د. لمياء مكرسي **المستوى: سنة ثانية ليسانس علوم تجارية**

المحور الرابع: البرمجة الخطية: طريقة السمبلكس

تعتبر طريقة السمبلكس (Simplex) من بين أهم الطرق المستخدمة في حل البرامج الخطية في رياضيات المؤسسة وبحوث العمليات، اخترعها وطورها الباحث جيروج دنتزيغ (George Dantzig) عام 1947، وتعرف على أنها وسيلة رياضية ذات كفاءة عالية في استخراج الحلول المثلى لمشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة، وتستخدم هذه الطريقة لحل النماذج الرياضية للبرمجة الخطية جبريا مهما كان عدد المتغيرات وهي الأكثر استخداما لحل النماذج الرياضية.

1.خطوات تطبيق طريقة السمبلكس:

- ✓ تحويل البرنامج الخطي إلى الصيغة النموذجية (القياسية).
- ✓ تشكيل جدول الحل الأساسي الأولي (المبدئي) المسموح به (عبارة عن نقطة ركنية في المنطقة الممكنة وفي الغالب هي نقطة الصفر).
- ✓ اختبار مثلوية الحل (إمكانية تحسين الحل القائم).
- ✓ تحسين الحل إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل أو حالة من الحالات خاصة.

ملاحظة: إذا كان التحسين غير ممكن فإن الحل الذي تم التوصل إليه هو الحل الأمثل.

2.الصيغة القياسية النموذجية للبرنامج الخطي في طريقة السمبلكس

ويقصد بذلك تحويل النموذج الرياضي للمسألة محل الدراسة إلى شكل قياسي، حيث أنه يجب:

- ✓ جميع قيود البرنامج يجب أن تكون على شكل معادلات وذلك باستخدام متغيرات وهمية في دالة الهدف وقيود النموذج، كما هو موضح في الجدول:
- ✓ جميع المتغيرات تحقق شروط عدم السلبية؛
- ✓ دالة الهدف تسعى إلى تحقيق المثلوية (تعظيم أو تصغير)؛
- ✓ الجانب الأيمن للقيود (القيم الثابتة b_i) يجب أن يكون موجبا أو معدوما.

3.طريقة السمبلكس حسب الصيغة القانونية في حالة التعظيم

-القيود من نوع أقل من أو يساوي ≤: هذا القيد يعني أن الجهة اليسرى من المتباينة أقل من الجهة اليمنى وتحقيق المساواة بين الطرفين لا يتم إلا بإضافة متغير بإشارة موجبة إلى الجهة اليسرى يساوي الفرق بين الجهتين يطلق عليه المتغير الوهمي نرمز له ب S_i .

إشارة القيد	آلية استخدام المتغيرات الوهمية في القيد	ألية استخدام المتغيرات S_i في دالة الهدف تعظيم
متراجحة: أقل أو يساوي	$+1S_i$	$+0S_i$

وحتى تكون كل المتغيرات ممثلة في جميع المعادلات فإننا نضيف متغيرات الفروق بمعامل صفر في المعادلات التي لا يظهر فيها أحد هذه المتغيرات.

المعنى الاقتصادي للمتغير S_i في حالة أصغر أو يساوي:

يمثل المتغير S_i الكمية غير المستخدمة من المورد المتاح b_i ولذا يسمى هذا المتغير:

-**المتغير الراكد** (راكد= موارد متوفرة وبقيت دون الاستخدام)؛

-**المتغير العاطل** (عاطل= موارد عاطلة عن الاستخدام)؛

-**متغير الفرق** (الفرق= الفرق بين المتاح من الموارد والمستخدم من المتاح)، وهي التسمية التي سيتم اعتمادها.

مثال: حل البرنامج الخطي الآتي باستخدام طريقة السمبلكس

$$\text{Max}: Z=2X_1+X_2$$
$$\text{S/T} \begin{cases} 3X_1+X_2\leq 15 \\ X_1+2X_2\leq 12 \\ X_1\geq 0,\ X_2\geq 0 \end{cases}$$

1.تحويل البرنامج الخطي إلى الصيغة القياسية (النموذجية):

القيد الأول: $3X_1+X_2\leq 15$، نقوم بإضافة متغير وهمي وليكن S_1، يصبح القيد بمثابة متساوية من الشكل:

$3X_1+X_2+S_1=15$.

القيد الثاني: $X_1+2X_2\leq 12$ ، نقوم بإضافة متغير وهمي وليكن S_2، يصبح القيد بمثابة متساوية من الشكل:

$X_1+2X_2+S_2=12$.

$3X_1+X_2+1S_1+0S_2=15$
$X_1+2X_2+0S_1+1S_2=12$

بما أن عدد القيود 2 فيجب الحصول على مصفوفة الوحدة المربعة ذات الرتبة (2x2)

-دالة الهدف بالشكل القياسي: عند إضافة متغيرات الفجوة إلى القيود فيجب إضافتها أيضا إلى دالة الهدف بمعاملات صفرية كما يلي:

$$\text{Max}: Z=2X_1+X_2+0S_1+0S_2$$

-بما أن متغيرات الفرق هي متغيرات غير سلبية فيجب كتابة ذلك في الصيغة القياسية، وتعطى الصيغة النموذجية النهائية للبرنامج على النحو التالي:

$$\text{Max}: Z=2X_1+X_2+0S_1+0S_2$$
$$\begin{cases} 3X_1+X_2+1S_1+0S_2=15 \\ X_1+2X_2+0S_1+1S_2=12 \\ X_1\geq 0,\ X_2\geq 0,\ S_1\geq 0,\ S_2\geq 0 \end{cases}$$

2. تشكيل جدول الحل الأساسي الأولي

C_j		2	1	0	0	B_i	B_i/a_{ij}
C_b	X_j	X_1	X_2	S_1	S_2	قيم الحل	
0	S_1	3	1	1	0	15	15/3= 5
0	S_2	1	2	0	1	12	12/1= 12
$Z=\sum_{j=1}^{n} C_jX_j$		0	0	0	0	Z=0	
C_j-Z_j		2	1	0	0		

صف الدوران

عمود الدوران

عنصر الدوران

مصفوفة الوحدة

-متغيرات داخل الأساس: S_1, S_2

-متغيرات خارج الأساس: X_1, X_2

نلاحظ من خلال جدول الحل الأساسي الأول أن المتغيرات داخل الأساس هي المتغيرات التي تشكل مصفوفة الوحدة، أما المتغيرات خارج الأساس فهي المتغيرات الأصلية (الهيكلية) التي نبحث عن قيمها المثلى التي تحقق أعظمية دالة الهدف.

-إن الحل الذي يبرزه الجدول الأول هو حل أولي، وهذا الحل لا يحقق أي ربح وهو يعني عدم إنتاج أي وحدة من المنتوجين X_1 وX_2، هذا الحل هو نقطة ركنية من منطقة الإمكانات.

-في جدول الحل الأساسي الأول في حالة التعظيم نجد دائما تكون قيمة دالة الهدف $Z=0$، وقيم المتغيرات $X_1=0$ و$X_2=0$، طبعا نقوم بتحسين قيمة دالة الهدف إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل أو الوصول إلى حالة من الحالات الخاصة والتي سيتم التطرق إليها لاحقا.

3.اختبار مثلوية الحل:

قبل تشكيل جدول الحل الأساسي الثاني يجب اختبار أمثلية الحل، وهذا يتجلى في البحث عما إذا كان هناك متغير من متغيرات النموذج يوجد خارج متغيرات القاعدة (الأساس) يمكن أن يحسن من قيمة دالة الهدف (نحو الزيادة في حالة التعظيم ونحو النقصان في حالة التصغير).

ويتم اختبار أمثلية الحل في حالة التعظيم من خلال السطر الأخير $\mathbf{C_j-Z_j}$، فإذا كانت كل القيم سالبة أو معدومة يكون الحل أمثلا، أما إذا كان أحد أو بعض القيم موجبا فإن الحل غير أمثل ويتطلب تحسينا.

بالعودة إلى المثال نجد أن قيم السطر الأخير بعضها موجب وبعضها معدوما وبالتالي فإن الحل ليس أمثل ويتطلب تحسينا.

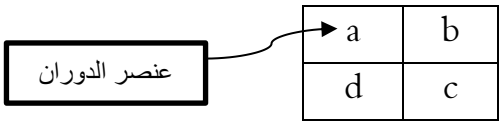
4. تحسين الحل: لتحسين الحل نتبع الخطوات التالية

الخطوة 1: تحديد أكبر قيمة موجبة في السطر الأخير $\mathbf{C_j-Z_j}$ من جدول السمبلكس، ويسمى العمود الذي يتضمن هذه القيمة **بعمود الدوران**، وإذا وجد أكثر من رقم متساوي يتم اختيار أحدهما. ويتضح من مثالنا أن أكبر قيمة موجبة هي 2 وبالتالي فإن عمود الدوران هو العمود الذي يتضمن هذه القيمة.

الخطوة 2: لتحديد **سطر الدوران** نقوم بحساب النسبة $\mathbf{B_i/a_{ij}}$، والتي تعني قسمة كل رقم من العمود $\mathbf{B_i}$ على العدد **الموجب** في عمود الارتكاز والذي يقع في صفه. العنصر في عمود الارتكاز الذي يؤدي إلى أصغر نسبة يطلق عليه **عنصر الدوران (الارتكاز)**. إذا أدى أكثر من رقم إلى نفس النسبة فيتم اختيار أحدهما، وإذا لم يوجد في عمود الارتكاز أي رقم موجب يكون البرنامج ليس له حل.

بالعودة إلى مثالنا نجد أن أصغر نسبة هي 5 وبالتالي فإن عنصر الدوران هو الرقم **3**.

الخطوة 3: يأخذ عنصر الدوران رقم 1، ويتم تقسيم باقي عناصر صف الدوران على عنصر الدوران (3)، أما عناصر عمود الدوران فتأخذ القيمة 0. أما بقية العناصر الأخرى فتحسب كما يلي:



فإن قيمة العنصر c الجديدة تحسب وفقا للقاعدة التالية:

$$C' = \frac{(a * c) - (b * d)}{a}$$

الخطوة 4: تستبدل المتغيرة التي ستخرج من الأساس (التي تقع في صف عنصر الدوران) بالمتغيرة التي ستدخل للأساس (التي تقع في عمود الدوران).

بالعودة إلى مثالنا فإن المتغيرة التي ستخرج من الأساس هي S_1، لتحل محلها المتغيرة X_1.

من الخطوات السابقة فإنه يمكن تشكيل جدول الحل الأساسي الثاني كما يلي:

C_b →		2	1	0	0	B_i	B_i/a_{ij}
		X_1	X_2	S_1	S_2		
2	X_1	1	1/3	1/3	0	5	$5/_{1/3}=15$
0	S_2	0	5/3	-1/3	1	7	$7/_{5/3}= 21/5$
$Z= \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$		2	2/3	2/3	0	Z=(2*5)+(7*0)=10	
C_j-Z_j		0	1/3	-2/3	0		

عنصر الدوران

-نلاحظ من الجدول أن قيمة دالة الهدف قد تحسنت بعد أن كانت 0 لتصبح قيمتها 10.

-متغيرات داخل الأساس: $X_1= 5, S_2= 7$

-متغيرات خارج الأساس: $X_2=0, S_1=0$

وللتأكد نقوم بالتعويض في دالة الهدف نجد أن: $Z=2(5)+0+0(0)+0(7)= 10$

-كما يلاحظ أن قيم السطر الأخير تضم قيمة واحدة موجبة وهو ما يدل على أن الحل ليس أمثل ويمكن تحسينه باتباع نفس الخطوات السابقة.

-أكبر قيمة موجبة في السطر الأخير هي 1/3 وبالتالي فعمود الدوران يضم هذه القيمة.

-بحساب النسبة B_i/a_{ij}، نجد أن أصغر نسبة هي 21/5 وبالتالي فإن عنصر الدوران هو الرقم **5/3**.

بتطبيق باقي الخطوات السابقة يتشكل جدول الحل الأساسي الثالث كما يلي:

C_b →		2	1	0	0	B_i	B_i/a_{ij}
		X_1	X_2	S_1	S_2		
2	X_1	1	0	6/15	-1/5	18/5	
1	X_2	0	1	-1/5	3/5	21/5	
$Z= \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$		2	1	9/15	1/5	Z=(2*18/5)+(1*21/5)=32	
C_j-Z_j		0	0	-9/15	-1/5		

يتضح من قيم السطر الأخير أن بعض القيم سالبة وبعضها معدوم وبالتالي قد تم الوصول إلى الحل الأمثل والجدول الأساسي الثالث هو الجدول الأخير. حيث أن قيم المتغيرات:

-متغيرات داخل الأساس: $X_1= 18/5, X_2= 21/5$

-متغيرات خارج الأساس: $S_2=0, S_1=0$

وللتأكد نقوم بالتعويض في دالة الهدف نجد أن: $Z=2(18/5)+21/5+0(0)+0(0)= 32$

طريقة السمبلكس حسب الصيغة القانونية في حالة التدنية

وفقا للصيغة القانونية للبرنامج الخطي في حالة التدنية فإن جميع القيود تكون من الشكل أكبر أو تساوي، ولتحويل البرنامج الخطي إلى الصيغة القياسية لتطبيق طريقة السمبلكس يتم طرح المتغير الفائض من الجانب الأيسر للقيد ويسمى بمتغير الفجوة ويرمز له ب S_i، وبما أن معامل متغير الفجوة سالب مما لا يتيح لنا الحصول على مصفوفة الوحدة في معاملات القيود، لذلك ثم تتم إضافة متغيرات اصطناعية إلى الجانب الأيسر للقيد يرمز لها ب a_i. ويظهر متغير الفجوة بمعامل صفر في دالة الهدف، أما المتغير الاصطناعي فيظهر بمعامل M في دالة الهدف والتي ترمز إلى معامل رقمي كبير جدا، **وتكون إشارة المعامل سالبة في حالة التعظيم وموجبة في حالة التدنية**. والجدول التالي يوضح ما سبق:

إشارة القيد	آلية استخدام المتغيرات الوهمية في القيد	آلية استخدام المتغيرات Si في دالة الهدف تدنئة
متراجحة: أكبر أو يساوي	$-1S_i+1a_i$	$+0S_i+Ma_i$

مثال: حل البرنامج الخطي الآتي باستخدام طريقة السمبلكس

$$\text{Min}: Z=5X_1+7X_2$$
$$\text{S/T}\begin{cases} X_1-X_2\geq 3 \\ X_1+2X_2\geq 6 \\ X_1\geq 0,\ X_2\geq 0 \end{cases}$$

الحل:

1.تحويل البرنامج إلى الشكل القياسي:

$$\text{Min: } Z=5X_1+7X_2+0S_1+0S_2$$
$$X_1-X_2-1S_1+0S_2=3$$
$$X_1+2X_2+0S_1-1S_2=6$$
$$X_1\geq 0,\ X_2\geq 0,\ S_1\geq 0,\ S_2\geq 0$$

2. الحصول على الحل الأولي المسموح به:

إن هذا البرنامج هو فعلا في صورته النموذجية ولكنه لا يمكننا من الحصول على حل أولي مسموح به. حيث أن إعطاء المتغيرات الأصلية X_1, X_2 قيمة مساوية للصفر يعطينا الحل الموالي:

$$X_1=0,\ X_2=0,\ S_1=-30,\ S_2=-40,\ Z=0$$

وهذا الحل لا تتحقق فيه شروط عدم السلبية، فمتغيرات الفائض سالبة (لا يمكنها أن تكون جزء من مصفوفة الوحدة التي تحتوي المتغيرات الأساسية). في هذه الحالة لا بد من إضافة المتغيرات الاصطناعية إلى القيود وكذلك دالة الهدف وفقا للقاعدة السابقة المدرجة في الجدول.

$$\text{Min: } Z=5X_1+7X_2+0S_1+0S_2+Ma_1+Ma_2$$
$$X_1-X_2-1S_1+0S_2+1a_1+0a_2=3$$
$$X_1+2X_2+0S_1-1S_2+0a_1+1a_2=6$$
$$X_1\geq 0,\ X_2\geq 0,\ S_1\geq 0,\ S_2\geq 0,\ a_1\geq 0,\ a_2\geq 0$$

-**متغيرات القرار:** $x_1=0,\ x_2=0$

-**متغيرات الفروق:** $S_1=0,\ S_2=0$

-**المتغيرات الاصطناعية:** $a_2=6,\ a_1=3$

-**قيمة دالة الهدف:** $\text{Min: } Z=5(0)+7(0)+0S_1+0S_2+3M_1+6M_2$

$$\text{Min: } Z=9M$$

من الملاحظ أن الحل أعلاه يحتوي على قيما كبيرة جدا في دالة الهدف، وهذا راجع إلى ظهور المتغيرات الاصطناعية بقين غير معدومة في الحل. لندرج جدول السمبلكس الأول.

تشكيل جدول الحل الأساسي الأولي

C_b		5	7	0	0	M	M	B_i	B_i/a_{ij}
		X_1	X_2	S_1	S_2	a_1	a_2		
M	A_1	1	-1	-1	0	1	0	3	3/1= 3
M	A_2	1	2	0	-1	0	1	6	6/1= 6
$Z_j= \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$		2M	M	-M	-M	M	M	Z=9M	
C_j-Z_j		5-2M	7-M	M	M	0	0		

سطر الدوران

عمود الدوران

عنصر الدوران

–متغيرات داخل الأساس: a_1, a_2

–متغيرات خارج الأساس: X_1, X_2, S_1, S_2

–الخطوة الثالثة: تقييم إمكانية تحسين الحل

بالرجوع إلى قيم السطر الأخير نلاحظ أن هناك قيمتين سالبتين وهذا يعني أنه لم يتم بلوغ الحل الأمثل بعد.

تشكيل جدول الحل الأساسي الثاني

C_b		5	7	0	0	M	M	B_i	B_i/a_{ij}
		X_1	X_2	S_1	S_2	a_1	a_2		
5	X_1	1	-1	-1	0	1	0	3	/
M	A_2	0	3	1	-1	-1	1	3	3/3= 1
$Z_j= \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$		5	-5+3M	-5+M	-M	5-M	M	Z=15+3M	
C_j-Z_j		0	12-3M	5-M	M	-5+2M	0		

عمود الدوران

عنصر الدوران

تشكيل جدول الحل الأساسي الثالث

C_b		5	7	0	0	M	M	B_i	B_i/a_{ij}
		X_1	X_2	S_1	S_2	a_1	a_2		
5	X_1	1	0	-2/3	-1/3	2/3	1/3	4	
7	X_2	0	1	1/3	-1/3	-1/3	1/3	1	
$Z_j= \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$		5	7	-1	-4	1	4	Z=27	
C_j-Z_j		0	0	1	4	M-1	M-4		

–متغيرات داخل الأساس: X_1, X_2

–متغيرات خارج الأساس: a_1, a_2

يتضح من قيم السطر الأخير أن بعض القيم موجب وبعضها معدوم وبالتالي قد تم الوصول إلى الحل الأمثل والجدول الأساسي الثالث هو الجدول الأخير. حيث أن قيم المتغيرات:

–متغيرات داخل الأساس: $X_1= 4, X_2= 1$

–متغيرات خارج الأساس: $a_2=0, a_1=0, S_2=0, S_1=0$

وللتأكد نقوم بالتعويض في دالة الهدف نجد أن: $Z=5(4)+7(1)=27$

حالات خاصة في السمبلكس:

هناك بعض الحالات الخاصة التي قد تواجهنا عند حل مختلف البرامج الخطية بطريقة السمبلكس ومن بين هذه الحالات سيتم التطرق إلى ما يلي:

1.حالة عدم وجود حل أمثل:

توجد بعض مشاكل البرمجة الخطية التي لا يمكن فيها التوصل إلى الحل الأمثل، ويعود السبب في غالب الأحيان إلى وجود خطأ في تركيبة وعرض القيود.

مثال: حل البرنامج الخطي الآتي باستخدام طريقة السمبلكس

$$\text{Max}: Z=3X_1-2X_2$$
$$\text{S/T}\begin{cases} X_1+X_2\leq 1 \\ 2X_1+2X_2\geq 4 \\ X_1\geq 0,\ X_2\geq 0 \end{cases}$$

الحل:

1.تحويل البرنامج إلى الشكل القياسي:

$$\text{Max}: Z=3X_1-2X_2+0S_1+0S_2-Ma_1$$
$$X_1+X_2+1S_1+0S_2+0a_1=1$$
$$2X_1+2X_2+0S_1-1S_2+1a_1=4$$
$$X_1\geq 0,\ X_2\geq 0,\ S_1\geq 0,\ S_2\geq 0,\ a_1\geq 0$$

تشكيل جدول الحل الأساسي الأولي

C_j		3	-2	0	0	-M	B_i قيم الحل	B_i/a_{ij}
C_b	X_j	X_1	X_2	S_1	S_2	a_1		
0	S_1	1	1	1	0	0	1	1/1= 1
-M	a_1	2	2	0	-1	1	4	4/2= 2
$Z=\sum_{j=1}^{n} C_jX_j$		-2M	-2M	0	0	-M	Z=-4M	
C_j-Z_j		3+2M	-2+2M	0	0	0		

عمود الدوران

عنصر الدوران

جدول السمبلكس الثاني

C_j		3	-2	0	0	-M	B_i قيم الحل	B_i/a_{ij}
C_b	X_j	X_1	X_2	S_1	S_2	a_1		
3	X_1	1	1	1	0	0	1	/
-M	a_1	0	0	-2	-1	1	2	/
$Z=\sum_{j=1}^{n} C_jX_j$		3	3	3+2M	+M	-M	Z=3-2M	
C_j-Z_j		0	-5	-3-2M	-M	0		

نلاحظ من قيم السطر الأخير أن جميعا لقيم إما سالبة أو معدومة وبالتالي ووفقا للقاعدة فإنه تم التوصل إلى الحل الأمثل، إلا أن هذا الحل يتضمن المتغير الاصطناعي a_1 مما يدل على أن هذا البرنامج الخطي لا حل له.

2. حالة عدم محدودية الحل:

وهي الحالة التي تكون فيها جميع عناصر عمود الدوران **أقل من أو تساوي الصفر**، وهو ما يعني صعوبة تحديد سطر الدوران لاستحالة اختيار المتغير الذي يخرج من الأساس.

مثال:

-جدول السمبلكس الثاني:

C_j		6	9	0	0	B_i قيم الحل	B_i/a_{ij}
C_b	X_j	X_1	X_2	S_1	S_2		
9	X_2	-1	1	2	0	30	/
0	S_2	0	0	-1	1	10	/
$Z=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$		-9	9	18	0	Z=270	
C_j-Z_j		15	0	-18	0		

عمود الدوران

نلاحظ من جدول السمبلكس أن جميع عناصر عمود الدوران والذي يقابل أكبر قيمة موجبة هي أقل من أو تساوي الصفر مما يستحيل تحديد المتغير الذي يخرج من القاعدة.

3. حالة تعدد الحلول

ويقصد بها وجود أكثر من حل واحد لمشكلة البرمجة الخطية، عندما يتعلق الأمر بجدول السمبلكس فإننا نكون بصدد ما يسمى بالحلول البديلة والتي تعني الحصول على نفس قيمة دالة الهدف وبقيم بديلة للمتغيرات.

مثال: حل البرنامج الخطي الآتي باستخدام طريقة السمبلكس

$$\text{Max}: Z=2X_1+4X_2$$
$$\text{S/T} \begin{cases} X_1+2X_2 \leq 5 \\ X_1+X_2 \leq 4 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

1.تحويل البرنامج إلى الشكل القياسي:

$$\text{Max}: Z=2X_1+4X_2+0S_1+0S_2$$
$$X_1+2X_2+1S_1+0S_2=5$$
$$X_1+X_2+0S_1-1S_2=4$$
$$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ S_1 \geq 0,\ S_2 \geq 0$$

تشكيل جدول الحل الأساسي الأول

C_j		2	4	0	0	B_i قيم الحل	B_i/a_{ij}
C_b	X_j	X_1	X_2	S_1	S_2		
0	S_1	1	2	1	0	5	5/2
0	S_2	1	1	0	1	4	4/1
$Z=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$		0	0	0	0	Z=0	
C_j-Z_j		2	4	0	0		

عمود الدوران

عنصر الدوران

نلاحظ من قيم السطر الأخير أن هذا الحل يمكن تحسينه، المتغير الداخل X_2، المتغير الخارج S_1.

جدول السمبلكس الثاني

C_j		2	4	0	0	B_i قيم الحل	B_i/a_{ij}
C_b	X_j	X_1	X_2	S_1	S_2		
4	X_2	1/2	1	1/2	0	5/2	/
0	S_2	1/2	0	1/2	1	3/2	/
$Z=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$		2	4	2	0	Z=10	
C_j-Z_j		0	0	-2	0		

نلاحظ من قيم السطر الأخير لجدول السمبلكس أنه تم التوصل إلى الحل الأمثل حيث أن جميع القيم إما موجبة أو معدومة، إلا أن هذا الحل يوجد له حل بديل حيث يمكن إحلال X_1 محل S_2.

جدول السمبلكس الثالث

C_j		2	4	0	0	B_i قيم الحل	B_i/a_{ij}
C_b	X_j	X_1	X_2	S_1	S_2		
4	X_2	0	1	0	-1	1	/
2	X_1	1	0	1	2	3	/
$Z=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$		2	4	2	0	Z=10	
C_j-Z_j		0	0	-2	0		

ويمثل هذا الجدول حلا بديلا للحل السابق.

4. حالة التعادل في قيم السطر الأخير

قد تتعادل قيم السطر الأخير في جدول السمبلكس (تساوي القيم الموجبة في حالة التعظيم، أو تساوي القيم السالبة في حالة التدنية)، وهو ما يعني إمكانية اختيار متغير من بين المتغيرات المرشحة للدخول بشكل تحكمي، واختيار أي من هذه المتغيرات سوف يؤدي إلى الوصول إلى نفس الحل الأمثل. ويمكن الاعتماد على إحدى القواعد التالية:

-القاعدة 1: إذا كان التعادل في السطر الأخير بين متغير القرار والمتغير الوهمي فيفضل في هذه الحالة اختيار متغير القرار.

-القاعدة 2: إذا كان التعادل في السطر الأخير بين متغيرين قراريين، فيفضل في هذه الحالة اختيار متغير القرار الذي له أثر أكبر في دالة الهدف.

-القاعدة 3: إذا كان التعادل في السطر الأخير بين متغيرين وهميين في هذه الحالة يتم اختيار أي متغير بصورة عشوائية.

5. حالة التفسخ (التفكك)

هناك عدة حالات تظهر فيها حالة التفكك، نذكر من بينها:

أ. حالة تعادل قيم (b_i/a_{ij}) عند تحديد المتغير الذي سيخرج من الحل

لتوضيح هذه الحالة سيتم تناول هذا المثال:

مثال: حل البرنامج الخطي الآتي باستخدام طريقة السمبلكس

$$\text{Max}: Z=80X_1+70X_2$$
$$\text{S/T}\begin{cases}2X_1+X_2\leq 120\\ X_1\leq 70\\ X_1+X_2\leq 60\\ X_1\geq 0,\ X_2\geq 0\end{cases}$$

الحل:

1.تحويل البرنامج إلى الشكل القياسي:

$$\text{Max}: Z=80X_1+70X_2+0S_1+0S_2+0S_3$$
$$2X_1+X_2+1S_1+0S_2+0S_3=120$$
$$X_2+0S_1+1S_2+0S_3=70$$
$$X_1+X_2+0S_1+0S_2+1S_3=60$$
$$X_1\geq 0,\ X_2\geq 0,\ S_1\geq 0,\ S_2\geq 0,\ S_3\geq 0$$

تشكيل جدول الحل الأساسي الأول

C_j		80	70	0	0	0	B_i قيم الحل	B_i/a_{ij}
C_b	X_j	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	2	1	1	0	0	120	60
0	S_2	1	0	0	1	0	70	70
0	S_3	1	1	0	0	1	60	60
$Z=\sum_{j=1}^{n} C_jX_j$		0	0	0	0	0	Z=0	
C_j-Z_j		80	70	0	0	0		

عمود الدوران

نلاحظ من خلال قيم السطر الأخير في جدول السمبلكس أنه لم يتم الوصول إلى الحل الأمثل لوجود قيم موجبة، ولقد تم تحديد عمود الدوران والذي يقابل أكبر قيمة موجبة وبالتالي فالمتغير الداخل إلى القاعدة هو X_1، ولتحديد المتغير الخارج من القاعدة لا بد من حساب القيمة B_i/a_{ij} واختيار أصغر حاصل قسمة إلا أننا نلاحظ تعادل بين متغيري الفرق S_1 و S_2 وكلاهما يمكن إخراجه من القاعدة.

ب.حالة تكرار القيد

يعتبر الحل متفكك إذا كان أحد القيود زائدا عن الحاجة أو مكرر وبالتالي فهو أصلا غير ضروري للحل. على سبيل المثال:

القيد: $X_1\geq 20$ لا حاجة له عند ظهور القيد: $X_1\geq 30$، لأن هذا القيد الأخير أبعد القيد الأول وأصبح غير ضروري.