Interrogation 02

1) L'espace affine $\mathcal{E}$ est muni d'un repère (O, e_1, e_2, e_3) . On désigne par $H_{-1,5}$ l'homothétie de centre $A(1, 1, 1)$ et de rapport -1 .

Soit P le plan d'équation $-x + y - z = 2$.

Déterminer l'équation de l'image P' de P par $H_{-1,5}$.

2) Le plan affine $\mathcal{E}$ est muni d'un repère (O, e_1, e_2) .

On considère les applications $f, g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, dont leurs expressions

analytiques sont $f: \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 1 \end{cases} \quad g: \begin{cases} x' = 2x - 2 \\ y' = 2y - 2 \end{cases}$

Déterminer la nature et les caractéristiques de f, g et $\circ f$.

Solution.

1) Si $M'(x', y', z')$ est l'image de $M(x, y, z)$ par $H_{A,-1}$ alors $\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM}$, donc $\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y + 2 \\ z' = -z + 2 \end{cases}$ c-à-dire $\begin{cases} x = -x' + 2 \\ y = -y' + 2 \\ z = -z' + 2 \end{cases}$,

$P' : -(-x + 2) - y + 2 + z - 2 = 2$, d'où $P' : x - y + z = 4$.

2) f est une translation de vecteur $u \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

g est une homothétie de rapport 2 et leur centre est le point fixe de g .

$$\begin{cases} x = 2x - 2 \\ x = 2y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (2, 2) \text{ donc le point fixe de } g \text{ est } A(2, 2).$$

$$\underline{g \circ f} : M(x, y) \xrightarrow{f} M'(x', y') \xrightarrow{g} M''(x'', y''),$$

On a $\begin{cases} x'' = 2x' - 2 \\ y'' = 2y' + 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 1 \end{cases}$, donc

$$\begin{cases} x'' = 2(x - 1) - 2 = 2x - 4 \\ y'' = 2(y + 1) + 2 = 2y + 4 \end{cases}, \text{ d'où}$$

$$g \circ f : \begin{cases} x' = 2x - 4 \\ y' = 2y + 4 \end{cases}$$

$g \circ f$ est une homothétie de rapport 2 et leur centre est le point fixe de $g \circ f$.

$$\begin{cases} x = 2x - 4 \\ x = 2y + 4 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (4, -4) \text{ donc le point fixe de } g \text{ est } B(4, -4).$$