5 Bases d'ouverts, bases de voisinages

Définition 11 *Soit (X, τ) un espace topologique et x un point de X.*

- *On dit qu'une famille $\mathcal{B}$ d'ouverts est une base d'ouverts de (X, τ) (ou base de la topologie τ) si tout ouvert $\mathcal{O} \in \tau$ s'écrit comme réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.*
- *On dit qu'une famille $\mathcal{B}(x)$ de voisinages de x ($\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$) est une base de voisinages de x (ou système fondamental de voisinages de x) si tout voisinage V de x contient un voisinage W de x appartenant à $\mathcal{B}(x)$:*

$$\forall V \in \mathcal{V}(x),\ \exists W \in \mathcal{B}(x) : \quad W \subset V.$$

Exemple 39 Dans un espace topologique discret X, la famille $\mathcal{B} = \{\{x\}\ ;\ x \in X\}$ est une base d'ouverts et $\mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}$ est une base de voisinages du point $x \in X$.

Exemple 40 Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, la famille de tous les intervalles ouverts $\mathcal{B} = \{]a, b[\ ;\ a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ constitue une base d'ouverts, et la famille $\mathcal{B}(x) = \{]x - h, x + h[\ ;\ h > 0\}$ (des intervalles ouverts centrés en x) est une base de voisinages du point $x \in \mathbb{R}$.

Remarque 14 Tout point x d'un espace topologique (X, τ) admet une base de voisinages. Il s'agit de la famille des ouverts de X contenant x :

$$\mathcal{B}(x) = \{\mathcal{O} \in \tau\ ;\ x \in \mathcal{O}\}.$$

Remarque 15 Si deux topologies τ_1 et τ_2 sur un ensemble X admettent une même base d'ouverts, alors elles sont identiques. Ainsi, la donnée d'une base d'ouverts suffit pour déterminer la topologie correspondante.

Remarque 16 Dans plusieurs situations, il est possible de se limiter à des raisonnements sur les éléments d'une base $\mathcal{B}(x)$ de voisinages d'un point x de X au lieu de manipuler tous les voisinages du point x. Par exemple, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\forall V \in \mathcal{V}(x) : \quad V \cap A \neq \varnothing$

ii) $\forall V \in \mathcal{B}(x) : \quad V \cap A \neq \varnothing.$

De même, dans plusieurs situations, il est possible de se limiter à des raisonnements sur les éléments d'une base d'ouverts au lieu de manipuler la totalité des ouverts.

Proposition 14 (Caractérisation d'une base d'ouverts) *Soit (X, τ) un espace topologique et $\mathcal{B}$ une famille d'ouverts. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *$\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de (X, τ);*

ii) *Pour tout $\mathcal{O} \in \tau$ et tout $x \in \mathcal{O}$, il existe $B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x \subset \mathcal{O}$.*

Preuve. Laissée en exercice. ■

Le résultat suivant donne une connection entre les bases d'ouverts et les bases de voisinages.

Proposition 15 *Soit (X, τ) un espace topologique et $\mathcal{B}$ une famille d'ouverts. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *$\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de (X, τ);*

ii) *Pour tout $x \in X$, la famille $\mathcal{B}(x) = \{\mathcal{O} \in \mathcal{B}\ ;\ x \in \mathcal{O}\}$ (des éléments de $\mathcal{B}$ contenant x) est une base de voisinages de x.*

Preuve. Laissée en exercice. ■

Proposition 16 *Un espace topologique à base finie ou dénombrable d'ouverts est séparable.*

Preuve. Soit I un ensemble fini ou dénombrable d'indices, et soit $\{B_n\}_{n \in I}$ une base d'ouverts non vides. Si pour tout $n \in I$, on choisit un x_n dans B_n, alors la partie finie ou dénombrable $D = \{x_n\ ;\ n \in I\}$ est dense, car elle rencontre tout ouvert non vide de X. ■

6 Comparaison de topologies, topologie engendrée par une famille de parties

Définition 12 (Comparaison de deux topologies) *Soit X un ensemble muni de deux topologies τ_1 et τ_2. On dira que τ_1 est <u>plus fine</u> que τ_2 (ou que τ_2 est <u>moins fine</u> que τ_1) si τ_2 est incluse dans τ_1, i.e. si tout ouvert de (X, τ_2) est un ouvert de (X, τ_1).*

Exemple 41 On munit $X = \{a, b, c, d, e\}$ des topologies :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, c, d\}, \{a, b, e\}\}, \\ \tau_2 &= \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, c, d\}\}, \\ \tau_3 &= \{\varnothing, X, \{a, b\}, \{c, d, e\}\}. \end{aligned}$$

τ_1 est plus fine que τ_2.

τ_1 et τ_3 sont incomparables ; de même pour τ_2 et τ_3.

Remarque 17 Si τ_1 est plus fine que τ_2 et τ_2 est plus fine que τ_1, alors (X, τ_1) et (X, τ_2) admettent les mêmes ouverts. Dans ce cas, on dira que les topologies τ_1 et τ_2 sont *équivalentes.*

Remarque 18 La relation *"être plus fine"* est une relation d'ordre partiel sur l'ensemble de toutes les topologies possibles sur X ; la topologie grossière étant la moins fine et la topologie discrète la plus fine d'elles.

Proposition 17 *L'intersection d'une famille quelconque $(\tau_i)_{i\in I}$ de topologies définies sur X est une topologie sur X. Elle est moins fine que toutes les topologies τ_i.*

Preuve. Il est clair que $\bigcap\limits_{i\in I} \tau_i$ contient $\varnothing$ et X. D'autre part, chacune des topologies τ_i étant stable par réunion quelconque et intersection finie, il en est de même pour $\bigcap\limits_{i\in I} \tau_i$. ■

Définition 13 (Topologie engendrée) *Soit $\mathcal{P}$ une famille quelconque de parties d'un ensemble X ($\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$). La topologie la moins fine contenant $\mathcal{P}$ est appelée topologie engendrée par $\mathcal{P}$. Cette topologie est égale à l'intersection de toutes les topologies sur X contenant $\mathcal{P}$, i.e. si on note $\widehat{\mathcal{P}}$ cette topologie, on aura*

$$\widehat{\mathcal{P}} = \bigcap_{\substack{\tau \text{ topologie sur } X \\ \text{t.q. } \tau \supset \mathcal{P}}} \tau$$

En convenant de poser $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = X$ et $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \varnothing$ dans le cas où $(A_i)_{i\in I}$ est une famille vide de parties de X, i.e. si $I = \varnothing$, on a la

Proposition 18 *Les intersections finies des éléments de la famille $\mathcal{P}$ forment une base d'ouverts de $\widehat{\mathcal{P}}$. Autrement dit, tout élément de $\widehat{\mathcal{P}}$ est une réunion quelconque d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{P}$.*

Exemple 42 Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$ et $\mathcal{P} = \{\{a\}, \{a, e\}, \{d, e\}\}$. La famille des intersections finies des éléments de $\mathcal{P}$ est $\mathcal{B} = \{X, \{a\}, \{a, e\}, \{d, e\}, \varnothing, \{e\}\}$. En formant toutes les réunions possibles des éléments de $\mathcal{B}$, on obtient la topologie engendrée par $\mathcal{P}$:

$$\widehat{\mathcal{P}} = \{\varnothing, X, \{a\}, \{e\}, \{a, e\}, \{d, e\}, \{a, d, e\}\}.$$

7 Topologie induite (ou trace), sous-espace topologique

Lemme 1 (Topologie induite) *Soit A une partie non vide d'un espace topologique (X, τ). La famille $\tau_A = \{A \cap \mathcal{O};\ \mathcal{O} \in \tau\}$ définit une topologie sur A.*

Définition 14 *τ_A est appelée topologie induite (ou topologie trace) sur A par τ. La paire (A, τ_A) est appelée sous-espace topologique de (X, τ).*

Exemple 43 On munit $X = \{a, b, c, d, e\}$ de la topologie $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, c, d\}\}$. La topologie induite sur $A = \{b, c, d\}$ par τ est $\tau_A = \{\varnothing, A, \{c, d\}\}$. Observons que $\tau_A \not\subset \tau$.

Ainsi, si ω est une partie de A, alors

$$\omega \text{ est un ouvert dans } A \iff \text{il existe un ouvert } \mathcal{O} \text{ dans } X \text{ tel que } \omega = A \cap \mathcal{O}.$$

De là il vient

Corollaire 4 *Soit A une partie non vide d'un espace topologique (X, τ). On munit A de la topologie induite τ_A.*

i) *Les fermés de A sont les ensembles de la forme $A \cap F$ avec F fermé dans X.*

ii) *Soit a un point de A. Les voisinages de a dans A sont les ensembles de la forme $A \cap V$ avec V voisinage de a dans X.*

Preuve.

i) Pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de X, on a

$$A \setminus (A \cap \mathcal{O}) = A \setminus \mathcal{O} = A \cap (X \setminus \mathcal{O}).$$

Donc les fermés de A sont les ensembles de la forme $A \cap F$ avec F fermé dans X.

ii) Soit $a \in A$. Pour tout voisinage V de a dans X, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de X tel que $a \in \mathcal{O} \subset V$. D'où on a $A \cap \mathcal{O} \subset A \cap V$. Or, $A \cap \mathcal{O}$ est un ouvert de A contenant a, donc $A \cap V$ est un voisinages de a dans A.

Réciproquement, si W est un voisinage de a dans A, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de X tel que $a \in A \cap \mathcal{O} \subset W$ d'où $a \in \mathcal{O} \subset \mathcal{O} \cup W$. Par conséquent, $V := \mathcal{O} \cup W$ est un voisinage de a dans X et on a

$$A \cap V = A \cap (\mathcal{O} \cup W) = (A \cap \mathcal{O}) \cup (A \cup W) = (A \cap \mathcal{O}) \cup W = W.$$

■

Exemple 44 On munit $\mathbb{R}$ de la topologie usuelle.

– Si $A = [0, 1[$, alors

la partie $\omega = \left[0, \frac{1}{2}\right[$ est un ouvert dans A car $\omega = A \cap \left]-1, \frac{1}{2}\right[$,
la partie $F = \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ est un fermé dans A car $F = A \cap \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

– Si $A = [0,1[\cup \{3\}$, alors la partie $\omega = [0,1[$ est à la fois ouverte et fermée dans A car $\omega = A \cap]-1,1[= A \cap [-1,1]$.

Exemple 45 On munit $\mathbb{R}$ de la topologie usuelle. Soit $A = \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le singleton $\{n\}$ est un ouvert dans $\mathbb{N}$ car

$$\{n\} = \mathbb{N} \cap]n-1, n+1[\,.$$

Il s'ensuit que si B est une partie arbitraire de $\mathbb{N}$, alors $B = \bigcup\limits_{n \in B} \{n\}$ est un ouvert dans $\mathbb{N}$. Ainsi, la topologie $\tau_{\mathbb{N}}$ induite sur $\mathbb{N}$ par la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ est discrète :

$$\tau_{\mathbb{N}} = \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Exemple 46 Tout sous-espace d'un espace discret est discret et tout sous-espace d'un espace grossier est grossier.

Remarque 19 Soit A une partie non vide d'un espace topologique (X, τ) et B une partie de A. On a les implications :

$$\begin{array}{lcll} B \text{ est ouverte dans } X & \Longrightarrow & B \text{ est ouverte dans } A, & (\text{car } B = A \cap B \text{ avec } B \in \tau) \\ B \text{ est fermée dans } X & \Longrightarrow & B \text{ est fermée dans } A. & (\text{car } B = A \cap B \text{ avec } B \text{ fermé dans } X). \end{array}$$

Les réciproques sont fausses en général, comme le montre l'exemple 44.

Dans ce contexte, on a

Proposition 19 *Soit A une partie non vide d'un espace topologique (X, τ). On a*

i) *A est un ouvert dans X $\Longleftrightarrow$ tout ouvert dans A est ouvert dans X (i.e. $\tau_A \subset \tau$).*

ii) *A est un fermé dans X $\Longleftrightarrow$ tout fermé dans A est fermé dans X.*

Preuve. Supposons A ouvert dans X et soit B un ouvert dans A, alors il existe un ouvert $\mathcal{O}$ dans X tel que $B = A \cap \mathcal{O}$. Comme A et $\mathcal{O}$ sont deux ouverts dans X, B l'est aussi.

Inversement, si tout ouvert dans A est ouvert dans X, alors A est ouvert dans X car ouvert dans A. ■

Remarque 20 Soit (X, τ) un espace topologique et A un sous-espace topologique de X. Soit B une partie non vide de A. Pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de X, on a

$$B \cap \mathcal{O} = (B \cap A) \cap \mathcal{O} = B \cap (A \cap \mathcal{O}).$$

On en déduit que les topologies sur B induites par celle de X et par celle de A coïncident, i.e. $\tau_B = (\tau_A)_B$.

Proposition 20 *Tout sous-espace d'un espace topologique séparé est séparé. On dit que la séparation est une propriété <u>héréditaire</u>.*

Preuve. Soit A un sous-espace topologique d'un espace séparé X. Soient x, y deux points distincts de A. Comme X est séparé, il existe deux voisinages dans X, V de x et V' de y tels que $V \cap V' = \varnothing$. Il s'ensuit que $(A \cap V) \cap (A \cap V') = A \cap (V \cap V') = \varnothing$. Donc $A \cap V$ et $A \cap V'$ sont deux voisinages dans A de x et y respectivement et sont disjoints, ce qui signifie que A est séparé. ■

Proposition 21 *Un sous-espace d'un espace topologique séparable n'est pas nécessairement séparable. La séparabilité n'est pas une propriété héréditaire.*

Preuve. Laissée en exercice. ■

8 Suites et limites

Une <u>suite</u> d'éléments d'un ensemble non vide X est une application s de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie non vide de $\mathbb{N}$) dans X. L'image $s(n)$ d'un $n \in \mathbb{N}$ par s sera notée x_n et sera appelée <u>terme d'ordre n</u> de la suite s. La suite s sera notée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(x_n)_n$ ou $(x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...)$. On ne doit pas confondre la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec l'ensemble de ses termes $\{x_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$. Par exemple, l'ensemble des termes de la suite $(1, -1, 1, -1, ...)$ définie par $x_n = (-1)^n$ est $\{x_n \,;\, n \in \mathbb{N}\} = \{-1, +1\}$.
Une suite <u>constante</u> est une suite dont les termes ont tous la même valeur. Une suite <u>stationnaire</u> est une suite constante à partir d'un certain rang.
Si $(x_n)_n$ est une suite de X, on appellera <u>sous-suite</u> (ou <u>suite extraite</u>) de $(x_n)_n$ une suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_n$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. Par exemple, $(x_{2n})_n$, $(x_{2n+1})_n$, $(x_{n+1})_n$ ... sont des sous-suites de $(x_n)_n$.
Une sous-suite de $(x_n)_n$ est généralement notée $(x_{n_k})_k$ avec $n_k = \varphi(k)$ ($(n_k)_k$ est alors une suite strictement croissante d'entiers naturels).

Définition 15 *Soient (X, τ) un espace topologique, $(x_n)_n$ une suite de X et $\ell \in X$.*

– *On dit que ℓ est <u>une limite</u> de la suite $(x_n)_n$ ou que $(x_n)_n$ <u>converge</u> vers ℓ quand n tend vers l'infini si pour tout voisinage V de ℓ, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans V. Cela se résume en*

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell),\ \exists N_V \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_V :\ x_n \in V.$$

– *La suite $(x_n)_n$ est dite <u>convergente</u> si elle a une (ou plusieurs) limite(s), <u>divergente</u> si elle n'a pas de limite.*

Notation 1 Si ℓ est une limite de la suite $(x_n)_n$, on note $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque 21 Dans la définition ci-dessus, il est possible de remplacer l'ensemble des voisinages $\mathcal{V}(\ell)$ par une base $\mathcal{B}(\ell)$ de voisinages de ℓ.

Exemple 47 Une suite stationnaire dans un espace topologique est convergente. En effet, si $(x_n)_n$ est une suite stationnaire alors il existe $a \in X$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $x_n = a$, alors tout voisinage V de a contient tous les termes de $(x_n)_n$ à partir du rang N.

Exemple 48 Dans un espace topologique discret, une suite $(x_n)_n$ est convergente si et seulement si elle est stationnaire.

Exemple 49 Dans un espace topologique grossier, une suite $(x_n)_n$ converge vers tout point de X. En effet, tout point x de X n'admet qu'un seul voisinage X. Si $(x_n)_n$ est une suite dans X, tout point de X est alors une limite de $(x_n)_n$.

Proposition 22 *Soient $(x_n)_n$ une suite dans un espace topologique X et $\ell \in X$.*

1. *Si X est séparé et si $(x_n)_n$ admet une limite dans X, alors cette limite est unique.*
2. *Si $(x_n)_n$ converge vers ℓ, alors toute sous-suite de $(x_n)_n$ converge également vers ℓ.*
3. *La suite $(x_n)_n$ converge vers ℓ si et seulement si les sous-suites $(x_{2n})_n$ et $(x_{2n+1})_n$ convergent vers ℓ.*

Preuve.

1. Supposons que la suite $(x_n)_n$ ait deux limites distinctes $\ell_1 \neq \ell_2$. Comme X est séparé, il existe $V_1 \in \mathcal{V}(\ell_1)$ et $V_2 \in \mathcal{V}(\ell_2)$ tels que $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. D'après la définition 15 des limites, il existe deux entiers N_1 et N_2 tels que

$$(\forall n \geq N_1 :\ x_n \in V_1) \quad \text{et} \quad (\forall n \geq N_2 :\ x_n \in V_2).$$

Mais alors, $x_{\max\{N_1, N_2\}} \in V_1 \cap V_2 = \varnothing$ ce qui est absurde.

■

Notation 2 Si ℓ est la limite d'une suite $(x_n)_n$ dans un espace topologique séparé X, on note ceci $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

Proposition 23 *Soient X un espace topologique, A une partie de X et x un point de X.*

1. *S'il existe une suite $(a_n)_n$ dans A qui converge vers x, alors $x \in \overline{A}$.*
2. *Réciproquement, si $x \in \overline{A}$ et si x admet une base dénombrable de voisinages, alors il existe une suite $(a_n)_n$ dans A qui converge vers x.*

Preuve.

1. Soit V un voisinage de x, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_N \in V$, donc $A \cap V \neq \varnothing$. Ainsi, tout voisinage V de x rencontre A ce qui signifie que $x \in \overline{A}$.
2. Laissée en exercice.

■

9 Applications continues, homéomorphismes

Définition 16 *Soit (X, τ) et (Y, τ') deux espaces topologiques, a un point de X et f une application de X dans Y.*

1. *On dit que f est <u>séquentiellement continue au point a</u> si pour toute suite $(x_n)_n$ de X convergeant vers a, la suite image $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$ dans Y, i.e.*

$$\forall (x_n) \subset X : \quad x_n \xrightarrow{X} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{Y} f(a).$$

2. *On dit que f est <u>continue au point a</u> si l'image réciproque de tout voisinage de $f(a)$ est un voisinage de a. Cela s'écrit :*

$$\forall V' \in \mathcal{V}(f(a)) : \; f^{-1}(V') \in \mathcal{V}(a). \tag{1}$$

3. *On dit que f est <u>continue sur X</u> si elle est continue en tout point de X.*

   On note $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble de toutes les applications continues de X dans Y.

Remarque 22 Dans (1), on peut remplacer $\mathcal{V}(f(a))$ par une base de voisinages $\mathcal{B}(f(a))$ de $f(a)$. En particulier, on peut remplacer $\mathcal{V}(f(a))$ par la famille des ouverts de Y contenant le point $f(a)$.

Exemple 50 On munit les ensembles $X = \{a, b, c, d\}$ et $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ respectivement des topologies

$$\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\} \quad \text{et} \quad \tau' = \{\varnothing, Y, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Soit f l'application de (X, τ) dans (Y, τ') définie par

$$f(a) = f(b) = 1,\ f(c) = 2 \text{ et } f(d) = 4.$$

On vérifie aisément que f est continue au point d et qu'elle n'est pas continue au point c.

Exemple 51 On munit $\mathbb{R}$ de la topologie usuelle.

- La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ *(Faire un graphique et raisonner)*.
- La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

  $$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in]-\infty, 1] \\ x+1 & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

  n'est pas continue au point $a = 1$ *(Faire un graphique et raisonner)*.

Exemple 52 L'application identique $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ définie de $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie discrète n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$ (Pour tout $a \in \mathbb{R}$, prendre $V' = \{a\}$ lequel est un voisinage de $f(a) = a$).

Grâce aux propriétés des images directe et réciproque :

$$\begin{aligned} \forall A &\in \mathcal{P}(X) : \quad A \subset f^{-1}[f(A)], \\ \forall B &\in \mathcal{P}(Y) : \quad f\left[f^{-1}(B)\right] \subset B, \end{aligned}$$

on peut reformuler la définition de continuité en un point comme suit :

Définition 17 *L'application $f : X \to Y$ est dite continue au point $a \in X$ si*

$$\forall V' \in \mathcal{V}(f(a)),\ \exists V \in \mathcal{V}(a) : \quad f(V) \subset V'. \tag{2}$$

Remarque 23 Dans (2), on peut remplacer $\mathcal{V}(f(a))$ par une base de voisinages $\mathcal{B}(f(a))$ de $f(a)$ et $\mathcal{V}(a)$ par une base de voisinages $\mathcal{B}(a)$ de a.

Remarque 24 Si a est un point isolé dans X, toute application $f : X \to Y$ est continue en a. En effet, dans (2) il suffit de prendre $V = \{a\}$ lequel est un voisinage de a.

Remarque 25 Si X est discret, toute application $f : X \to Y$ est continue car tout point de X est isolé.

Proposition 24 *Pour une application $f : X \to Y$ et un point $a \in X$, on a l'implication*

$$(f \text{ continue en } a) \implies (f \text{ séquentiellement continue en } a).$$

La réciproque exige l'existence d'une base dénombrable de voisinages de a.

Proposition 25 (Transitivité de la continuité) *Soient X, Y et Z trois espaces topologiques, et $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications.*

i) *Si f est continue en $a \in X$ et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f : X \to Z$ est continue en a.*

ii) *Si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est aussi continue.*

Preuve.

i) Si V est un voisinage de $g \circ f(a) = g(f(a))$ dans Z, alors $g^{-1}(V)$ est un voisinage de $f(a)$ dans Y en raison de la continuité de g, puis $f^{-1}\left[g^{-1}(V)\right]$ est un voisinage de a dans X car f est continue en a. On conclut en observant que $f^{-1}\left[g^{-1}(V)\right] = (g \circ f)^{-1}(V)$.

ii) Appliquer le point (ii) à chaque point $a \in X$.

■

Proposition 26 (Caractérisations de la continuité sur un ensemble) *Pour deux espaces topologiques (X, τ) et (Y, τ') et une application $f : X \to Y$, on a équivalence entre :*

(i) *f est continue sur X.*

(ii) *L'image réciproque de tout ouvert de Y est un ouvert de X, i.e.*

$$\forall \mathcal{O}' \in \tau',\ f^{-1}(\mathcal{O}') \in \tau.$$

(iii) *L'image réciproque de tout fermé de Y est un fermé de X.*

(iv) *Pour toute partie A de X, on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

Remarque 26 Dans le point (ii) de la proposition ci-dessus, on peut remplacer la famille τ' des ouverts de Y par une base d'ouverts de Y.

Remarque 27 En général, l'image directe d'un ouvert (resp. fermé) par une application continue n'est pas ouverte (resp. fermée). Voici deux exemples :

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ est continue mais $f(]-1,1[) = [0,1[$ n'est pas un ouvert dans $\mathbb{R}$;
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \arctan x$ est continue mais $g(\mathbb{R}) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

Remarque 28 Soient τ_1 et τ_2 deux topologies sur X ; alors τ_1 est plus fine que τ_2 si et seulement si l'application identique $\mathrm{id} : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ est continue.

Proposition 27 *Soient X et Y deux espaces topologiques et A un sous-espace topologique de X.*

i) *L'injection canonique $i : A \to X$, $x \mapsto x$ est continue sur A.*

ii) *Si $f : X \to Y$ est une application continue sur X, alors sa restriction $f|_A$ est continue sur A.*

Preuve.

i) Si $\mathcal{O}$ est un ouvert de X, alors

$$i^{-1}(\mathcal{O}) = \{x \in A \,;\, i(x) \in \mathcal{O}\} = \{x \in A \,;\, x \in \mathcal{O}\} = A \cap \mathcal{O}$$

est un ouvert dans A. Par conséquent, i est continue en vertu de la proposition 26.

ii) Il est aisé de voir que $f|_A = f \circ i$ où i est l'injection canonique de A dans X. D'où la continuité de $f|_A$ comme composée de deux applications continues.

■

Définition 18 (Homéomorphisme) *Soit (X, τ) et (Y, τ') deux espaces topologiques. Une application $f : X \to Y$ est dite un homéomorphisme si elle est bijective de X sur Y et f et f^{-1} sont continues (on dit alors que f est bicontinue).*
S'il existe un homéomorphisme de (X, τ) sur (Y, τ'), on dit que (X, τ) et (Y, τ') sont homéomorphes.

Exemple 53 On munit $\mathbb{R}$ de sa topologie usuelle et les ensembles $]0, +\infty[$, $[0, +\infty[$ et $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.
- L'application $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est un homéomorphisme de réciproque $f^{-1} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$.
- Pour tout entier naturel n, l'application $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, $x \mapsto x^n$ est un homéomorphisme de réciproque $f^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.
- L'application $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x$ est un homéomorphisme de réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $x \mapsto \arctan x$. $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Remarque 29 A la lumière de la proposition 26, une bijection f de X sur Y est un homéomorphisme si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert (fermé) de Y est un ouvert (fermé) de X, et l'image directe de tout ouvert (fermé) de X est un ouvert (fermé) de Y (observer que $f(\mathcal{O}) = (f^{-1})^{-1}(\mathcal{O})$).

Remarque 30 Les homéomorphismes jouissent des propriétés suivantes :
- L'application réciproque d'un homéomorphisme est un homéomorphisme (si f est bijective alors $(f^{-1})^{-1} = f$).
- La composée $f \circ g$ de deux homéomorphismes est un homéomorphisme (si f et g sont bijectives alors $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$).
- L'ensemble de tous les homéomorphismes d'un espace X sur lui-même est un groupe pour la loi $\circ$.

A la lumière de la remarque 28, on a

Proposition 28 *Deux topologies τ_1 et τ_2 sur un même ensemble X sont équivalentes (égales) si et seulement si l'application identique* $\mathrm{id} : X \to X$ *est un homéomorphisme de (X, τ_1) sur (X, τ_2).*

Définition 19 (Propriété topologique) *Une propriété d'un espace topologique X est dite propriété topologique (ou invariant topologique) si elle est conservée par tout homéomorphisme défini sur X à valeurs dans un espace topologique quelconque Y.*

Par exemple,

Proposition 29 *Les propriétés de séparation et de séparabilité sont des propriétés topologiques.*