د. لمياء مكرسي
المستوى: السنة الثانية ليسانس علوم تجارية

المحور الخامس: البرمجة الخطية: الثنائية أو الازدواجية (النموذج المقابل)

تعريف البرنامج الثنائي (Dual Model):

ظهرت البرامج الثنائية (Duality) نظرا لصعوبة حل البرامج الأصلية، ويمكن تعريف البرنامج أو النموذج الثنائي على أنه الصيغة المقابلة لصيغة البرنامج الأصلي. أي أن لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية هناك نموذج مقابل ومشتق منه، فإذا كان النموذج الأولى يتعلق بتعظيم دالة الهدف فإن النموذج المقابل له سيكون تدنئة دالة الهدف وتصاغ عادة من نفس البيانات التي يتضمنها النموذج الأول والعكس بالعكس.

مميزات النموذج المقابل:

- يساعد النموذج المقابل على التوصل إلى الحل بصورة أسرع في بعض الأحيان وذلك بتقليص خطوات الحل، أي أن طريقة حل المشكلة المقابلة تستلزم خطوات رياضية اقل تعقيد من الخطوات اللازمة لحل المشكلة الأولية أحيانا.
- للتخلص من الإشارة السالبة في الجانب الأيمن (إن وجدت)
- لغرض التعرف على أبعاد المشكلة الأخرى (المشكلة الثنائية، البديلة) فإذا كان النموذج الأولي وبصيغة الـ Max أي المشكلة بالصيغة الربحية، فبإمكاننا التعرف على النموذج الثنائي ويكون بصيغة الـ Min وتمثيله للجانب الكلفوي (في نفس المشكلة)، ولنفس المشكلة المعبر عنها أولا بالصيغة الأولية.
- يمثل عدد متغيرات النموذج الثنائي عدد قيود النموذج الأصلي، كما يمثل عدد قيود النموذج الثنائي عدد متغيرات النموذج الأصلي.
- قيمة دالة الهدف لحل النموذج الثنائي تساوي قيمة دالة الهدف لحل النموذج الأصلي.
- قيم المؤشرات Dj المقابلة لمتغيرات الفرق في الحل النهائي للبرنامج الأصلي تساوي قيم متغيرات الحل في البرنامج الثنائي.

خطوات صياغة مشكلة برمجة خطية ثنائية:

لتحويل البرنامج الأصلي إلى البرنامج الثنائي يتم اتباع الخطوات الموضحة في الجدول الموالي:

البرنامج الأصلي	البرنامج الثنائي
قيم الطرف الأيمن للقيود	معاملات دالة الهدف
معاملات دالة الهدف	قيم الطرف الأيمن للقيود
مصفوفة المعاملات في القيود	منقول مصفوفة المعاملات في القيود
Max	**Min**
إشارة القيد i أصغر من أو تساوي	إشارة المتغيرة i أكبر من أو تساوي
إشارة القيد i أكبر من أو يساوي	إشارة المتغيرة i أصغر من أو تساوي
إشارة القيد i تساوي	إشارة المتغيرة i غير معرفة الإشارة
إشارة المتغيرة i أكبر من أو تساوي	إشارة القيد i أكبر من أو تساوي
إشارة المتغيرة i أصغر من أو تساوي	إشارة القيد i أصغر من أو تساوي
المتغيرة i غير معرفة الإشارة	إشارة القيد i من الشكل تساوي
Min	**Max**

إشارة القيد i أصغر من أو تساوي	إشارة المتغيرة i أصغر من أو تساوي
إشارة القيد i أكبر من أو يساوي	إشارة المتغيرة i أكبر من أو تساوي
إشارة القيد i تساوي	إشارة المتغيرة i غير معرفة الإشارة
إشارة المتغيرة i أكبر من أو تساوي	إشارة القيد i أقل من أو تساوي
إشارة المتغيرة i أصغر من أو تساوي	إشارة القيد i أكبر من أو تساوي
المتغيرة i غير معرفة الإشارة	إشارة القيد i من الشكل تساوي

مثال1:

أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الخطي التالي:

$$Max: Z=3X_1+6X_2+8X_3$$
$$2X_1+3X_2+X_3\leq 6$$
$$5X_1+3X_2+2X_3=2$$
$$X_1\geq 0,\ X_2\geq 0,\ X_3\geq 0$$

يكتب البرنامج الثنائي للبرنامج الخطي كما يلي:

$$Min: Z=6y_1+2y_2$$
$$2y_1+5y_2\geq 3$$
$$3y_1+3y_2\geq 6$$
$$1y_1+2y_2\geq 8$$
$$y_1\geq 0,$$

y_2 غير محدد الاشارة

مثال2:

أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الخطي التالي:

$$Min: Z=2X_1+4X_2+7X_3$$
$$2X_1+7X_2+X_3\leq 12$$
$$X_1+5X_2+2X_3=15$$
$$3X_1+2X_2+2X_3\leq 20$$
$$X_1\geq 0,\ X_2\geq 0,$$

X_3 غير محدد الاشارة

يكتب البرنامج الثنائي للبرنامج الخطي كما يلي:

$$Max: Z=12y_1+15y_2+20y_3$$
$$2y_1+y_2+3y_3\leq 2$$
$$7y_1+5y_2+2y_3\leq 4$$
$$1y_1+2y_2+2y_3=7$$
$$y_1\leq 0$$

y_2 غير محدد الاشارة

$$Y_3\leq 0$$