تحويل اللعبة إلى نموذج برمجة خطية

لنفترض أنه لدينا مصفوفة اللعبة ذات الشخصين ومجموع صفري التالي

استراتيجيات اللاعب A		اللاعب B					
		1	2	---	j	---	n
	1	a_{11}	a_{12}		a_{1j}		a_{1n}
	2	a_{21}	a_{22}		a_{2j}		a_{2n}
	i	a_{i1}	a_{i2}				a_{in}
	m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mj}		a_{mn}

نفترض أن هذه المصفوفة لا تحتوي نقاط استقرار ولا يمكن تحويلها إلى الشكل (2x2) وأن قيمة اللعبة هي V

عندئذ يستخدم اللاعب A استراتيجية مركبة معرفة بدلالة المتجه الاحتمالي

$$P = (P_1, P_2 \text{----} P_m) \quad / \quad \sum_{i=1}^{m} P_i = 1 \quad P_i \geqslant 0$$

العائد المتوقع للاعب A عندما يلعب اللاعب B الاستراتيجية الأولى

$$a_{11}P_1 + a_{21}P_2 + a_{31}P_3 + \text{----} \; a_{m1}P_m \geqslant V$$

وهذا العائد يجب أن لا يقل عن قيمة اللعبة V.

العائد المتوقع للاعب A عندما يلعب اللاعب B الاستراتيجية الثانية

$$a_{12}P_1 + a_{22}P_2 + a_{32}P_3 \text{----} \; a_{m2}P_m \geqslant V$$

وهكذا بالنسبة لباقي الاستراتيجيات التي يلعبها اللاعب B

فعندما يلعب B الاستراتيجية j فإن العائد المتوقع لـ A تكون

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} P_i \geqslant V \quad (j = 1 \text{---} n)$$

إن غاية اللاعب A جعل عائده المتوقع أكبر ما يمكن أي:

$$Z = V \longrightarrow Max$$

إذن مسألة اللاعب A تأخذ الشكل التالي

دالة الهدف $Z = V \longrightarrow Max$

القيود الخطية
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} P_i \geq V & (j=1,2,\dots,n) \\ \sum_{i=1}^{m} P_i = 1 \end{cases}$$

شرط عدم السلبية $P_i \geq 0$

وهو برنامج خطي يمكن حله وإيجاد قيمة اللعبة V وقيم الاحتمالات P_i

إلا أننا لابد من إجراء بعض التعديلات لتحويل الشكل السابق إلى نموذج خطي نظامي كما يلي:

بتقسيم الشروط الخطية في البرنامج السابق على V وذلك في حالة $V>0$:

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{P_1}{V} + a_{21}\dfrac{P_2}{V} \dots\dots a_{m1}\dfrac{P_m}{V} \geq 1 \\ a_{12}\dfrac{P_1}{V} + a_{22}\dfrac{P_2}{V} \dots\dots a_{m2}\dfrac{P_m}{V} \geq 1 \\ \vdots \\ a_{1n}\dfrac{P_1}{V} + a_{2n}\dfrac{P_2}{V} \dots\dots a_{mn}\dfrac{P_m}{V} \geq 1 \\ \\ \dfrac{P_1}{V} + \dfrac{P_2}{V} \dots\dots \dfrac{P_m}{V} = \dfrac{1}{V} \end{cases}$$

نضع $\bar{P}_i = \dfrac{P_i}{V}$ $\qquad Z = \dfrac{1}{V}$

نلاحظ أنه بما أن

$Max\,V = min\,1/V$ أو $Max\,Z = min\,z$

بما أن

$$\frac{1}{V} = P_1 + P_2 - - - - P_m$$

ومنه يصبح النموذج البرنامج الخطي السابق كالتالي

$$Z = P_1 + P_2 \; ---- \; P_m \implies Min$$

$$\begin{cases} a_{11} P_1 + a_{21} P_2 + \cdots\cdots a_{m1} P_m \geq 1 \\ a_{12} P_1 + a_{12} P_2 + \cdots\cdots a_{m2} P_m \geq 1 \\ \vdots \\ a_{1n} P_1 + a_{2n} P_2 \cdots\cdots a_{mn} P_m \geq 1 \\ \\ P_1, P_2, P_3 \cdots\cdots P_m \geq 0 \end{cases}$$

وهو برنامج خطي نظامي لمسألة اللاعب A

ملاحظة

أمـا في حالة $V=0$ فالقيمة السابقة تصبح بدون معنى.

" $V<0$ تغير من اتجاه المتباينات.

لتجنب هاتين المشكلتين نقوم بإضافة ثابت موجب ولتكن K إلى جميع عناصر مصفوفة اللعبة بحيث نضمن أن قيمة اللعبة بعد تعديل المصفوفة تكون أكبر من 0 وبعد الحصول على الحل الأمثل نطرح من قيمة اللعبة الثابت K

حيث K يساوي القيمة المطلقة لأصغر عنصر سالب مضافا إليه 1

$$K = |\text{أصغر عنصر سالب}| + 1$$

أما اللاعب B فإنه سيستخدم الاستراتيجية المركبة بدالة الشعاع الاحتمالي:

$$\cancel{H = (H_1, H_2, H_3, \cdots\cdots H_n)}$$

$$h = (h_1, h_2, h_3, \cdots\cdots, h_n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} h_j = 1 \qquad \text{و} \qquad h_j \geq 0$$

دالعائد المتوقع للاعب B عندما يلعب A بالاستراتيجية i تعطى بالعلاقة:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_j \quad (i = 1, 2 \dots m)$$

وغاية اللاعب B تأخذ جعل عائده المتوقع أصغر ما يمكن اي

$$Z = V \rightarrow Min$$

إذن مسألة اللاعب B تأخذ الشكل التالي:

دالة الهدف $\quad Z = V \longrightarrow Min$

الشروط الخطية

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_j \leq V & i = (1, 2 \dots m) \\ \sum_{j=1}^{n} h_j = 1 \end{cases}$$

$h_j \geq 0$ شرط عدم السالبية

وهو برنامج خطي بإجراء بعض التعديلات التالية:

تقسيم الشروط الخطية على V

نضع $\quad H_j = \frac{h_j}{V} \quad , \quad Z = 1/V$

$$\min V = Max \frac{1}{V} \quad \text{أو} \quad \min Z = Max Z$$

وأن $\quad \frac{1}{V} = H_1 + H_2 \dots H_n$

نجد ان نموذج البرمجة الخطية السابق يأخذ الشكل

$$Z = H_1 + H_2 \cdots H_n \rightarrow Max$$

ضمن الشروط الخطية التالية.

$$\begin{cases} a_{11}H_1 + a_{12}H_2 + \cdots a_{1n}H_n \leq 1 \\ \vdots \\ a_{m1}H_1 + a_{m2}H_2 \cdots a_{mn}H_n \leq 1 \\ H_1, H_2, H_3, \cdots H_n \geq 0 \end{cases}$$

وهو برنامج خطي نظامي لمسألة اللاعب B

بمقارنتها مع البرنامج الخطي النظامي لمسألة اللاعب A

نجد أنهما مترافقتين ومنه فإن الحل الأمثل لإحدى المسألتين

يعطي مباشرة الحل الأمثل لمسألة المرافقة الأخرى

مثال

أكتب البرنامج الخطي لكل لاعب لمصفوفة اللعبة التالية بين شخصين ومجموع صفري :

الاستراتيجيات		اللاعب B 1	2	3
اللاعب A	1	3	2	3
	2	2	3	4
	3	5	4	2

بما أن عناصر مصفوفة اللعبة موجبة إذا يمكن القسيم على V وبالتالي مسألة اللاعب A هي

Dual

$$Z = P_1 + P_2 + P_3 \rightarrow Min$$

$$3P_1 + 2P_2 + 5P_3 \geq 1$$

$$2P_1 + 3P_2 + 4P_3 \geq 1$$

$$3P_1 + 4P_2 + 2P_3 \geq 1$$

حيث أن

$$P_i = \frac{p_i}{V} \Rightarrow p_i = P_i / Z$$

$$V = 1/Z \qquad i = 1, 2, 3$$

مسألة اللاعب B هي

Primal

$$Z = H_1 + H_2 + H_3 \rightarrow Max$$

$$3H_1 + 2H_2 + 3H_3 \leq 1$$

$$2H_1 + 3H_2 + 4H_3 \leq 1$$

$$5H_1 + 4H_2 + 2H_3 \leq 1$$

$$H_j = \frac{h_j}{V} \Rightarrow h_j = H_j / Z$$

$$V = 1/Z \qquad j = 1, 2, 3$$

بحل احد البرنامجين نحصل على حل البرنامج الآخر

اللاعب A : $P_3 = \frac{2}{5}$, $P_2 = \frac{3}{5}$, $P_1 = 0$

اللاعب B : $h_3 = \frac{3}{5}$, $h_2 = 0$, $h_1 = \frac{2}{5}$

وقيمة اللعبة هي $V = \frac{16}{5}$ وهي لصالح اللاعب A .

حل تفصيلي للعبة

إذا كانت لدينا اللعبة

		اللاعب B		
		1	2	3
اللاعب A	1	3	2	3
	2	2	3	4
	3	5	4	2

أولاً: البحث عن نقطة التوازن

	اللاعب B 1	2	3	min
اللاعب A 1	3	2	3	2
2	2	3	4	2
3	5	4	2	2
Max	5	4	4	$\neq$

Maxmin = 2

minimax 4

ثانياً: الهيمنة و

من خلال دراسة اللعبة لا يمكن حذف أي عمود أو سطر

ثالثاً: استخدام البرمجة الخطية لحل اللعبة

لذا يتم تحويل اللعبة إلى برنامج خطي نظامي: (من وجهة نظر اللاعب B)

مع العلم أن $h_j = H_j / Z$ ، $H_j = \frac{h_j}{V}$

$V = \frac{1}{Z}$ ، $j = 1, 2, 3$

$$\text{Max } Z = H_1 + H_2 + H_3$$

$$\begin{cases} 3H_1 + 2H_2 + 3H_3 \leq 1 \\ 2H_1 + 3H_2 + 4H_3 \leq 1 \\ 5H_1 + 4H_2 + 2H_3 \leq 1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{\text{Max } Z = H_1 + H_2 + H_3}$$

$$\text{Max } Z - H_1 - H_2 - H_3 = 0$$

$$\begin{cases} 3H_1 + 2H_2 + 3H_3 + S_1 = 1 \\ 2H_1 + 3H_2 + 4H_3 + S_2 = 1 \\ 5H_1 + 4H_2 + 2H_3 + S_3 = 1 \end{cases}$$

	1	2	3	S_1	S_2	S_3		
S_1	3	2	3	1	0	0	1	1/3
S_2	2	3	4	0	1	0	1	1/2
S_3	$\boxed{5}$	4	2	0	0	1	1	1/5
	-1	-1	-1	0	0	0	0	

نبدأ بالعمود الأول مباشرة .

	H_1	H_2	H_3	S_1	S_2	S_3		
S_1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{9}$
S_2	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{16}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{16}$
H_1	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$
	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	

	H_1	H_2	H_3	S_1	S_2	S_3	
S_1	0	$-\frac{95}{80}$	0	1	$-\frac{9}{16}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$
H_3	0	$\frac{7}{16}$	1	0	$\frac{5}{16}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$
H_1	1	$\frac{5}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
	0	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$

هنا يمكن استخراج حل البرمجة حيث

$$Z = \frac{5}{16}$$

$H_1 = \frac{1}{8}$ $\quad H_3 = \frac{3}{16}$

$H_2 = 0$

أما حلول اللعبة فهي:
مما سبق لدينا.

$$V = \frac{1}{Z}$$

أي أن اللعبة لصالح اللاعب A بما فيه النتيجة موجبة
أي أن أقصى خسارة يمكن أن يتحصلها B هي $\frac{16}{5}$

$$V = \frac{16}{5}$$

$h_1 = H_1/Z$

$\Rightarrow h_1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{16}{5} \Rightarrow h_1 = \frac{2}{5}$

$h_2 = 0$

$h_3 = H_3/Z \Rightarrow h_3 = \frac{3}{16} \cdot \frac{16}{5}$

$\Rightarrow h_3 = \frac{3}{15}$

وبذلك على اللاعب أن يلعب بالاستراتيجية الأولى له باحتمال $h_1 = \frac{2}{5}$ ولا يلعب الاستراتيجية الثانية $h_2 = 0$ ويلعب بالاستراتيجية الثالثة باحتمال $h_3 = \frac{3}{5}$

وبذلك

$$h_1 + h_2 + h_3 = 1$$

$$\frac{2}{5} + 0 + \frac{3}{5} = 1$$

وهذا هي ثمن خسارة أقصاها

$$V = \frac{16}{5}$$