د. لمياء مكرسي **المستوى: السنة الثانية ليسانس علوم تجارية**

المحور الثاني: البرمجة الخطية

يتناول هذا الفصل أساسيات البرمجة الخطية، والحل البياني في حالة برنامج خطي بسيط (معادلة أو متراجحة من الدرجة الأولى) من متغيرين اثنين فقط. كما يتناول كيفية تمثيل القيود وتابع الهدف على نفس الشكل ثم إجرائية البحث عن الحل الأمثل على الشكل البياني، وفي نهاية الفصل ستتم الإشارة إلى بعض الحالات الخاصة من البرمجة الخطية البسيطة.

وتعتبر البرمجة الخطية أداة بيانية ورياضية تهتم ببناء النماذج الرياضية لمشكلة من المشاكل بإحدى الطرق الآتية: طريقة البيانية، طريقة السمبلكس، طريقة النقل...إلخ.

1.تعريف البرمجة الخطية:

- تعرف البرمجة الخطية بأنها أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من القيود والعوامل الثابتة بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة، أي أن يكون التوزيع مثاليا.
- كما تعرف البرمجة الخطية على أنها أسلوب أو تقنية رياضية تبحث عن حل أو حلول لمشكلة اقتصادية سواء (إنتاجية، مالية، نقل، تحليل المشاريع...الخ) واختيار أفضل الحلول التي تمثل الحل الأمثل.

وبالتالي فالهدف من البرمجة الخطية البحث عن أمثلية الاستخدام للموارد المحدود، عن طريق دالة رياضية مكونة من مجموعة من القيود في شكل معادلات أو متراجحات أو كلاهما من الدرجة الأولى.

2.متطلبات بناء نماذج البرمجة الخطية

البرنامج الخطي ليس إلا برنامجا رياضيا يتمتع بخصائص مميزة، يطلب من أي برنامج خطي أن يحقق مجموعة من الخصائص تتلخص فيما يلي:

أ. وجود هدف محدد نسعى لتحقيق أفضل مستوى أداء له، ومعبر عنه بصيغة خطية. يتم صياغة الهدف على شكل تابع عددي من عدة متغيرات.

ب. توفر مجموعة من الخيارات (الحلول الممكنة)، إذ أن وجود خيار وحيد (حل وحيد) لا يستدعي استخدام أي نموذج للبحث عنه.

ج. **محدودية الموارد**: تكمن الحاجة للبرمجة الخطية بالتوزيع الأمثل لهذه الموارد، إذ لو توفرت الموارد بكميات غير محدودة، فلن يكون هناك حاجة لاستخدام البرمجة الخطية أو غيرها.

د. جميع العلاقات خطية سواء في تابع الهدف أو في القيود، أي التغيرات طردية بين قيم التابع وقيم المتغيرات، أيضا الموارد تستهلك بشكل خطي.

هـ. جميع متغيرات القرار غير سالبة (أكبر أو يساوي الصفر)، إذ أن المتغيرات تعبر عن مقادير اقتصادية للموارد أو للمنتجات أو غيرها، وبالتالي لا يمكن أن تكون سلبية.

3.فرضيات البرمجة الخطية: تبنى البرمجة الخطية من جملة من الافتراضات من أهمها:

أ **التناسبية:** سواء كان ذلك لدالة الهدف أو القيود. فعلى سبيل المثال إذا كنا نحتاج إلى وحدتين من المواد الأولية لإنتاج وحدة واحدة تامة من منتج معين، فإننا نحتاج إلى أربعين وحدة من المواد الأولية لإنتاج عشرين وحدة من هذا المنتج.

ب **الإضافية:** معنى ذلك إذا كان الربح المحقق من المنتج الأول يساوي 20 دينار والربح المحقق من المنتج الثاني يساوي 30 دينار، وتم إنتاج وحدة واحدة من المنتج الأول ووحدة واحدة من المنتج الثاني، فإن إجمالي الربح الناجم عن إنتاج وبيع وحدة واحدة من كل منتج سيكون 20+30= 50 دينار.

ج **قابلية القسمة (الاستمرارية):** والمقصود هنا أن الحل لمشكلة البرمجة الخطية ليس بالضرورة أن يكون بأعداد صحيحة (طبيعية)، وهذا يعني قبول كسور كقيم لعوامل القرار.

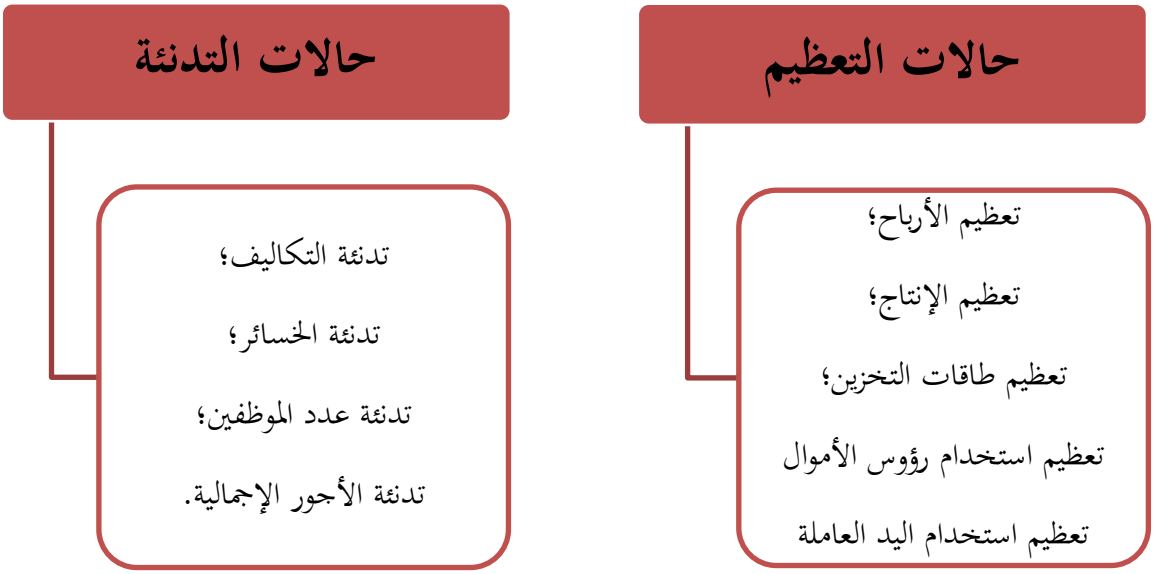
د **الخطية:** حيث يشترط أن تكون دالة الهدف والقيود عبارة عن معادلات أو متراجحات تحتوي عمى متغيرات من الدرجة الأولى.

هـ **عدم السلبية:** وهذا يعني أن جميع قيم متغيرات القرار يجب أن تكون موجبة (غير سالبة)، فالقيم السالبة للكميات المادية حالة مستحيلة، فعلى سبيل المثال لا نستطيع إنتاج عدد سالب من الكراسي أو القمصان.

و **التأكد التام:** يجب أن يكون جميع المعلومات التي تعتمد عليها البرمجة الخطية مؤكدة ولا تتغير خلال فترة الدراسة، سواء تعمق الأمر بدالة الهدف أو القيود. **فالشخص القائم بتعريف المشكلة لا تواجهه عملية التنبؤ أو التخمين حيث أنه يفترض العلم التام بالظروف والعلاقات التي سوف تسود في المستقبل.**

4.مجالات استخدام البرمجة الخطية:

تستخدم البرمجة الخطية في كل المسائل الاقتصادية التي تهدف إلى البحث عن قيم المتغيرات الاقتصادية بهدف إيجاد أمثلية الاستخدام.



كما تستخدم في الكثير من مجالات الإدارة وغير ذلك من المسائل الهادفة إلى عقلنة استخدام الموارد.

5.بناء (صياغة) النموذج الرياضي للبرمجة الخطية:

نقصد بو تحويل المسألة من واقع كبلمي مسرود في شكل تعابير أدبية إلى شكل مسألة مصاغة في قالب رياضي واضح، ولبناء النموذج الرياضي البرنامج الخطي يمكن إتباع الآتي:

أ **تحديد المتغيرات**: ويعتبر أول خطوة في بناء النموذج الرياضي للبرنامج الخطي، إذ يجب تحديد المتغيرات الواجب تعظيمها في حالة التعظيم أو الواجب تدنئتها في حالة التدنئة، حيث تدخل هذه المتغيرات في كتابة الشكل الرياضي في كل الخطوات اللاحقة.

ب **تشكيل جدول المسألة**: بعد تحديد المتغيرات يجدر بنا تشكيل جدول المسألة بحيث يحتوي هذا الجدول على جميع عناصر المسألة من متغيرات وقيود والكميات المحددة لدالة الهدف.

ج **تحديد دالة الهدف**: وهو إمكانية التعبير عن الهدف المنشود الذي نرغب في تحقيقه في صورة دالة خطية والحصول على قيمة رقمية له نسعى إلى إيجاد النهاية العظمى لها إذا كان الهدف المنشود هو تعظيم الربح، أو إيجاد النهاية الصغرى لها إذا كان الهدف هو تدنئة التكلفة، وتتكون دالة الهدف من المتغيرات التي قمنا بتحديدها في الخطوة الأولى مضروبة في معامل خاص يعبر عن ربح الوحدة الواحدة في حالة التعظيم، أو يعبر عن تكلفة الوحدة الواحدة في حالة التدنئة.

ويعبر عنها رياضيا كما يلي:

حالة التعظيم: $\text{Max: } Z= \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$

حالة التدنية: $\text{Min: } Z= \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$

د **تحديد القيود**: وهو إمكانية التعبير عن العلاقة بين المتغيرات والإمكانات المتاحة في صورة خطية توضح ما تحتاجه كل وحدة إنتاج من كل مورد من الموارد المتاحة المحدودة على شكل متراجحات أو معادلات أو كلاهما.

ويعبر عنها رياضيا كما يلي:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \ (\leq, \geq, =) b_i, (i = 1,2 \ldots., m)$$

هـ **شرط عدم السلبية**: إذ يجب أن تكون المتغيرات المشكلة للبرنامج الخطي غير سالبة أي موجبة أو معدومة.

ويعبر عنها رياضيا كما يلي:

$$X_j \geq 0, (j=1, 2,\ldots,n)$$

حيث أن: $\mathbf{Z}$: تمثل دالة الهدف المطلوب تعظيمها أو تدنيتها

$\mathbf{C_j}$: معامل متغير القرار (X_j) وتمثل هامش الربح، التكلفة الوحدوية، سعر البيع...إلخ. X_j: متغير القرار رقم j.

a_{ij}: المعاملات الفنية للنموذج. b_i: تمثل الموارد المحدودة من النوع i

مثال1 توضيحي:

تنتج إحدى الشركات نوعين من المنتجات (كراسي وطاولات)، يستخدم في الإنتاج آلتان، يتطلب إنتاج الكرسي الواحد تشغيل الآلة الأولى مدة ساعتين وتشغيل الآلة الثانية مدة ساعة واحدة، أما إنتاج الوحدة الواحدة من الطاولات فيتطلب تشغيل الآلة الأولى مدة ساعة واحدة والآلة الثانية مدة ثلاث ساعات، إذا علمت أن:

- ربح الوحدة الواحدة من الكراسي هو دينارين بينما ربح الوحدة الواحدة من الطاولات هو دينار ونصف.
- الطاقة الإنتاجية لآلة الأولى لا يتجاوز 8 ساعات، أما الطاقة الإنتاجية لآلة الثانية لا يتجاوز 10 ساعات.

المطلوب: بناء النموذج الرياضي الذي يحقق أكبر عائد ممكن للمصنع.

الحل:

الخطوة الأولى: تحديد المتغيرات:

بما أن المؤسسة تبحث عن الكميات الواجب إنتاجها من كل منتج لتعظيم أرباحها لذلك فإن المجاهيل هي عدد المنتجات من الكراسي وعدد المنتجات من الطاولات.

نضع: X_2: عدد الوحدات المنتجة من الطاولات. X_1: عدد الوحدات المنتجة من الكراسي

الخطوة الثانية: تشكيل جدولة للمسألة: لتسهيل فهم المشكلة نضع المسألة على شكل جدول.

الطاقة الإنتاجية القصوى لكل آلة (ساعة)	الساعات اللازمة لإنتاج وحدة واحدة		نوع الآلة
	الطاولات X_2	الكراسي X_1	
8	1	2	الآلة الأولى
10	3	1	الآلة الثانية
	1.5	2	الربح لكل وحدة

الخطوة الثالثة: تحديد دالة الهدف:

إن الهدف المراد تحقيقه في هذه المسألة هو تعظيم الربح، والذي يتأتى بتعظيم عدد الوحدات المنتجة من المنتجين، حيث أن الوحدة الواحدة من الكراسي تحقق ربحا قدره 2 ون، في حين أن وحدة واحدة من الطاولات تحقق ربحا قدره 1.5 ون.

وبالتالي فإن دالة الهدف تكتب كما يلي:

$$\text{Max: } Z=2X_1+1.5X_2$$

الخطوة الرابعة: تحديد القيود

-القيد الأول (قيد الآلة الأولى): إن أقصى زمن متاح لآلة الأولى هو 8 ساعات عمل (يمكن استغلال أقل من هذا الزمن)، ونلاحظ أيضا أن تصنيع كرسي واحد يتطلب 2 ساعة عمل بينما تصنيع طاولة واحدة يتطلب ساعة واحدة فقط. لذا يمكن كتابة القيد الأول من الشكل التالي:

$$2X_1+X_2\leq 8$$

-القيد الثاني (قيد الآلة الثانية) إن أقصى زمن متاح لآلة الثانية هو 10 ساعات عمل (يمكن استغلال أقل من هذا الزمن) ، ونلاحظ أيضا أن تصنيع كرسي واحد يتطلب ساعة عمل واحدة بينما تصنيع طاولة واحدة يتطلب 3 ساعات عمل. لذا يمكن كتابة القيد الثاني من الشكل التالي:

$$X_1+3X_2\leq 10$$

الخطوة الخامسة: شرط عدم السلبية

بما أن الكميات الواجب إنتاجها لا يمكن أن تكون بأي حال من الأحوال سالبة لذلك فإنه يمكن كتابة شرط عدم سلبية المتغيرات بالشكل التالي:

$$X_1\geq 0,\ X_2\geq 0$$

مما سبق فإنه يمكن كتابة البرنامج الخطي للمسألة على الشكل التالي:

$$\text{Max: } Z=2X_1+1.5X_2$$

$$\text{S/T} \begin{cases} 2X_1+X_2\leq 8 \\ X_1+3X_2\leq 10 \end{cases}$$

$$X_1\geq 0,\ X_2\geq 0$$

وبالتالي فقد تمت ترجمة الصيغة الوصفية للمسألة في شكل برنامج خطي عن طريق بناء الشكل الرياضي.

مثال2 توضيحي:

تنتج شركة لصناعة الأصباغ نوعين من الأصباغ، حددت الشركة أن إنتاجها من النوعين يجب ألا يقل عن 350 لتر، كما طلب العميل الرئيسي من النوع الأول 125 لتر يجب تحقيقها، ويحتاج انتاج لتر واحد من النوع الأول إلى ساعتين من العمل، في حين أن انتاج لبتر واحد من النوع الثاني يحتاج إلى ساعة واحدة من العمل. علما أن عدد ساعات الإنتاج المتاحة 600 ساعة فقط، وأن تكلفة انتاج اللتر الواحد من النوع الأول والثاني هو 2000دينار و3000دينار على التوالي.

المطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية التي تحقق أقل تكلفة إنتاج ممكنة.

الخطوة الأولى: تحديد المتغيرات:

بما أن المؤسسة تبحث عن الكميات الواجب إنتاجها من كل منتج لتدنية تكاليف الإنتاج لذلك فإن المجاهيل هي عدد المنتجات من الاصباغ من النوع الأول وعدد المنتجات من الاصباغ من النوع الثاني.

نضع: X_1: عدد الوحدات المنتجة من الاصباغ من النوع الأول. X_2: عدد الوحدات المنتجة الاصباغ من النوع الثاني

الخطوة الثانية: تشكيل جدولة للمسألة: لتسهيل فهم المشكلة نضع المسألة على شكل جدول.

عدد الساعات المتاحة	المنتجات		عدد ساعات العمل المستخدمة
	الصبغ النوع الثاني X_2	الصبغ النوع الأول X_1	
600	1	2	عدد الساعات
	3000	2000	تكلفة إنتاج اللتر الواحد

الخطوة الثالثة: تحديد دالة الهدف:

إن الهدف المراد تحقيقه في هذه المسألة هو تدنية التكاليف.

وبالتالي فإن دالة الهدف تكتب كما يلي:

$$\text{Min: } w=2000X_1+3000X_2$$

الخطوة الرابعة: تحديد القيود

-القيد الأول (قيد عدد ساعات العمل): إن أقصى زمن متاح من العمل هو 600 ساعة (يمكن استغلال أقل من هذا الزمن)، ونلاحظ أيضا أن إنتاج وحدة واحدة من النوع الأول يتطلب ساعتين من العمل بينما إنتاج وحدة واحدة من النوع الثاني يتطلب ساعة عمل واحدة. لذا يمكن كتابة القيد الأول من الشكل التالي:

$$2X_1+X_2\leq 600$$

-القيد الثاني (قيد كمية الإنتاج من النوعين) إن كمية الإنتاج من النوعين يجب أن لا تقل عن 350 لتر. لذا يمكن كتابة القيد الثاني من الشكل التالي:

$$X_1+X_2\geq 350$$

-القيد الثالث (طلب العميل) إن طلب العميل الرئيسي من النوع الأول يجب تحقيقه وهو 125 لتر. لذا يمكن كتابة القيد الثالث من الشكل التالي:

$$X_1\geq 125$$

الخطوة الخامسة: شرط عدم السلبية

بما أن الكميات الواجب إنتاجها لا يمكن أن تكون بأي حال من الأحوال سالبة لذلك فإنه يمكن كتابة شرط عدم سلبية المتغيرات بالشكل التالي:

$$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$$

مما سبق فإنه يمكن كتابة البرنامج الخطي للمسألة على الشكل التالي:

$$\text{Min: } Z = 2000X_1 + 3000X_2$$

$$\text{S/T} \begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 600 \\ X_1 + X_2 \geq 350 \\ X_1 \geq 125 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

وبالتالي فقد تمت ترجمة الصيغة الوصفية للمسألة في شكل برنامج خطي عن طريق بناء الشكل الرياضي.

6.صيغ النماذج الخطية: يمكن كتابة مسائل البرمجة الخطية وفق ثلاث صيغ هي:

- **الصيغة القانونية (النظامية):** وفيها تكتب كل القيود بنفس الإشارة إما $\geq$ أو $\leq$ فقط.
  - إذا كانت الصيغة تحتوي على إشارة أقل أو تساوي فإن دالة الهدف تكون في شكل تعظيمMax ؛
  - إذا كانت الصيغة تحتوي على إشارة أكبر أو تساوي، فإن دالة الهدف تكون في شكل تدنئة .Min
  - جميع تغيرات القرار غير سالبة، وجميع القيود عبارة عن متباينات.
  - جميع متغيرات القرار غير سالبة.
  - b_i غير محدد الإشارة.
- **الصيغة المعيارية (النموذجية، القياسية):** هي الصيغة التي تكون فيها كل القيود على شكل إشارة تساوي (=) فقط (تستثنى من ذلك قيود عدم السلبية)، أما دالة الهدف فتكون إما في صيغة تعظيم أو تدنئة.
  - جميع متغيرات القرار غير سالبة.
  - b_i غير سالب.
- **الصيغة المختلطة:** يقال عن مسألة برمجة خطية أنها ذات صيغة مختلطة إذا لم تأخذ الصيغة القانونية أو القياسية. وفيها تكتب القيود في البرنامج الخطي بصيغة مختلطة فهي تحوي كل الإشارات ($\geq$، =، $\leq$) دالة الهدف فتكون في شكل تعظيم Max أو في شكل تدنئة Min .

تحويل الصيغة المختلطة إلى الصيغة القانونية أو الصيغة القياسية:

يمكن الانتقال من الصيغة المختلطة إلى الصيغة النظامية أو القياسية باستخدام بعض التحويلات الأولية تماشيا مع الصيغة المراد بلوغها.

تحويلة 1: يمكن تحويل التصغير (Minimized) لدالة الهدف إلى تعظيم (Maximized) والعكس بضرب دالة الهدف في (-1).

ومنه: $\min Z = \text{Max} - Z$

مثال: $\text{Max: } Z=2X_1+3X_2$ $\qquad$ $\text{Min } Z= -2X_1-3X_2$

تحويلة 2: إن أي متباينة بإشارة معينة يمكن أن تستبدل بمتباينة من إشارة معاكسة بضرب طرفيها في (-1).

$$ax \geq b \quad -ax \leq -b$$

$$3X_1+2X_2 \geq 12 \quad -3X_1-2X_2 \leq -12$$

تحويلة 3: كل مساوية يمكن أن تستبدل بمتباينتين متعاكستين

$ax=b$ ⟵ $ax \geq b$ و $ax \leq b$

مثال:

$5X_1+2X_2= 6$ ⟵ $5X_1+2X_2 \geq 6$ و $5X_1+2X_2 \leq 6$

تحويلة 4: كل متباينة طرفها الأيسر يشكل قيمة مطلقة يمكن أن تستبدل بمتباينتين نظاميتين إذا كان p و q أكبر أو يساوي الصفر فإن:

$$|a.x| \leq p \rightarrow \begin{cases} a.x \leq p \\ a.x \geq -p \end{cases} \quad \text{و} \quad |a.x| \geq q \rightarrow \begin{cases} a.x \geq q \\ a.x \leq -q \end{cases}$$

تحويلة 5: كل متباينة يمكن أن تحول إلى مساواة:

- بإضافة متغير جديد غير سالب إلى طرفها الأيسر في حالة **أقل أو يساوي** ويسمى هذا المتغير بمتغير الفرق؛
- بطرح متغير جديد غير سالب من طرفها الأيسر في حالة **أكبر أو يساوي** ويسمى هذا المتغير متغير مساعد.

تحويلة 6: كل متغير غير محدد الإشارة (قيمة موجبة أو سالبة أو صفرية) يمكن أن يستبدل بتفاضل متغيرين غير سالبين. إذا كان مثلا X غير محدد الإشارة فأنه يستبدل ب: X^+-X^-، حيث أن: $X^+ \geq 0, X^- \geq 0$.

مثال: لنفرض لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min: } Z=3X_1-3X_2+7X_3$$
$$X_1+X_2+3X_3 \leq 40$$
$$X_1+9X_2-7X_3 \geq 50$$
$$5X_1+3X_2=20$$
$$[5X_1+8X_2] \leq 100$$
$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

X_3: غير مقيدة الإشارة

المطلوب: كتابة البرنامج وفقا للصيغة القانونية والقياسية بالاعتماد على التحويلات السابقة:

الحل: الصيغة القانونية

$$\text{Max : } Z=-3X_1+3X_2-7(X_3^+-X_3^-)$$
$$X_1+X_2+3(X_3^+-X_3^-)\leq 40$$
$$-X_1-9X_2+7(X_3^+-X_3^-)\leq -50$$
$$5X_1+3X_2\leq 20$$
$$-5X_1-3X_2\leq -20$$
$$5X_1+8X_2\leq 100$$
$$-5X_1-8X_2\leq 100$$
$$X_1\geq 0,\ X_2\geq 0,\ X_3^+\geq 0,\ X_3^-\geq 0$$

الحل: الصيغة القياسية

$$\text{Max : } Z=-3X_1+3X_2-7(X_3^+-X_3^-)+0S_1+0S_2+0S_3$$
$$X_1+X_2+3(X_3^+-X_3^-)+1S_1=40$$
$$-X_1-9X_2+7(X_3^+-X_3^-)-S_2=50$$
$$5X_1+3X_2=20$$
$$5X_1+8X_2+1S_3=100$$
$$-5X_1-8X_2+1S_4=100$$
$$X_1\geq 0,\ X_2\geq 0,\ X_3^+\geq 0,\ X_3^-\geq 0,\ S_1\geq 0,\ S_2\geq 0,\ S_3\geq 0$$