رابعا: وصف النموذج الرياضي لنظام صفوف الانتظار: تعتمد نظرية صفوف الانتظار على وصول الوحدات التي تريد الحصول على الخدمة إلى مراكز الخدمة، وعملية الوصول يمكن أن تكون:

- ✓ بمعدل ثابت خلال فترة زمنية معلومة، مثال ذلك (وصول البواخر إلى الموانئ، إقلاع الطائرات).
- ✓ بشكل عشوائي، مثال ذلك (التسوق من الأسواق المركزية، قطع التذاكر في صالات السينما)

ويمكن أن نعرف الخصائص العامة لقوانين صفوف الانتظار في:

1. إن معدل وصول الوحدات (λ) ، يخضع إلى توزيع بواسون
2. إن معدل تقديم الخدمة $(\boldsymbol{\mu})$ ، يخضع إلى التوزيع الأسي
3. إن معدل الوصول (λ) اقل من معدل تقديم الخدمة $(\boldsymbol{\mu})$ ، أي أن $(\lambda < \boldsymbol{\mu})$
4. إن نظام الخدمة المعتمد هو (من يصل أولا، يحصل على الخدمة أولا)

وفيما يأتي اهم الرموز المستخدمة في معادلات النماذج الرياضية لنظام صفوف الانتظار:

5. n تمثل عدد الوحدات في النظام (الوحدات في صف الانتظار + الوحدات في مراكز الخدمة)
6. (λ) تمثل عدد الوحدات القادمة للنظام في وحدة الزمن (معدل الوصول لكل وحدة زمنية)
7. $(\boldsymbol{\mu})$ تمثل عدد الوحدات المغادرة من النظام التي قدمت لها الخدمة (معدل الخدمة لكل وحدة زمنية)
8. $\boldsymbol{P}$: تمثل احتمال وجود وحدات في النظام (معامل التشغيل).
9. $\boldsymbol{P_0}$: تمثل احتمال عدم وجود وحدات في النظام (نسبة الوقت غير مستغل).
10. $\boldsymbol{L_s}$: تمثل متوسط عدد الوحدات المتوقع في النظام.
11. $\boldsymbol{L_q}$: تمثل متوسط عدد الوحدات المتوقع في صف الانتظار.
12. $\boldsymbol{W_s}$: تمثل متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل وحدة في النظام
13. $\boldsymbol{W_q}$: تمثل متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل وحدة في صف الانتظار.

وأخير يمكن دراسة ومعالجة مشاكل الانتظار في الحالات التالية

أ- نموذج صف الانتظار بمركز خدمة واحد (قناة واحدة – مرحلة واحدة)**:**

يعد هذا النموذج من ابسط الأنواع، ويسمى أحيانا بنظام القناة الواحدة، إذ تصل الوحدات إلى مركز الخدمة بشكل متتالي في صف واحد، وتقدم لها الخدمة بمرحلة واحدة، ومثال ذلك وصول السيارات العاطلة إلى ورشة التصليح وفيها مصلح واحد او ماكينة الصراف الآلي أو طابور العملاء الذين يتنظرون خدمة من نفس الموظف.

ومن اجل معالجة هذا النوع من النماذج تقوم بتوضيح العلاقات الرياضية والاحتمالية التالية:

$\boldsymbol{P}$: تمثل احتمال وجود وحدات في النظام (معامل التشغيل). $\boldsymbol{P = \frac{\lambda}{\mu}}$

$\boldsymbol{P_0}$: تمثل احتمال عدم وجود وحدات في النظام (نسبة الوقت غير مستغل). $\boldsymbol{P_0 = 1 - P = 1 - \frac{\lambda}{\mu}}$

$\boldsymbol{L_s}$: تمثل متوسط عدد الوحدات المتوقع في النظام.

$$\boldsymbol{L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}}$$

$\boldsymbol{L_q}$: تمثل متوسط عدد الوحدات المتوقع في صف الانتظار.

$$\boldsymbol{L_q = P \times L_s = P \times \left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda}\right) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \times \left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda}\right) = \left(\frac{\lambda^2}{\mu^2 - \mu.\lambda}\right)}$$

$\boldsymbol{W_S}$: تمثل متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل وحدة في النظام

$$\boldsymbol{W_s = \frac{1}{\mu - \lambda}}$$

$\boldsymbol{W_q}$: تمثل متوسط وقت الانتظار المتوقع لكل وحدة في صف الانتظار

$$\boldsymbol{W_q = P \times W_s = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \times \left(\frac{1}{\mu - \lambda}\right) = \left(\frac{\lambda}{\mu^2 - \mu.\lambda}\right)}$$

مثال: يقوم الموظف المسؤول عن تسليم القروض للزبائن في أحد البنوك، من تقديم الخدمة للزبائن بمعدل 40 زبون بالساعة في المتوسط، وان معدل وصول الزبائن للبنك هو 28 زبون بالساعة في المتوسط: المطلوب حسابك

1. احتمال أن يكون الموظف مشغول؟

2. نسبة الوقت الضائع (غير المستغل)؟
3. متوسط عدد الزبائن المتوقع في النظام؟
4. متوسط عدد الزبائن المتوقع في صف الانتظار؟
5. متوسط وقت الانتظار المتوقع في النظام؟
6. متوسط وقت الانتظار المتوقع في صف الانتظار؟

الحل

معدل الوصول $(\boldsymbol{\lambda})$ = 28 زبون بالساعة

معدل تقديم الخدمة $(\boldsymbol{\mu})$ = 40 زبون بالساعة

1. حساب احتمال أن يكون الموظف مشغول؟

- $\boldsymbol{P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{28}{40} = 0.7}$

2. حساب نسبة الوقت الضائع (غير المستغل)؟

- $\boldsymbol{P_0 = 1 - P = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - 0.7 = 0.3}$

3. متوسط عدد الزبائن المتوقع في النظام؟

- $\boldsymbol{L_s} = \frac{\lambda}{\boldsymbol{\mu}-\lambda} = \frac{28}{\boldsymbol{40-28}} = \boldsymbol{2.33 \approx 2}$

4. متوسط عدد الزبائن المتوقع في صف الانتظار؟

- $\boldsymbol{L_q = P \times L_s = P \times} \left(\frac{\lambda}{\boldsymbol{\mu}-\lambda}\right) = \left(\boldsymbol{\frac{28}{40}}\right) \times \left(\frac{28}{\boldsymbol{40-28}}\right) = \boldsymbol{0.7 \times 2.33 \approx 2}$

5. متوسط وقت الانتظار المتوقع في النظام؟

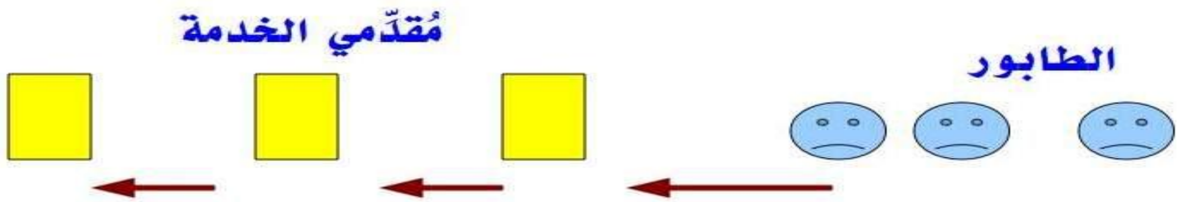
- .$\boldsymbol{W_s = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{40-28} = \frac{1}{12}}$ ساعة

6. متوسط وقت الانتظار المتوقع في صف الانتظار؟

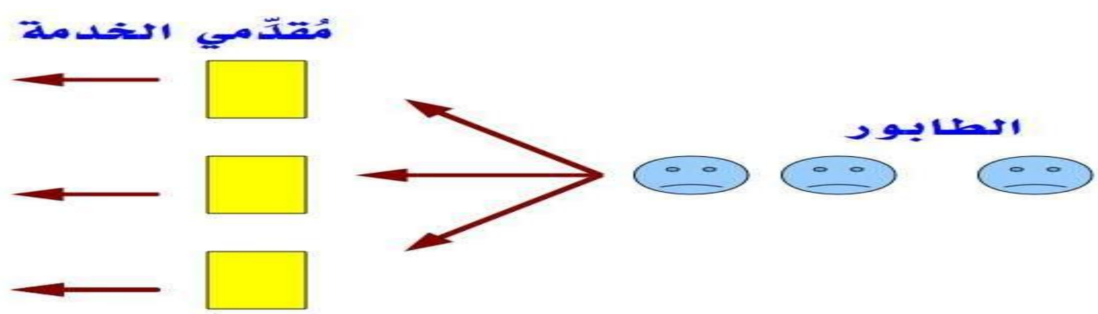
- .$\boldsymbol{W_q = \mathrm{P} \times W_s = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \times \left(\frac{1}{\mu-\lambda}\right) = \left(\frac{28}{40}\right) \times \left(\frac{1}{12}\right) = \frac{28}{480}}$ ساعة $\boldsymbol{= 3.5}$ دقيقة

ب- **نموذج صف الانتظار بأكثر من مركز خدمة (S) :** يعد نموذج صف الانتظار بأكثر من مركز خدمة أكثر تعقيداً من النموذج الأول، إذ يكون تقديم الخدمة بموجب هذا النموذج وفقاً لأحد الاساليب الموضحة أدناه.

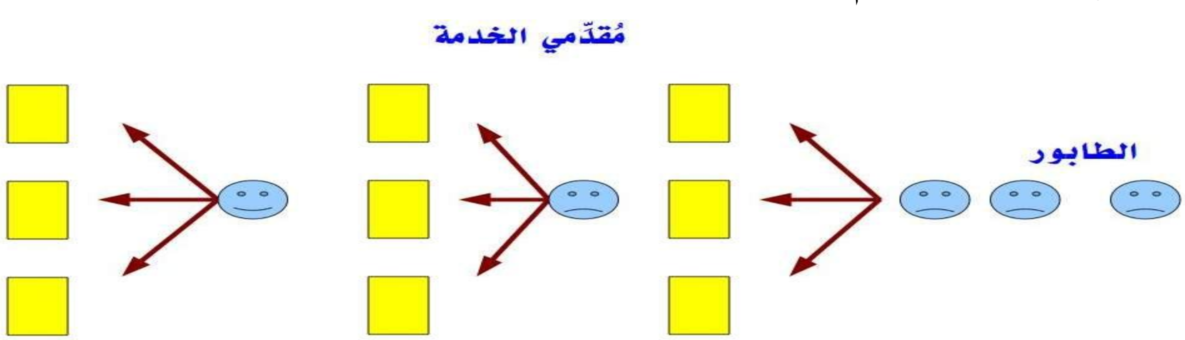
أ- **قناة واحدة – مراحل متعددة:** في هذه الحالة يمر العميل أو الشيء الذي ستتم عليه العملية من مرحلة لأخرى حتى يحصل على الخدمة المطلوبة، مثال ذلك أن تكون المرحلة الأولى هي مرحلة التأكد من صحة البيانات والثانية هي مرحلة استخراج وثيقة ما والثالثة هي مرحلة التوثيق، أو أن تكون عملية صناعية فتكون الأولى هي مرحلة التقطيع والثانية هي مرحلة الدهان والثالثة هي مرحلة الفحص وهكذا.



ب-**قنوات متعددة – مرحلة واحدة:** في هذه الحالة تتكون الخدمة من مرحلة واحدة ولكن يوجد أكثر من مقدم للخدمة، مثال ذلك طابور البنك الذي ينتهي إلى أكثر من موظف، أو طابور الخامات التي تنتظر التشغيل في ماكينة أ أو ب أو ج.



ت-**قنوات متعددة – مراحل متعددة:** هذه الحالة هي شبيهة بالحالة السابقة ولكنها متعددة المراحل، أي أن كلمرحلة تتكون من أكثر من مقدم للخدمة.



و فيما يأتي أهم العلاقات الرياضية و الاحتمالية الخاصة بهذا النموذج:

حساب احتمال وجود وحدات في النظام (النظام يعمل) تحسب حسب القانون التالي: $P = \frac{\lambda}{\mu}$

حساب احتمال عدم وجود وحدات في النظام (النظام معطل)، ويمكن أن نحسب قيمته من الجداول الخاصة بهذا النموذج اعتمادا على قيمة (**P**) وعدد مراكز الخدمة (*S*)

متوسط عدد الوحدات المتوقع في صف الانتظار حسب القانون التالي: $L_q = \frac{(p)^s \times \lambda \times \mu \times P_0}{(s-1)! \times \left((s \times \mu) - \lambda\right)^2}$

حيث تمثل (*S*) عدد مراكز الخدمة

متوسط عدد الوحدات المتوقع في النظام حسب القانون التالي:

$$L_s = L_q + P = \frac{(p)^s \times \lambda \times \mu \times P_0}{(s-1)! \times \left((s \times \mu) - \lambda\right)^2} + \frac{\lambda}{\mu}.$$

متوسط وقت الانتظار للوحدات المتوقع في صف الانتظار. تحسب حسب

القانون التالي: $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$

متوسط وقت الانتظار للوحدات المتوقع في النظام وتحسب حسب

القانون: $W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$ *Min*

مثال

في أحد البنوك الجزائرية، يقوم إثنين من الموظفين بتسليم القروض للزبائن بمعدل (30) زبون بالساعة في المتوسط، وأن معدل وصول الزبائن للمصرف هو (24) زبون بالساعة في المتوسط.

المطلوب جد ما يأتي:

والمطلوب: حدد ما يلي:

1- احتمال وجود زبائن في النظام؟

2-احتمال عدم وجود زبائن في النظام؟

3- متوسط عدد الزبائن في صف الانتظار؟

4-متوسط عدد الزبائن المتوقع في النظام؟

5-متوسط وقت الانتظار للزبائن المتوقع في صف الانتظار؟

6-متوسط وقت الانتظار للزبائن المتوقع في النظام؟

الحل

1- احتمال وجود زبائن في النظام

تحسب حسب القانون التالي: $\boldsymbol{P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{24}{30} = 0.8}$

2- حساب احتمال عدم وجود زبائن في النظام $\boldsymbol{P_0}$

بما أن عدد مراكز الخدمة أكبر من 1 اي 02 مراكز خدمة، فانه يمكن اســتنتاج قيمة $\boldsymbol{p_0}$ من الجداول الخاصة به.

ومن الجدل وحسب الملحق المرفق في الامتحان فان قيمة $\boldsymbol{p_0 = 0.4286}$ المقابلة لـ $\boldsymbol{P = 0.8}$

3- حساب متوسط عدد الزبائن المتوقع في صف الانتظار حسب القانون التالي:

$$L_q = \frac{(p)^s \times \lambda \times \mu \times P_0}{(s-1)! \times \left((s\times\mu)-\lambda\right)^2} = \frac{(0.8)^2 \times 24 \times 30 \times 0.4286}{(2-1)! \times ((2\times 30)-24)^2} =\approx 0.153805 \approx 0.15$$

يمكننـا أن نعبر عن القيمـة 0.153805 بـأنهـا الاحتمـاليـة لوجود زبونين في النظـام في نفس الوقـت، أو احتمالية حدوث ازدحام في الخدمة أو النظام المقدم

4- متوسط عدد الزبائن المتوقع في النظام حسب القانون التالي:

$$L_s = L_q + P = 0.153805 + \mathbf{0.8} = 0.953805.$$

هذا يعني أنه في المتوسط، سيكون هناك زبون واحد على وشك الحصول على الخدمة

5- متوسط وقت الانتظار للزبائن المتوقع في صف الانتظار.

تحسب حسب القانون التالي: ساعة $\boldsymbol{W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.153805}{24}} \approx 0.00641$

وبما أن قيمة Wq حوالي 0.00641، فإن هذا يعني أن المتوســط الزمني لانتظار العملاء في صــف الانتظار يقترب من 0.00641 ساعة، أو ما يعادل حوالي 23.1 ثانية .

6- متوسط وقت الانتظار للزبائن المتوقع في النظام.

حسب القانون: ساعة $\boldsymbol{W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.00641 + \frac{1}{30}} \approx 0.03974$

القيمة Ws تمثل المتوســط المتوقع لزمن وجود الزبون في النظام بما في ذلك وقت الانتظار في الصــف ووقت الخدمة الفعلي. بمعنى آخر، إذا كان زبون يدخل النظام، فمن المتوقع أن يقضي متوسط الزمن الذي يقضيه في النظام - بما في ذلك الصف وخدمته - حوالي 0.03974 ساعة أو ما يعادل حوالي 2.3844 دقيقة في المتوسط.