د. لمياء مكرسي **المستوى: السنة الثانية ليسانس علوم تجارية**

المحور الثالث: البرمجة الخطية: الطريقة البيانية

طرق حل نموذج البرمجة الخطية:

يستعمل لحل مسائل البرمجة الخطية عدة طرق مختلفة بإتباع خطوات متتالية وانطلاقا من الحل المبدئي (الأولي) إلى غاية بلوغ الحل الأمثل. ومن أهم هذه الطرق:

طريقة الحل البياني (The graphical method):

تستخدم هذه الطريقة عندما يحتوي النموذج على متغيرين فقط لأنه يستحيل رسم أكثر من محورين ومن مزاياها البساطة. وتعتمد هذه الطريقة على الرسم البياني لإيجاد الحل الأمثل وذلك باتباع الخطوات التالية:

- ✓ صياغة المشكلة في شكل نموذج رياضي.
- ✓ رسم محورين أحدهما أفقي X_1 والآخر عمودي X_2 يشكلان معلم متعامد ومتجانس.
- ✓ رسم الخطوط المستقيمة الممثلة للقيود بعد تحويل المتراجحات إلى معادلات.
- ✓ شطب المناطق التي تحقق قيود البرنامج الخطي.
- ✓ تحديد منطقة الحلول الممكنة من خلال نقاط التقاطع بين المستقيمات.
- ✓ تحديد الحل الأمثل والذي يمثل النقطة التي تعطي الحل الأمثل (أكبر قيمة لدالة الهدف في حالة التعظيم، أو أدنى قيمة في حالة التدنية)،بواسطة انسحابات للخط المستقيم الممثل لدالة الهدف بالاتجاه الذي يحقق القيمة المثلى.

1.الطريقة البيانية في حالة التعظيم:

تنتج مؤسسة نوعين من أثاث المكاتب هما A وB. ويتطلب صنع هذين المنتوجين المرور على قسمين هما: قسم التجميع وقسم التجهيز النهائي. وتقدر الطاقة الإنتاجية لقسم التجميع ب 60 ساعة ولقسم التجهيز النهائي ب 48 ساعة. يحتاج النوع الأول A لأربع ساعات في قسم التجميع وساعتين في قسم التجهيز النهائي. بينما يحتاج النوع الثاني B لساعتين في قسم التجميع وأربع ساعات في قسم التجهيز النهائي. كما أن العائد الوحدوي لكل نوع يقدر ب 8 دج و6دج لكل نوع على التوالي.

المطلوب: تحديد عدد المكاتب من كل نوع التي يجب إنتاجها لتحقيق أكبر عائد ممكن.

الحل:

تشكيل جدولة للمسألة: لتسهيل فهم المشكلة نضع المسألة على شكل جدول.

عدد ساعات العمل المستخدمة	المنتجات		عدد الساعات المتاحة (الطاقة الإنتاجية)
	النوع الأول X_1	النوع الثاني X_2	
قسم التجميع	4	2	60
قسم التجهيز النهائي	2	4	48
العائد الوحدوي	8	6	

أ. بناء النموذج الرياضي للمشكلة

$$\text{Max: } Z=8X_1+6X_2$$
$$4X_1+2X_2\leq 60$$
$$2X_1+4X_2\leq 48$$
$$X_1\geq 0,\ X_2\geq 0$$

ب. رسم المحاور الإحداثية المقابلة لمتغيرات المسألة والتمثيل البياني لجميع القيود

-تحويل المتراجحات المشكلة لقيود المسألة إلى معادلات كالآتي:

$$4X_1+2X_2= 60$$
$$2X_1+4X_2= 48$$

- لرسم المستقيمين على المعلم يكفي إيجاد نقطتين لكل مستقيم كالآتي:

المستقيم: $4X_1+2X_2= 60$			المستقيم: $2X_1+4X_2= 48$		
	X_2	X_1		X_2	X_1
النقطة الأولى	30	0	النقطة الأولى	12	0
النقطة الثانية	0	15	النقطة الثانية	0	24
	بعد رسم المستقيم قمنا بشطب المساحة التي تحقق حلول المتراجحة للقيد الأول وهي جميع النقاط الواقعة تحت المستقيم			بعد رسم المستقيم قمنا بشطب المساحة التي تحقق حلول المتراجحة للقيد الثاني وهي جميع النقاط الواقعة تحت المستقيم	
	منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المشتركة بين المستقيمين وتشمل النقاط (A B C D)، وهي التي تسمح لنا بتحديد الحل الأمثل وهو النقطة C لأنها نقطة تقاطع المستقيمين.				

منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المظللة في الشكل البياني والممثلة بالنقاط (A B C D)، وبالتالي فأي نقطة تقع ضمن هذه المنطقة تمثل حلا ممكنا للمشكلة. أما الحل الأفضل فإنه يتمثل بالنقاط الثلاثة B،C ، D (باستثناء نقطة المبدأ A والتي تمثل نقطة الأصل). وإن الحل الأمثل يتمثل بأحد هذه النقاط الأربعة.

ج. تحديد الحل الأمثل: إن تحديد الحل الأمثل من بين النقاط الأربعة يتم بأحد الطرق التالية:

-طريقة تقييم كافة النقاط الركنية؛

-طريقة رسم دالة الهدف:

ج.1 عن طريق تقييم النقط الركنية:

بما أن c هي نقطة تقاطع المستقيمين نحل جملة المعادلتين كما يلي:

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2= 60 \end{cases}$$

$2x_1+4x_2=48$

$\begin{cases} 2x_1+x_2= 30 \\ x_1+2x_2=24 \end{cases}$ $x_1=24-2x_2$

بالتعويض $2(24-2x_2)+x_2= 30$ $48-4\,x_2+ x_2= 30$

$X_1= 12, x_2=6$

وللتأكد من ذلك نقوم بالتعويض في النموذج الرياضي:

–عند النقطة A (0، 0): $Z= 0,\ 0<60,\ 0<48,\ (0,\ 0)= (0,\ 0)$

–عند النقطة B (0، 12): $Z= 72,\ 24<60,\ 48\leq48,\ (0,\ 0)\geq (0,\ 12)$

–عند النقطة D (15، 0): $Z= 120,\ 60\leq60,\ 30<48,\ (0,\ 15)\geq (0,\ 0)$

عند النقطة C (12، 6): $Z= 132,\ 60=60,\ 48=48,\ (12,\ 6)\geq (0,\ 0)$

النقطة	إحداثيات النقطة		قيمة Z
	X_1	X_2	
A	0	0	0
B	0	12	72
C	12	6	132
D	15	0	120

نلاحظ من خلال هذه الحلول الممكنة أن قيمة دالة الهدف Z ارتفعت من الصفر 0 والحل المبدئي إلى غاية القيمة 132 وهي أكبر قيمة، أي عند النقطة C تحقق الحل الأمثل. بمعنى أن خطة الإنتاج المثلى هي أن يتم إنتاج 12 مكتبا من النوع الأول و6 مكاتب من النوع الثاني لتحقيق أعظم ربح يقدر ب 132 دج في ظل الطاقات الإنتاجية المتاحة في القيدين.

ج.2 عن طريق رسم دالة الهدف

يمكن التوصل إلى نفس الحل الذي تم التوصل إليه في الطريقة السابقة بأسلوب أسهل عن طريق رسم دالة الهدف. لإنشاء المستقيم الممثل لدالة الهدف يمكن إعطاء دالة الهدف أية قيمة ويفضل أن تكون تقبل القسمة على معاملات دالة الهدف دون باقي وليكن 24 وحدة نقدية، أي:

المستقيم Δ : $Z=8X_1+6X_2= 24$		
X_1	**X_2**	
0	4	**النقطة الأولى**
3	0	**النقطة الثانية**
إن الخط المستقيم المار بالثنائية (3، 4) هو الخط الحامل لدالة الهدف عندما تكون مساوية ل 24. نقوم بتحريك هذا المستقيم بشكل متوازي باتجاه		

الرؤوس المشكلة لمضلع الحلول الممكنة، حيث يبدو من خلال الرسم أن النقطة C هي النقطة المثلى كونها آخر نقطة يصلها المستقيم Δ

2.الطريقة البيانية في حالة التدنية:

حل البرنامج الخطي التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$\text{Min: } Z=5X_1+5X_2$$

$$\text{S/T} \begin{cases} 3X_1+X_2\geq 6 \\ X_1+2X_2\geq 6 \\ X_1\geq 0,\ X_2\geq 0 \end{cases}$$

أ. رسم المحاور الإحداثية المقابلة لمتغيرات المسألة والتمثيل البياني لجميع القيود

-تحويل المتراجحات المشكلة لقيود المسألة إلى معادلات كالآتي:

$$3X_1+X_2= 6$$

$$X_1+2X_2= 6$$

- لرسم المستقيمين على المعلم يكفي إيجاد نقطتين لكل مستقيم كالآتي:

المستقيم: $3X_1+X_2= 6$			المستقيم: $X_1+2X_2= 6$		
	X_2	X_1		X_2	X_1
النقطة الأولى	6	0	النقطة الأولى	3	0
النقطة الثانية	0	2	النقطة الثانية	0	6
	بعد رسم المستقيم قمنا بشطب المساحة التي تحقق حلول المتراجحة للقيد الأول وهي جميع النقاط الواقعة فوق المستقيم			بعد رسم المستقيم قمنا بشطب المساحة التي تحقق حلول المتراجحة للقيد الثاني وهي جميع النقاط الواقعة فوق المستقيم	
	منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المشتركة بين المستقيمين وتشمل النقاط (B C D)، وهي التي تسمح لنا بتحديد الحل الأمثل وهو النقطة C لأنها نقطة تقاطع المستقيمين.				

ب.1 عن طريق تقييم النقط الركنية:

بما أن c هي نقطة تقاطع المستقيمين نحل جملة المعادلتين كما يلي:

$$\begin{cases} 3x_1+x_2= 6 \\ x_1+2x_2=6 \end{cases}$$

$$x_1=6-2x_2$$

بالتعويض $18-6\ x_2+ x_2= 6$ $3(6-2x_2)+x_2= 6$

$$X_2= 12/5= 2.4,\ X_1=1.2$$

وللتأكد من ذلك نقوم بالتعويض في النموذج الرياضي:

النقطة	إحداثيات النقطة		قيمة Z
	X_1	X_2	
B	0	6	30
C	1.2	2.4	18
D	6	0	30

نلاحظ من خلال هذه الحلول الممكنة أن أصغر قيمة لدالة الهدف Z هي 18دج والتي تحققت عند نقطة التقاطع C والتي تمثل الحل الأمثل.

ب.2 عن طريق رسم دالة الهدف

لإنشاء المستقيم الممثل لدالة الهدف يمكن إعطاء دالة الهدف أية قيمة ويفضل أن تكون تقبل القسمة على معاملات دالة الهدف دون باقي وليكن 5 وحدة نقدية، أي:

المستقيم Δ: $Z=5X_1+5X_2= 5$		
	X_2	X_1
النقطة الأولى	1	0
النقطة الثانية	0	1
إن الخط المستقيم المار بالثنائية (1، 1) هو الخط الحامل لدالة الهدف عندما تكون مساوية ل 5. نقوم بتحريك هذا المستقيم بشكل متوازي باتجاه الرؤوس المشكلة لمضلع الحلول الممكنة، حيث يبدو من خلال الرسم أن النقطة C هي النقطة المثلى كونها أول نقطة يصلها المستقيم Δ		

الحالات الخاصة للطريقة البيانية:

1. تعدد الحلول المثلى: في بعض الحالات نجد أكثر من حل أمثل واحد، أي تكون قيم دالة الهدف Z متساوية.

مثال:

$$\text{Max: } Z=2X_1+4X_2$$
$$X_1\leq 8$$
$$X_2\leq 3$$
$$3X_1+6X_2\leq 30$$
$$X_1\geq 0,\ X_2\geq 0$$

الحل:

-تحويل المتراجحات المشكلة لقيود المسألة إلى معادلات كالآتي:

$X_1 = 8$

$X_2 = 3$

$3X_1+6X_2=30$

المستقيم3: $3X_1+6X_2= 30$		
X_1	X_2	
0	5	النقطة الأولى
10	0	النقطة الثانية
بعد رسم المستقيم قمنا بشطب المساحة التي تحقق حلول المتراجحة للقيد الأول وهي جميع النقاط الواقعة تحت المستقيم		

الحلول الممكنة للنموذج الرياضي:

النقطة	إحداثيات النقطة		قيمة Z
	X_1	X_2	
A	0	0	0
B	0	3	12
C	8	1	20
E	4	3	20
D	8	0	16

نلاحظ ن منطقة الحلول الممكنة محصورة في المنطقة (A, B, E, C, D)، ومن خلال النتائج المتحصل عليها فأن الحل الأمثل يتحقق عند النقطتين E, C، والذين يمثلان أعظم ربح ممكن، وهنا يمكن للمؤسسة اختيار القرار الأفضل والأنسب لها.

2. حالة عدم وجود الحلول: في هذه الحالة فإن منطقة الحلول الممكنة لا يمكن تشكيلها، مما يستوجب تعديل النموذج.

مثال:

$$\text{Max: } Z=2X_1+5X_2$$
$$X_1+ X_2\leq 10$$
$$2X_1+3X_2\geq 48$$
$$X_1\geq 0,\ X_2\geq 0$$

الحل:

المستقيم: $2X_1+3X_2= 48$			المستقيم: $X_1+X_2= 10$		
X_1	X_2		X_1	X_2	
0	16	النقطة الأولى	0	10	النقطة الأولى
24	0	النقطة الثانية	10	0	النقطة الثانية
لا توجد منطقة حلول ممكنة					

نلاحظ من الشكل أنه لا توجد منطقة حلول ممكنة أي عدم وجود الحل الأمثل، مما يستوجب إعادة النظر في النموذج سواء بزيادة قيود أخرى أو تصحيح القيود السابقة حتى تتكون منطقة الحلول الممكنة.

3.حالة عدم تأثير أحد القيود (الشروط) على منطقة الحلول الممكنة: في هذه الحالة، نجد أن أحد القيود (المستقيم الذي يمثل هذا القيد) بعيد عن منطقة الحلول الممكنة أي لا يؤثر على الحل الأمثل، بمعنى أنه يمكن حذفه من النموذج.

مثال:

$$\text{Max : } Z=12X_1+8X_2$$
$$6X_1+4X_2\leq 24$$
$$2X_1+4X_2\leq 16$$
$$X_2\leq 7$$
$$X_1\geq 0,\ X_2\geq 0$$

الحل:

المستقيم: $6X_1+4X_2=24$			المستقيم: $2X_1+4X_2=16$		
	X_2	X_1		X_2	X_1
النقطة الأولى	6	0	النقطة الأولى	4	0
النقطة الثانية	0	4	النقطة الثانية	0	8

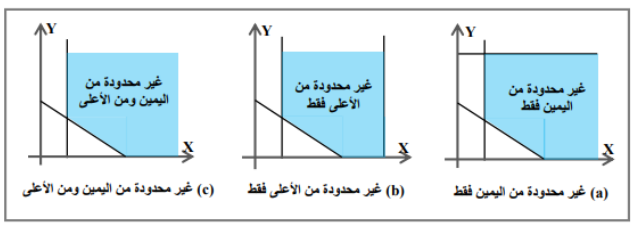
نلاحظ من الشكل أن منطقة الحلول الممكنة محددة بالمستقيمين 1 و2 والمحصورة في المنطقة (A, B, C, D) لم تتغير لما أضفنا القيد 3، أي عدم تأثير القيد 3 على منطقة الحلول الممكنة. وبالتالي يمكن استبعاده من النموذج الرياضي وحل النموذج بمعادلتين فقط.

4.حالة عدد لا نهائي من الحلول (دالة الهدف اللانهائية): في هذه الحالة، فإن دالة الهدف تزداد بشكل غير نهائي دون المساس بالقيود.

مثال:

$$\text{Max : } Z=6X_1+4X_2$$
$$X_1\geq 10$$
$$X_2\geq 12$$
$$X_1\geq 0,\ X_2\geq 0$$

نلاحظ من الشكل أن منطقة الحلول تؤول إلى ما لا نهاية أي وجود عدد لا نهائي من الحلول، مما يستوجب الرجوع إلى النموذج الرياضي وإعادة تصحيحه أو تعديله.



الشكل (2-15) بعض حالات عدم محدودة منطقة القبول

3تقييم الطريقة البيانية:

مزايا الطريقة:

- ✓ سهولة استخدامها وبساطتها؛
- ✓ توضيح بعض مفاهيم البرمجة الخطية.

عيوب الطريقة:

- ✓ تستعمل فقط إذا كان عدد المتغيرات لا يزيد عن اثنين ونادرة التطبيق.
- ✓ تفترض الاستغلال التام للطاقة الإنتاجية (تحويل المتراجحات إلى معادلات مباشرة).
- ✓ استخلاص النتيجة بصفة تقريبية وغير مؤكدة 100%.