د. لمياء مكرسي
المستوى: السنة الثانية ليسانس علوم تجارية

المحور الخامس: البرمجة الخطية: الثنائية أو الازدواجية (النموذج المقابل)

تعريف البرنامج الثنائي (Dual Model):

ظهرت البرامج الثنائية (Duality) نظرا لصعوبة حل البرامج الأصلية، ويمكن تعريف البرنامج أو النموذج الثنائي على أنه الصيغة المقابلة لصيغة البرنامج الأصلي. أي أن لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية هناك نموذج مقابل ومشتق منه، فإذا كان النموذج الأولى يتعلق بتعظيم دالة الهدف فإن النموذج المقابل له سيكون تدنئة دالة الهدف وتصاغ عادة من نفس البيانات التي يتضمنها النموذج الأول والعكس بالعكس.

مميزات النموذج المقابل:

- يساعد النموذج المقابل على التوصل إلى الحل بصورة أسرع في بعض الأحيان وذلك بتقليص خطوات الحل، أي أن طريقة حل المشكلة المقابلة تستلزم خطوات رياضية اقل تعقيد من الخطوات اللازمة لحل المشكلة الأولية أحيانا.
- للتخلص من الإشارة السالبة في الجانب الأيمن (إن وجدت)
- لغرض التعرف على أبعاد المشكلة الأخرى (المشكلة الثنائية، البديلة) فإذا كان النموذج الأولي وبصيغة الـ Max أي المشكلة بالصيغة الربحية، فبإمكاننا التعرف على النموذج الثنائي ويكون بصيغة الـ Min وتمثيله للجانب الكلفوي (في نفس المشكلة)، ولنفس المشكلة المعبر عنها أولا بالصيغة الأولية.
- يمثل عدد متغيرات النموذج الثنائي عدد قيود النموذج الأصلي، كما يمثل عدد قيود النموذج الثنائي عدد متغيرات النموذج الأصلي.
- قيمة دالة الهدف لحل النموذج الثنائي تساوي قيمة دالة الهدف لحل النموذج الأصلي.
- قيم المؤشرات Dj المقابلة لمتغيرات الفرق في الحل النهائي للبرنامج الأصلي تساوي قيم متغيرات الحل في البرنامج الثنائي.

خطوات صياغة مشكلة برمجة خطية ثنائية:

1. ثنائية الصيغ القانونية:

لتحويل البرنامج الأصلي إلى البرنامج الثنائي يتم اتباع الخطوات الموضحة في الجدول الموالي:

البرنامج الأصلي	البرنامج الثنائي
قيم الطرف الأيمن للقيود	معاملات دالة الهدف
معاملات دالة الهدف	قيم الطرف الأيمن للقيود
مصفوفة المعاملات في القيود	منقول مصفوفة المعاملات في القيود
دالة الهدف تعظيم Max	**دالة الهدف تدنية Min**
إشارة القيد i أصغر من أو تساوي	إشارة المتغيرة i أكبر من أو تساوي
إشارة المتغيرة i أكبر من أو تساوي	إشارة القيد i أكبر من أو تساوي
دالة الهدف تدنية Min	**دالة الهدف تعظيم Max**
إشارة القيد i أكبر من أو يساوي	إشارة المتغيرة i أكبر من أو تساوي
إشارة المتغيرة i أكبر من أو تساوي	إشارة القيد i أقل من أو تساوي

مثال1:

أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الخطي التالي:

$$Max: Z=3X_1+6X_2+8X_3$$
$$2X_1+3X_2+X_3\leq 6$$
$$5X_1+3X_2+2X_3\leq 2$$
$$X_1\geq 0,\ X_2\geq 0,\ X_3\geq 0$$

يكتب البرنامج الثنائي للبرنامج الأصلي كما يلي:

$$Min: Z=6y_1+2y_2$$
$$2y_1+5y_2\geq 3$$
$$3y_1+3y_2\geq 6$$
$$1y_1+2y_2\geq 8$$
$$y_1\geq 0,\ y_2\geq 0,$$

مثال2:

أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الخطي التالي:

$$Min: Z=2X_1+4X_2+7X_3$$
$$2X_1+7X_2+X_3\geq 12$$
$$X_1+5X_2+2X_3\geq 15$$
$$3X_1+2X_2+2X_3\geq 20$$
$$X_1\geq 0,\ X_2\geq 0,\ X_3\geq 0$$

يكتب البرنامج الثنائي للبرنامج الأصلي كما يلي:

$$Max: Z=12y_1+15y_2+20y_3$$
$$2y_1+y_2+3y_3\leq 2$$
$$7y_1+5y_2+2y_3\leq 4$$
$$1y_1+2y_2+2y_3\leq 7$$
$$Y_1\geq 0,\ Y_2\geq 0,\ Y_3\geq 0$$

2.ثنائية الصيغ المختلطة:

لتحويل البرنامج الأصلي إلى البرنامج الثنائي يتم اتباع الخطوات الموضحة في الجدول الموالي:

البرنامج الأصلي	البرنامج الثنائي
قيم الطرف الأيمن للقيود	معاملات دالة الهدف
معاملات دالة الهدف	قيم الطرف الأيمن للقيود
مصفوفة المعاملات في القيود	منقول مصفوفة المعاملات في القيود
دالة الهدف تعظيم Max	**دالة الهدف تدنية Min**
إشارة القيد i أصغر من أو تساوي	إشارة المتغيرة i أكبر من أو تساوي
إشارة القيد i أكبر من أو يساوي (غير متوافقة مع دالة الهدف)	إشارة المتغيرة i غير مقيد بالإشارة
إشارة القيد i تساوي	إشارة المتغيرة i غير مقيد بالإشارة
إشارة المتغيرة i أكبر من أو تساوي	إشارة القيد i أكبر من أو تساوي
المتغيرة i غير مقيد بالإشارة	إشارة القيد i من الشكل تساوي
دالة الهدف تدنية Min	**دالة الهدف تعظيم Max**
إشارة القيد i أكبر من أو يساوي	إشارة المتغيرة i أكبر من أو تساوي
إشارة القيد i أصغر من أو تساوي (غير متوافقة مع دالة الهدف)	إشارة المتغيرة i غير مقيد بالإشارة
إشارة القيد i تساوي	إشارة المتغيرة i غير مقيد بالإشارة
إشارة المتغيرة i أكبر من أو تساوي	إشارة القيد i أقل من أو تساوي

المتغيرة i غير مقيد بالإشارة	إشارة القيد i من الشكل تساوي

مثال1:

أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الخطي التالي:

$$Max : Z=6X_1+12X_2+16X_3$$
$$4X_1+6X_2+2X_3\leq 12$$
$$10X_1+6X_2+4X_3=4$$
$$X_1+X_2+2X_3\geq 6$$
$$X_1\geq 0,\ X_2\geq 0,\ X_3\geq 0$$

يكتب البرنامج الثنائي للبرنامج الأصلي كما يلي:

$$Min : Z=12y_1+4y_2+6y_3$$
$$4y_1+10y_2+1y_3\geq 6$$
$$6y_1+6y_2+1y_3\geq 12$$
$$2y_1+4y_2+2y_3\geq 16$$
$$y_1\geq 0,$$

y_2 غير مقيد بالإشارة

y_3 غير مقيد بالاشارة

شرح تفصيلي لكيفية التحويل في حالة الصيغة المختلطة للمثال السابق:

نلاحظ في النموذج الأصلي:

-أننا بصدد التعظيم إذا في المرافق ستكون دالة تدنية.

-عدد المتغيرات 3 (X_1, X_2, X_3) إذا في المرافق سيكون عدد القيود ثلاثة.

-عدد القيود ثلاثة إذا في المرافق سيكون عدد المتغيرات ثلاثة (y_1, y_2, y_3).

-القيد الأول متفق مع دالة الهدف من الشكل أصغر من أو يساوي إذا إشارة المتغير y1 أكبر من أو يساوي.

-القيد الثاني على شكل معادلة إذا إشارة المتغير y2 غير مقيد بالإشارة.

-القيد الثالث غير متفق مع دالة الهدف من الشكل أكبر من أو يساوي إذا إشارة المتغير y3 غير مقيد بالإشارة.

-جميع المتغيرات (X_1, X_2, X_3) تخضع لشرط عدم السلبية (أكبر من أو تساوي الصفر) إذا جميع القيود في البرنامج المرافق ستكون تتفق مع دالة الهدف تدنية أي إشارتها أكبر من أو تساوي.

مثال2:

أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الخطي التالي:

$$Min : Z=2X_1+3X_2$$
$$1X_1+3X_2\geq 6$$
$$X_1+3X_2\leq 12$$
$$X_1+2X_2=20$$
$$X_1\geq 0,$$

X_2 غير مقيد بالإشارة

يكتب البرنامج الثنائي للبرنامج الأصلي كما يلي:

$$Max : Z=6y_1+12y_2+20y_3$$
$$1y_1+1y_2+1y_3\leq 2$$
$$3y_1+3y_2+2y_3=3$$
$$y_1\geq 0$$

y_2 غير مقيد بالإشارة

y_3 غير مقيد بالإشارة

شرح تفصيلي لكيفية التحويل في حالة الصيغة المختلطة للمثال السابق:

نلاحظ في النموذج الأصلي:

-أننا بصدد تدنية إذا في المرافق ستكون دالة تعظيم.

-عدد المتغيرات 2 (x_1, x_2) إذا في المرافق سيكون عدد القيود 2.

-عدد القيود ثلاثة إذا في المرافق سيكون عدد المتغيرات ثلاثة (y_1, y_2, y_3).

-القيد الأول متفق مع دالة الهدف من الشكل أكبر من أو يساوي إذا إشارة المتغير y1 أكبر من أو يساوي.

-القيد الثاني غير متفق مع دالة الهدف من الشكل أصغر من أو يساوي إذا إشارة المتغير y2 غير مقيد بالإشارة.

-القيد الثالث على شكل معادلة إذا إشارة المتغير y3 غير مقيد بالإشارة.

-إشارة المتغير الأول (x_1) تخضع لشرط عدم السلبية (أكبر من أو تساوي الصفر) إذا القيد الأول في البرنامج المرافق سيكون متفق مع دالة الهدف تعظيم أي إشارتها أصغر من أو تساوي.

-إشارة المتغير الثاني (x_2) غير مقيد بالإشارة إذا القيد الثاني في البرنامج المرافق سيكون على شكل معادلة (=).