المصفوفات والمحددات

Matrices et déterminants

1-1 المصفوفات

تعريف

ليكن m و n عددين طبيعيين غير معدومين.

نسمي **مصفوفة** matrice $m \times n$ عناصر الحقل IK $(IK = IR$ أو $IK = IC)$ المرتبة في جدول يحتوي على صفوف (m سطر و n عمود) والمحصورة بين قوسين أو حاضنتين من الشكل :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix} \text{ أو } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

- نرمز للمصفوفة بالحروف $\mathrm{A}, \mathrm{B}, C, \ldots$ أو $\mathrm{A} = (a_{ij})$ حيث $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$.
- نسمي العنصر a_{ij} **معامل** coefficient المصفوفة و هو يقع في السطر i والعمود j.
- إذا كانت المصفوفة تحتوي على m سطر و n عمود نقول أنها ذات **بعد** dimension أو **رتبة** ordre أو **مقاس** taille $m \times n$.
- نرمز إلى مجموعة المصفوفات $m \times n$ ومعاملات من IK بـ $M_{m,n}(IK)$.

مثال1

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & \sqrt{2} \\ 1 & 2 & i & 4 \end{pmatrix}$ هي مصفوفة 2×4 حيث $a_{22} = 2$ و $a_{14} = \sqrt{2}$.

$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 7 \\ \sqrt{3} & \pi \end{pmatrix}$ هي مصفوفة 3×2 حيث $a_{32} = \pi$ و $a_{21} = -5$.

مثال2

المصفوفة 2×3 والتي عناصرها تحقق المعادلة التالية : $a_{ij} = i^2 - j$ هي

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1-1-1 مصفوفات خاصة

- نقول أن A **مصفوفة صفرية** matrice nulle إذا كان جميع عناصرها مساوية للصفر أي

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}=0$$

- نقول أن A **مصفوفة مربعة** $n\times n$ matrice carrée إذا كان عدد أسطرها m مساوي لعدد أعمدتها n. حينئذ نرمز لمجموعة المصفوفات المربعة $n\times n$ ذات العناصر من IK بـ $M_n(IK)$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

العناصر $a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$ تشكل **قطر رئيسي** diagonale principale.

- نقول أن A **مصفوفة مثلثية علوية** $n\times n$ matrice triangulaire supérieure إذا كانت جميع العناصر التي تقع تحت القطر الرئيسي معدومة. أي $\forall i>j, a_{ij}=0$. أي

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- نقول أن A **مصفوفة مثلثية سفلية** $n\times n$ matrice triangulaire inférieure إذا كانت جميع العناصر التي تقع فوق القطر الرئيسي معدومة. أي $\forall i<j, a_{ij}=0$. أي

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- نقول أن A **مصفوفة قطرية** $n\times n$ matrice diagonale إذا كانت مثلثية سفلية ومثلثية علوية أي جميع عناصرها معدومة ما عدا عناصر القطر الرئيسي. أي $\forall i\neq j, a_{ij}=0$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(يمكن لبعض عناصر القطر الرئيسي أن تكون معدومة)

- نقول أن A **مصفوفة واحدية** $n\times n$ matrice identité إذا كانت مصفوفة قطرية وجميع عناصر قطرها الرئيسي تساوي 1 و نرمز لها بالرمز I_n. أي

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- نسمي **مصفوفة سطر** $1\times m$ matrice ligne أو **شعاع أفقي** vecteur ligne المصفوفة التي تحتوي على سطر واحد. أي

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \end{pmatrix}$$

- نسمي **مصفوفة عمود** $n\times 1$ matrice colonne أو **شعاع عمودي** vecteur colonne المصفوفة التي تحتوي على عمود واحد. أي

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

تساوي مصفوفتين

نقول أن المصفوفة $A=(a_{ij})$ مساوية للمصفوفة $B=(b_{ij})$ إذا وفقط إذا كانا لهما نفس عدد الأسطر m ونفس عدد الأعمدة n و العناصر المتقابلة متساوية أي $a_{ij}=b_{ij}$ من أجل $1\le j\le n$, $1\le i\le m$.

مثال

إذا كانت $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ فإن $A\neq B$ لأن $a_{12}\neq b_{12}$.

2-1-1 عمليات على المصفوفات

1- الجمع

لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة $m\times n$ و$B=(b_{ij})$ مصفوفة $m\times n$، جمع المصفوفتين A و B هو مصفوفة C $m\times n$ ذات العناصر (c_{ij}) حيث $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ من أجل $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\ldots\ldots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}\ldots\ldots c_{2n} \\ .. & \\ c_{m1} & c_{m2}\ldots\ldots c_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\ldots\ldots\ldots a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\ldots\ldots\ldots a_{2n}+b_{2n} \\ \ldots\ldots & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2}\ldots\ldots\ldots a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

مثال

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

لكن $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ غير معرف.

2- الضرب بسلمية

لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة $m\times n$ و ليكن العدد λ ($\lambda\in IR$ أو $\lambda\in IC$) ضرب المصفوفة A بالعدد λ هو مصفوفة $m\times n$ ذات العناصر (b_{ij}) حيث $b_{ij}=\lambda a_{ij}$ لكل $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$ أي

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \ldots\ldots\lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \ldots\ldots\lambda a_{2n} \\ \ldots. & & \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \ldots\ldots\lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

مثال1

لتكن $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$ فان $2A=\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ -2 & 14 & -10 \end{pmatrix}$.

مثال2

لتكن $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 5 & -4\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}6 & 1 & -7\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}$ أحسب $3A+B$.

الحل

$$3A+B=3\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 5 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 1 & -7\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 7 & -7\\ 13 & 20 & -10\end{pmatrix}$$

ملاحظة 1

المصفوفة $A\times(-1)$ والتي نرمز لها بالرمز $-A$ تمكننا من تعريف الفرق بين مصفوفتين A و B اللتين لهما نفس عدد الأسطر ونفس عدد الأعمدة بالشكل:

$$A-B=A+(-1)\times B$$

مثال

لتكن المصفوفتان $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & -4\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -5 & -3\end{pmatrix}$ فإن نظيرة B هي $-B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$

والفرق بين A و B هو $A-B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 5 & -1\end{pmatrix}$.

خواص

ليكن A و B و C مصفوفات ذات نفس عدد الأسطر ونفس عدد الأعمدة ، ولتكن λ و λ' عددين حقيقيين أو مركبين. لدينا الخواص التالية:

1. $A+B=B+A$
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$
3. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
4. $(\lambda+\lambda')A=\lambda A+\lambda' A$
5. $\lambda(\lambda' A)=(\lambda\lambda')A$
6. $1.A=A$

مثال

لتكن $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$. ولتكن X مصفوفة 2×2 تحقق $2X+3A=B$ ، عين المصفوفة X.

الحل

باستعمال الملاحظة1 فإن $2X = B - 3A$ وبضرب المصفوفتين $2X$ و $B - 3A$ بالعدد $\frac{1}{2}$ نجد $X = \frac{1}{2}(B - 3A)$ ومنه $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ وبالتالي $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3- الجداء

- **جداء مصفوفة سطر بمصفوفة عمود**

لتكن $V = (v_j)$ مصفوفة سطر $1 \times n$ أو شعاع أفقي ولتكن $W = (w_i)$ مصفوفة عمود $n \times 1$ أو شعاع عمودي. جداء الشعاع V بالشعاع W هو مصفوفة 1×1 أي تحتوي على معامل واحد على الشكل:

$$VW = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \left(v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots v_n w_n\right)$$

مثال1

ليكن $V = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ مصفوفة 1×3 و $W = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ مصفوفة 3×1 . فإن

$$\begin{aligned} VW &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \left((-1)\times 5 + 2 \times (-1) + (-3) \times 0\right) \\ &= (-7) \end{aligned}$$

مثال2

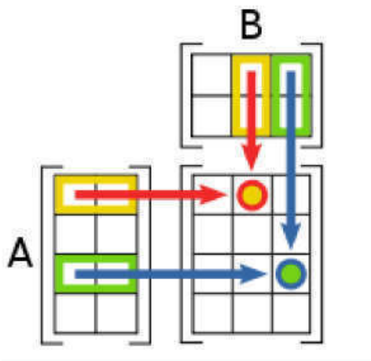
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (0)$$

هذا الجداء هو في الحقيقة الجداء السلمي أما المساواة الأخيرة فتبين أن الشعاعين $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ متعامدين.

- **جداء مصفوفتين**

لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة $m\times r$ و $B=(b_{ij})$ مصفوفة $r\times n$ ، جداء المصفوفة A بالمصفوفة B هو مصفوفة C $m\times n$ ذات العناصر (c_{ij}) حيث $c_{ij}=\sum_{k=1}^{r}a_{ik}b_{kj}$ $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$.

أي أننا نحصل على جداء مصفوفتين بضرب كل سطر من المصفوفة الأولى بأعمدة المصفوفة الثانية.



مثال1

لتكن $B=\begin{pmatrix}2&0\\1&0\\-1&1\end{pmatrix}$ مصفوفة 3×2 و $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\-1&2&2\\0&1&0\end{pmatrix}$ مصفوفة 3×3 فإن عدد أعمدة A هو 3 فهو يساوي عدد أسطر B أي يمكن حساب الجداء AB ونحصل على مصفوفة 3×2

$$AB=\begin{pmatrix}2\times2+3\times1+1\times(-1) & 2\times0+3\times0+1\times1\\(-1)\times2+2\times1+2\times(-1) & (-1)\times0+2\times0+2\times1\\0\times2+1\times1+0\times(-1) & 0\times0+1\times0+0\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&1\\-2&2\\1&0\end{pmatrix}$$

مثال2

لتكن $B=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ مصفوفة عمود 3×1 و $A=\begin{pmatrix}2&0&-3\\-2&1&3\end{pmatrix}$ مصفوفة 2×3 فإن عدد أعمدة A هو 3 فهو يساوي عدد أسطر B أي يمكن حساب الجداء AB ونحصل على مصفوفة عمود 2×1.

$$AB=\begin{pmatrix}2\times1+0\times(-2)+(-3)\times3\\(-2)\times1+1\times(-2)+3\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\5\end{pmatrix}$$

ملاحظات

- لكي يكون الجداء AB معرفا يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد أسطر المصفوفة B.
- الضرب ليس تبديلي أي عامة $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$. فعلا
مثلا: لتكن $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ فإن $\mathrm{A}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $B\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- الضرب تجميعي أي $(\mathrm{AB})C = \mathrm{A}(\mathrm{B}C)$.
- الضرب توزيعي على الجمع أي $\mathrm{A}(\mathrm{B} + C) = \mathrm{AB} + \mathrm{A}C$.
- لتكن A مصفوفة $m \times n$، فإن $\mathrm{A}I_n = I_m\mathrm{A} = \mathrm{A}$.

4- المنقول

لتكن A مصفوفة $m \times n$. منقول المصفوفة A هي مصفوفة $n \times m$ نرمز لها بـ A^T حيث أسطرها هي أعمدة A وأعمدتها هي أسطر A.

مثال

لتكن $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفة 4×3 فإن $\mathrm{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ وهي مصفوفة 3×4.

ولتكن $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ مصفوفة 2×3 فإن $\mathrm{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ وهي مصفوفة 3×2.

خواص

لتكن A و B مصفوفتين لهما نفس عدد الأسطر ونفس عدد الأعمدة ، وليكن λ عددا حقيقيا أو مركبا.
لدينا الخواص التالية:

1. $(\mathrm{A} + \mathrm{B})^T = \mathrm{A}^T + \mathrm{B}^T$
2. $(\mathrm{A}\,\mathrm{B})^T = \mathrm{B}^T\,\mathrm{A}^T$
3. $(\lambda\mathrm{A})^T = \lambda\,\mathrm{A}^T$
4. $\left(\mathrm{A}^T\right)^T = \mathrm{A}$

5- المقلوب

لتكن A مصفوفة مربعة $n\times n$، نقول أن المصفوفة A **عكوسة** أو **قابلة للقلب** inversible إذا وجدت مصفوفة مربعة B $n\times n$ حيث: $\mathrm{AB}=\mathrm{BA}=I_n$. عندئذ نسمي B **مقلوب** أو **معكوس** A inverse و نرمز لها بالرمز A^{-1}.

مثال1

لتكن $\mathrm{E}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ و $F=\begin{pmatrix}4 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ مصفوفتين مربعتين. نريد أن نبين أن المصفوفة E تقبل مقلوب F. لنجري الجداء $\mathrm{E}\times F$ التي هي مصفوفة مربعة ذات سطرين.

$$\mathrm{E}F=\begin{pmatrix}1\times 4+3\times(-1) & 1\times(-3)+3\times 1\\ 1\times 4+4\times(-1) & 1\times(-3)+4\times 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$$

إذن المصفوفة E عكوسة تقبل مقلوب $F=\mathrm{E}^{-1}$.

مثال2

أحسب A^{-1} حيث $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

الحل

A مصفوفة 2×2 ومنه فإن A^{-1} إن وجدت يجب أن تكون مصفوفة 2×2.

نفرض $\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ و هي تحقق $\mathrm{AA}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ أي

$$\mathrm{AA}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+5c & 2b+5d\\ a+3c & b+3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a+5c=1\\ 2b+5d=0\\ a+3c=0\\ b+3d=1\end{cases}\Rightarrow a=3\wedge c=-1\wedge b=2\wedge d=-5$$

$$\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

خواص

- لتكن $A,B \in M_n(IR)$، إذا كان A و B عكوسين فإن AB عكوسة و لدينا $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- لتكن $A \in M_n(IR)$، إذا كانت A عكوسة فإن A^T عكوسة و لدينا $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

2-1 المحددات

تعريف

المحدد هو تطبيق معرف من $M_n(IR)$ مجموعة المصفوفات المربعة $n \times n$ نحو IR ترفق بكل مصفوفة $A = (a_{ij})$ مربعة $n \times n$ عددا حقيقيا نرمز له بالرمز $\det A$.

حساب محدد 2×2:

لتكن $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(IR)$. فإن

$$\boxed{\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

مثال

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\times 3 - 1\times 1 = 5$$

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4\times 3 - (-1)\times 1 = 13$$

حساب محدد $n\times n$:

لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربعة $n \times n$ فإن $\det A$ معطى بالعبارة التالية:

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}}$$ أو (نشر بالنسبة للعمود j)

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}}$$ (نشر بالنسبة للسطر i)

حيث M_{ij} هو المحدد الناتج بحذف السطر i والعمود j للمصفوفة A.

ملاحظات

- قيمة محدد مصفوفة $n\times n$ لا تتغير إذا استعملنا أي عبارة نشر بالنسبة لأي سطر أو لأي عمود.
- عبارة النشر بالنسبة لأي سطر أو لأي عمود ترجع حساب محدد $n\times n$ إلى حساب n من المحددات $(n-1)\times(n-1)$. بواسطة التراجع المتناقص حيث نتوصل هكذا إلى حساب $n!$ من المحددات 1×1.
- محدد 1×1 هو من الشكل $\det(a)=a$.

مراحل حساب محدد

لحساب $\det A$ نتبع الخطوات التالية:

1. نختار سطر أو عمود يستحسن اختيار السطر أو العمود الذي يحتوي على أكبر عدد من العناصر المعدومة.
2. نضع إشارة فوق كل عنصر من السطر (أو العمود) المختار وذلك بالتناوب (مرة – ومرة +) متجهين أفقيا أو عموديا ومبتدئين دوما بإعطاء العنصر الموجود في السطر الأول والعمود الأول الإشارة +.
3. نضرب كل عنصر من السطر (أو العمود) المختار بالمحدد الناتج بحذف السطر والعمود أين يقع ذلك العنصر مع مراعاة الإشارة الممنوحة سابقا.
4. نجمع كل الجداءات المتحصل عليها.

حساب محدد 3×3:

لتكن $A\in M_3(IR)$.

باستعمال السطر الأول:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$\det A=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{33}a_{21}a_{12}$$

أو باستعمال العمود الثاني:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}$$

مثال

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2((-2)\times 3-(-4)\times(-1))+5(2\times(-1)-(-2)\times 3)=2(-10)+5(4)=0$$

لتسهيل عملية حساب المحددات نعتمد على الخواص التالية

خواص

لتكن $\mathrm{A},\mathrm{B}\in \mathrm{M}_n(\mathrm{IK})$ فإن :

- إذا كانت A مصفوفة قطرية فإن $\det \mathrm{A} = a_{11}.a_{22}\,.......a_{nn}$.
- $\det I_n = 1$.
- $\det(\mathrm{A}^T) = \det \mathrm{A}$.
- $\det \mathrm{BA} = \det \mathrm{AB} = \det \mathrm{A}.\det \mathrm{B}$
- $\det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \neq \det \mathrm{A} + \det \mathrm{B}$ بصفة عامة.
- $\det(\lambda \mathrm{A}) \neq \lambda \det \mathrm{A}$ بصفة عامة من أجل $\lambda \in IR$.
- $\det(\lambda \mathrm{A}) = \det((\lambda I_n)\mathrm{A}) = \det(\lambda I_n)\det \mathrm{A} = \lambda^n \det \mathrm{A}$.
- $\det(\mathrm{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det \mathrm{A}}$ إذا كانت A معكوسة.
- إذا بادلنا سطرين (أو عمودين) فإن إشارة المحدد تتغير.

مثلا: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 12$ فإنه بمبادلة السطرين الأول و الثالث نجد: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -12$

- إذا احتوت مصفوفة على سطر (أو عمود) جميع عناصره معدومة فإن قيمة محددها صفر.

مثلا: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$ دون حساب لأن جميع عناصر العمود الثاني معدومة.

- إذا احتوت مصفوفة على سطرين (أو عمودين) متماثلين فإن قيمة محددها صفر.

مثلا: $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 0 & 7 \\ 2 & -2 & -4 & -2 \\ 2 & 8 & 0 & 8 \\ 1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$ لأن العمودين الثاني و الرابع متماثلان.

- إذا ضربنا جميع عناصر سطر (أو عمود) بعدد α فإن قيمة المحدد تضرب بـ α.

مثلا: إذا كان $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 12$ فإن $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 24$.

إيجاد مقلوب مصفوفة

لتكن $A \in M_n(IK)$ حيث $\det A \neq 0$. يمكننا حساب A^{-1} مقلوب المصفوفة A كما يلي:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(Com A)^T$$

حيث $1 \leq ij \leq n$ $Com A = (c_{ij})$ و $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ و M_{ij} هو المحدد الناتج بحذف السطر i و العمود j المصفوفة A.

مراحل حساب مقلوب مصفوفة

لحساب مقلوب مصفوفة مربعة A نتبع الخطوات التالية:

1. نحسب $\det A$.
2. إذا كان $\det A = 0$ نقول أن A لا تقبل مقلوب ونتوقف. أما إذا $\det A \neq 0$ نتابع إلى الخطوة 3
3. نحسب M_{ij} المحددات الناتجة بحذف السطر i والعمود j لـ A.
4. نضيف إشارات بالتناوب لتشكيل $Com A$.
5. نحسب المنقول $(Com A)^T$.
6. نقسم كل معاملات $(Com A)^T$ على $\det A$.

مثال

أحسب إذا أمكن مقلوب المصفوفة $A=\begin{pmatrix}2&6&3\\-1&-1&0\\-3&-1&0\end{pmatrix}$.

الحل

نحسب أولا $\det A$

$$\det A=\begin{vmatrix}2&6&3\\-1&-1&0\\-3&-1&0\end{vmatrix}=3(1-3)=-6$$

بما أن $\det A\neq 0$ إذن A قابلة للقلب و $A^{-1}=\dfrac{(Com\ A)^T}{\det A}$

حيث $Com\ A=(c_{ij})_{1\le i,j\le 3}$, $c_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}\ ,\ \forall i,j=1,2,3$

$$Com\ A=\begin{pmatrix}+M_{11}&-M_{12}&+M_{13}\\-M_{21}&+M_{22}&-M_{23}\\+M_{31}&-M_{32}&+M_{33}\end{pmatrix}$$

$M_{11}=\begin{vmatrix}-1&0\\-1&0\end{vmatrix}=0$ ، $M_{12}=\begin{vmatrix}-1&0\\-3&0\end{vmatrix}=0$ ، $M_{13}=\begin{vmatrix}-1&-1\\-3&-1\end{vmatrix}=-2$

$M_{21}=\begin{vmatrix}6&3\\-1&0\end{vmatrix}=3$ ، $M_{22}=\begin{vmatrix}2&3\\-3&0\end{vmatrix}=9$ ، $M_{23}=\begin{vmatrix}2&6\\-3&-1\end{vmatrix}=16$

$M_{31}=\begin{vmatrix}6&3\\-1&0\end{vmatrix}=3$ ، $M_{32}=\begin{vmatrix}2&3\\-1&0\end{vmatrix}=3$ ، $M_{33}=\begin{vmatrix}2&6\\-1&-1\end{vmatrix}=4$

و منه $Com\ A=\begin{pmatrix}0&0&-2\\-3&9&-16\\3&-3&4\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (Com\ A)^T=\begin{pmatrix}0&-3&3\\0&9&-3\\-2&-16&4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}}\left(Com\mathrm{A}\right)^{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -3/2 & 1/2 \\ 1/3 & 8/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$