t\to+\infty} v^* \exp(-tvv^*) = 0$. Finalement, $v^*A(t)v^* \to v^*$ quand $t \to +\infty$. Comme d'autre part $A(t) \to v$ par hypothèse, on a aussi $v^*A(t)v^* \to v^*vv^*$. L'unicité de la limite donne $v^*vv^* = v^*$ et donc $vv^*v = v$.

Exercice X.20

(1) L'application $\varphi : \mathbb{W} \to \ell^1(\mathbb{Z})$ obtenue en posant $\varphi(f) = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bien définie, linéaire, et par définition de la norme dans $\mathbb{W}$, c'est une isométrie. De plus, si $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \exp(int)$ est uniformément (car normalement) convergente sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \exp(int)$ appartient à $\mathbb{W}$ et $\varphi(f) = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Ainsi, φ est une isométrie surjective et par suite $\mathbb{W}$ est isométriquement isomorphe à $\ell^1(\mathbb{Z})$ (*cf.* D 1.15).

Ceci montre que $\mathbb{W}$ est un espace de Banach. Il reste à montrer que $\mathbb{W}$ est stable par produit ponctuel. Soit pour cela $f, g \in \mathbb{W}$, avec

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \exp(int) \text{ et } g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n \exp(int).$$

Puisque les deux séries sont absolument convergentes, on a

$$h(t) \overset{def}{=} f(t)g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_k g_m \exp(i(k+m)t),$$

soit en posant $n = k + m$,

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k g_{n-k} \right) \exp(int) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \exp(int)$$

avec $h_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k g_{n-k}$ et l'on a de plus

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h_n| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} | \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k g_{n-k}| &\leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f_k|\, |g_{n-k}| \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f_k| \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |g_{n-k}| \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f_k| \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |g_n| \right),\end{aligned}$$

soit $\|fg\|_{\mathbb{W}} \leq \|f\|_{\mathbb{W}} \|g\|_{\mathbb{W}}$. $\mathbb{W}$ est bien une algèbre de Banach. On observera que $\varphi : \mathbb{W} \to \ell^1(\mathbb{Z})$ est aussi un isomorphisme d'algèbre, puisque

$$\varphi(fg) = \varphi(f) \star \varphi(g) \ \forall f, g \in \mathbb{W}.$$

(2) Soit $g \in \mathbb{W}$ de classe C^1,

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n \exp(int) \text{ avec } g_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \exp(-int) dt.$$

Une intégration par parties donne $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g'(t) \exp(-int) dt = ing_n$. Ensuite, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la relation de Parseval, on obtient

$$\sum_{n \neq 0} |g_n| = \sum_{n \neq 0} |ng_n| \frac{1}{|n|} \leq \left(\sum_{n \neq 0} n^2 |g_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \|g'\|_2 \leq 2\|g'\|_\infty.$$

D'où

$$\|g\|_{\mathbb{W}} = |g_0| + \sum_{n \neq 0} |g_n| \leq |g_0| + 2\|g'\|_\infty \leq \|g\|_\infty + 2\|g'\|_\infty.$$

(3) Supposons que $f \in \mathbb{W}$, avec $f(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$. Sans perte de généralité on peut supposer que $|f(t)| \geq 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Écrivons $f = P - Q$ avec

$$P(t) = \sum_{n=-N}^{N} f_n \exp(int), \ Q(t) = -\sum_{|n|>N} f_n \exp(int),$$

où l'entier N est choisi pour avoir $\|Q\|_{\mathbb{W}} \leq \frac{1}{3}$ et a fortiori $\|Q\|_\infty \leq \frac{1}{3}$. Alors on a $|P(t)| = |f(t) + Q(t)| \geq |f(t)| - |Q(t)| \geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Donc $\|\frac{1}{P}\|_\infty \leq \frac{3}{2}$.

On a $f = P - Q = P(1 - \frac{Q}{P})$, et puisque $\|\frac{Q}{P}\|_\infty \leq \frac{1}{2}$, on peut écrire une série de Neumann :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{P - Q} = \frac{1}{P(1 - \frac{Q}{P})} = \frac{1}{P}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q^n}{P^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q^{n-1}}{P^n}. \qquad (X.15)$$

Montrons que cette dernière série est absolument convergente dans $\mathbb{W}$. En effet,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{Q^{n-1}}{P^n}\right\|_{\mathbb{W}} &\leq \left\|Q^{n-1}\right\|_{\mathbb{W}}\left\|\frac{1}{P^n}\right\|_{\mathbb{W}} \leq \left\|Q\right\|_{\mathbb{W}}^{n-1}\left(\left\|\frac{1}{P^n}\right\|_{\infty} + 2\left\|\frac{nP'}{P^{n+1}}\right\|_{\infty}\right)\\ &\leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2n\|P'\|_\infty\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right) = O\left(\frac{n}{2^n}\right),\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la question (2). La série (X.15) converge donc dans $\mathbb{W}$ vers une fonction $h \in \mathbb{W}$. A fortiori, elle converge simplement vers h. Mais cette série converge aussi simplement vers $\frac{1}{f}$. Par unicité de la limite, on obtient $\frac{1}{f} = h$, donc $\frac{1}{f} \in \mathbb{W}$.

Cette preuve du lemme de Wiener qui n'utilise pas la théorie de Gelfand des algèbres de Banach, mais seulement une variante du lemme de Neumann et les vertus de la série géométrique, est due au mathématicien américain Donald Newman (1975).

Références

Chapitre I

1. Ex. I.7 p. 15 (classe de Zygmund) : Y. Katznelson, *An Introduction To Harmonic Analysis*, Third edition 2004, Cambridge Mathematical Library, p. 52
2. Ex. I.9 (Isométries) : J. Dieudonné, *Fondements de l'Analyse moderne*, Gauthier-Villars 1965, p. 99

Chapitre II

1. Ex. II.2 : JP. Kahane, « Propriétés prévalentes, versus génériques, des images continues », *Bull. Sc. Math.* 130(2006), 97-109
2. Ex. II.2 : B.R. Hunt, « The prevalence of continuous nowhere differentiable functions », *Proceedings of the American mathematical Society* Vol. 122 (1994), 711-717
3. Ex. II.14 (relèvement de ℓ^1) : D. Li, H. Queffélec, « Introduction à l'étude des espaces de Banach, analyse et probabilités », Cours spécialisé de la SMF 12 (2004), chap. 7

Chapitre III

1. Ex. III.2 : S. Wagon, « The Banach-Tarski paradox », Cambridge University Press 1985

Chapitre IV

1. Ex. IV.10 : théorème de Pitt, F. Albiac, N. Kalton, « Topics in Banach Space Theory », Springer 2006, p. 32
2. Ex. IV.2 : exemple de Weiertsrass, G. Valiron, « Théorie des fonctions », deuxième édition, Masson 1948

Chapitre V

1. Ex. V.11 : B.S. Nagy, « On uniformly bounded linear transformations in Hilbert spaces », *Acta Sci. Math.* (Szeged) (1947), 152-157
2. Ex. V.12 : W. Rudin, *Analyse fonctionnelle*, Ediscience International (1995), p. 324

Chapitre VI

1. Ex. VI. 12 : M. Mbekhta, « Partial isometries and generalized inverses », *Acta Sci. Math.* (Szeged) 70 (2004), 767-781
2. Ex. VI.14 : P.R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, Springer Second Edition 1982, ex. 140, p. 76
3. Ex. VI.15 : ibidem, ex. 136, p. 75
4. Ex. VI.15 corrigé : ibidem, ex. 221, p. 118-119
5. Ex. VI.15 : K.R. Davidson, « $C^\star$-Algebras by Example », Fields Institute Monographs, 1996, p. 43
6. Ex. VI. 16, VI. 17 : C.L. Olsen et G.K. Pedersen, « Convex combinations of unitary operators in von Neumann algebras », *J. Funct. Anal.* 66 (1986), 365-380

Chapitre VII

1. Ex. VII.4 (constante de Kottman) : A. Wells, B. Williams, « Embeddings and Extensions in Analysis », Springer 1970
2. Ex. VII.24 (théorème de Feintuch) : A. Feintuch, « On asymptotic Toeplitz and Hankel operators », Operator Theory, Advances and Applications, 41, Birkhäuser, Basel 1989, pp. 241-254

Chapitre VIII

1. Ex. VIII.2 (pont brownien) : A.N. Shiryaev, « Probability », second edition, Springer 1996, p. 306-30
2. Ex. VIII.8 : H. Widom, « Lectures on integral equations », Van Nostrand mathematical studies, 17 (1969)
3. Ex. VIII.8 : K. Yosida, « Lectures on differential and integral equations », Interscience publishers, N.Y. 1960
4. EX.VIII.10 (Propriété de Daugavet) : H. Kamowitz, « A property of compact operators », *Proc. Amer. Math. Soc.* 91(2)(1984), 231-236

Chapitre IX

1. Ex. IX.2 corrigé : D. Li, H. Queffélec, « Introduction à l'étude des espaces de Banach, analyse et probabilités », Cours spécialisé de la SMF 12 (2004), p. 2 et p. 244
2. Ex. IX.12 (théorème de Banach-Saks) : D. Werner, Funktionalanalysis, 6., korrigierte Auflage, Springer 2007, p. 227-228
3. ibidem : F. Albiac, N. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Springer 2006, p. 46

Chapitre X

1. Ex. X.9 : H. Queffélec, *Topologie* Dunod 2007, p. 200
2. Ex. X.17 : J.A. Deddens, « Another description of nest algebras in Hilbert space operators », Lecture notes in Mathematics No. 693, (pp. 77-86), Springer-Verlag, Berlin, 1978.
3. Ex. X.17 : J.P. Williams, « On a boundedness condition for operators with a singleton spectrum », *Proc. Amer. Math. Soc.* 78 (1980), 30-32.
4. Ex. X.17 : D. Drissi et M. Mbekhta, « On the commutant and orbits of conjugation », *Proc. Amer. Math. Soc.* 134 (2005), 1099-1106
5. Ex. X.20 : D.J. Newman, « A Simple Proof of Wiener's $\frac{1}{f}$ Theorem », *Proc. Amer. Math. Soc.* 48 (1)(1975), 264-265
6. Ex. X.11 : M. Rotman et Y. Sternfeld, « When is a linear functional multiplicative ? » *Trans. Amer. Math. Soc.* 267 (1981), 111-124.