البرمجة الخطية Linear Programming

تمهيد:

عندما تريد المؤسسة استخدام نموذج للتخصيص الأمثل للموارد النادرة أو المحدودة للمنتجات أو الأنشطة المتنافسة في ظل فرضيات معينة كاليقين (الأكادة)، التكنولوجيا الثابتة، الربح المستمر لكل وحدة مباعة وأيضا الخطية (بمعنى نموذج خطي) فهذا ما يطلق عليه البرمجة الخطية، هذه الأخيرة كانت بدايتها على يد العالم الاقتصادي ويسلي ليونتيف (Wassily leontief) في ثلاثينات القرن الماضي (فترة الركود الاقتصادي 1929-1933)، والذي قام بتحليل العلاقة بين المدخلات والمخرجات باستخدام نماذج المدخلات والمخرجات. كما يرجع الفضل في تطبيق البرمجة الخطية إلى العالم الرياضي الفرنسي جين بابتستي فورير (J. B. Fourier)، وأيضا العالم الروسي كاتوروفش (L. V. Katorovich) من خلال استخدام الرياضيات في حل مشاكل التخطيط سنة 1939.

في بداية الأربعينيات من القرن الماضي قام العالم الاقتصادي جورج ستجلر (G. Stigler) بمحاولة تطبيق نماذج البرمجة الخطية، من خلال محاولته معالجة مشكلة تتعلق بإيجاد مزيج غذائي أمثل يتضمن مجموعة من المكونات الأساسية كالحديد والفيتامينات، ولكن لم يستطع الوصول إلى وسيلة حل معروفة في ذلك الوقت.

1. مفهوم البرمجة الخطية:

التعريف الأول: البرنامج الخطي هو عبارة عن صيغة رياضية تم اشتقاقها من واقع معين من أجل البحث عن أمثلية الاستخدام، عن طريق دالة رياضية تتكون من مجموعة من المتغيرات من الدرجة الأولى تسمى **دالة الهدف**، في ظل وجود عدد من القيود تكون في شكل معادلات أو متراجحات أو يمكن أن تكون معا من الدرجة الأولى أيضا. [1]

التعريف الثاني: البرمجة الخطية هي أسلوب رياضي يساعد على تأطير مشكلة أو حالة معينة بشكل رياضي، بهدف الوصل إلى حل أمثل باستخدام البيانات والمعلومات الخاصة بتلك المشكلة، سواء كانت ذات علاقة اعلم الاقتصاد أو بأي علم من العلوم الأخرى.[2]

---

[1] راتول، محمد، (2004)، **بحوث العمليات**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، ص 9

[2] خالد، حسين أحمد، (2000)، **بحوث العمليات –أسس ومبادئ-**، الطبعة الأولى، مطبعة وزارة التعليم العالي والبحث العلمي،

التعريف الثالث: البرمجة الخطية هي واحدة من أكثر البرامج استخداما وقوة وأكثر فائدة لاتخاذ القرارات الإدارية، حيث يمكن استخدام تقنية البرمجة الخطية لحل مجموعة واسعة من المشاكل الناشئة في الأعمال التجارية، الحكومة، الصناعة، المستشفيات والمكتبات... الخ. وبالتالي تساعد المؤسسة على تخصيص الموارد المحدودة المتاحة أمامها لمختلف الأنشطة من أجل تحقيقي الهدف المنشود. [3]

التعريف الرابع: البرمجة الخطية هي تقنية رياضية مستخدمة على نطاق واسع ومصممة لمساعدة المديرين (صانعي القرار) في التخطيط واتخاذ القرارات المتعلقة بتخصيص الموارد. [4]

وتعتبر البرمجة الخطية أحد أهم المواضيع في بحوث العمليات والتي تسعى إلى إيجاد الحلول السريعة للمشاكل المتعلقة باستغلال الموارد المتاحة في ظل الإمكانيات المحدودة للمؤسسة وبالتالي الوصول إلى أحسن النتائج.

خصائص نموذج البرمجة الخطية: يجب أن تتوفر في نموذج البرمجة الخطية مجموعة الخصائص التالية:

- يجب أن تكون العلاقة بين مجموعة المتغيرات والقيود علاقة خطية أي أن متغيرات القيود يجب أن تكون من الدرجة الأولى، فإذا كانت من الدرجة الثانية أو الثالثة أو غير ذلك فهنا يكون البرنامج غير خطي.
- يجب أن يحتوي أي برنامج خطي على دالة الهدف.
- يجب أن يحتوي أي نموذج برمجة خطية على مجموعة من القيود الهيكلية (البنائية).
- يجب أن يتضمن أي نموذج برمجة خطية على قيود عدم السلبية، بمعنى أن المتغيرات لا يجب أن تكون سالبة.

2. **مجالات استخدام وتطبيق البرمجة الخطية:** يتم استخدام البرمجة الخطية في حل العديد من المشكلات لعل أهمها: [5]

- **المشاكل المتعلقة بتخطيط الإنتاج:** حيث تساعد البرمجة الخطية على تحديد الكمية الواجب إنتاجها من منتج أو سلعة معينة التي تؤدي إلى تحقيق أقصى ربح، فعلى اعتبار أن الموارد تتسم

---

[3] Murthy, Rama, (2007), **Operations Research**, second edition, New Age International (p) Limited, Publishers, Publishing For One World, New Delhi, India, p 22

[4] Greg. O. Onwodi, **COURSE TITLE: Operations Research**, National Open University of Nigeria, SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, p 35

[5] العلاونة، علي، وآخرون، **بحوث العمليات في العلوم التجارية**، قسم إدارة الأعمال، جامعة مؤتة، دار المستقبل للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، ص ص: 131-132

عادة بالندرة بالنسبة للمؤسسة فإن البرمجة الخطية تمثل الوسيلة الناجعة لتوزيع تلك السلع المراد إنتاجها بطريقة تسمع بتعظيم أرباح المؤسسة.

- **المشاكل المتعلقة بتوزيع العمال:** تساعد البرمجة الخطية المؤسسة على توزيع العمال على مواقع العمل وأيضا تحديد عددهم اللازم بطريقة تسمح بتدنئة التكاليف إلى أدنى حدودها.
- **المشاكل المتعلقة بتخطيط الاستثمار:** تستخدم المؤسسة البرمجة الخطية من أجل التخطيط لتوزيع أموالها على البدائل الاستثمارية المتاحة بالطريقة التي تسمح بتعظيم أرباحها.
- **المشاكل المتعلقة بتوزيع الإنتاج:** حيث باستخدام هذا الأسلوب تستطيع المؤسسة توزيع منتجاتها على مختلف الأسواق، كما تمكن البرمجة الخطية المؤسسة على تخفيض تكلفة نقل المواد من المصانع إلى مخازنها.
- **الاستثمار:** حيث تستخدم البرمجة الخطية عند الاختيار بين أوجه الاستثمار في الأوراق المالية كالأسهم والسندات المتاحة بطريقة تسمح بزيادة عوائد المستثمرين. [6]

نقائص أسلوب البرمجة الخطية: بالرغم من الخصائص والمزايا التي يتمتع بها أسلوب البرمجة الخطية إلا أن هناك بعض المآخذ على هذا الأسلوب من الناحية التحليلية لعل أهمها:[7]

- تتميز معظم المتغيرات في الحياة العملية بأنها علاقات ذات طبيعة غير خطية، الأمر الذي يتعذر معه تطبيق أسلوب البرمجة الخطية، فهذا الأخير يتميز بصفة الخطية.
- إن أسلوب البرمجة الخطية يفترض أن جميع العلاقات بين المتغيرات معروفة ومؤكدة الحدوث، وبالتالي فهو لا يأخذ بعين الاعتبار حالات عدم التأكد التي تحدث في الحياة الصناعية والتجارية.
- لا يهتم أسلوب البرمجة الخطية بالمتغيرات الوصفية (أي تلك المتغيرات التي لا يمكن قياسها كميا)، حيث يمكن لهذا النوع من المتغيرات أن يكون له تأثير كبير في صناعة القرارات على مستوى المؤسسة.
- يحتاج أسلوب البرمجة الخطية كمية معينة من البيانات يصعب الحصول عليها في الظروف الاعتيادية خاصة من المؤسسات الصغيرة ومتوسطة الحجم.
- في حالة المشكلات المعقدة والتي تتميز بكم كبير جدا من المعلومات يتعذر استخدام أسلوب البرمجة الخطية في الحل اليدوي، مما يتطلب استخدام برمجيات الحاسوب لحلها.

---

[6] Greg. O. Onwodi, **COURSE TITLE: Operations Research**, National Open University of Nigeria, SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, p 36

[7] طعمة، حسن ياسين، النسور، مروان محمد، حنوش، ايمان حسين، **بحوث العمليات –نماذج وتطبيقات-**، الطبعة الأولى، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2009، ص ص: 39-40

افتراضات البرمجة الخطية: حتى يمكننا حل مشكلة معينة باستخدام البرمجة الخطية وجب توفر مجموعة من الافتراضات والتي يمكن أن نطلق عليها الشروط العملية أو المتطلبات الفنية لمشاكل البرمجة الخطية، وتتمثل هذه الافتراضات فيما يلي:[8]

- **التأكد (الأكادة):** ويقصد بها أن القيم الموجودة في دالة الهدف (مساهمات العوامل) والقيود (احتياجات العوامل) معروفة وثابتة ولا تتغير أثناء فترة معالجة مشكلة البرمجة الخطية.
- **التناسبية:** هذا الافتراض يقصد به أن تكون مساهمة العوامل في دالة الهدف وأيضا الكميات المستخدمة من الموارد ضمن قيود البرنامج تكون متناسبة مع قيمة كل متغير من متغيرات القرار. وكمثال على ذلك: أنه إذا نحتاج لثلاث وحادت من المادة الأولية لإنتاج وحدة واحدة من المنتج التام الصنع، فإننا نحتاج إلى ستون وحدة (60) من المادة الأولية لإنتاج عشرون (20) وحدة من هذا المنتج التام الصنع.
- **الإضافية:** ويقصد بهذا الافتراض أنه لا يوجد تداخل بين الأنشطة والفعاليات المختلفة، بمعنى أخر أن المجموع الكلي للأنشطة يساوي مجموع الأنشطة الفردية. ومثال ذلك أنه إذا كانت مؤسسة تنتج 05 منتجات (X1, X2, X3, X4, X5)، وأن الربح المحقق من بيع كل وحدة من هذه المنتجات يكون على التوالي: (2, 8, 6, 3, 4)، فإن الربح الناجم عن إنتاج وبيع خمس (05) وحدات من كل منتوج هو: (4+3+6+8+2) × 5 = 115 وحدة نقدية.
- **قابلية القسمة أو الكسرية:** وهذا يعني أنه عند حل مسألة برمجة خطية يمكن أن يكون هذا الحل أرقاما كسرية، وبالتالي يجب قبول هذه القيم فليس من الضروري أن تأخذ قيم الحل دائما أعدادا صحيحة.
- **شروط أو قيود عدم السلبية:** ويقصد هنا أن قيم متغيرات القرار يجب أن تكون موجبة وغير سالبة.

الخطوات الأساسية لصياغة مسائل البرمجة الخطية: لكي نستطيع وضع صياغة رياضية لمسألة البرمجة الخطية للبيانات الاقتصادية أو الإدارية لا بد أولا من معرفة البرنامج الخطي، ومنه يتم البدء

---

[8] ارجع الى:

الطراونة، محمد أحمد. وعبيدات سليمان خالد. **مقدمة في بحوث العمليات**، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، عمان، الأردن، 2009، ص، ص: 78-79

طعمة، حسن ياسين، النسور، مروان محمد، حنوش، ايمان حسين، **بحوث العمليات –نماذج وتطبيقات-**، الطبعة الأولى، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2009، ص ص: 40-41

بني هاني، جهاد صياح. وملكاوي، نازم محمد. والحوري فاتح عبد القادر، **تطبيقات بحوث العمليات في إدارة الأعمال**، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان الأردن، 2013، ص، ص: 80-81

بتحديد المتغيرات التي يمكن التحكم فيها (Controllable Variables) ومنها إلى تحديد الهدف.[9] وعليه فإن المكونات الأساسية لصياغة مسألة البرمجة الخطية هي:

- **دالة الهدف:** تعبر دالة الهدف أو الهدف بصفة عامة عن النتيجة النهائية المراد الوصول إليها، أي هي الهدف المنشود أو ما نصبو إلى تحقيقه، حيث يمكن التعبير عن هذا الهدف في شكل دالة رياضية خطية والحصول على قيمة رقمية لهذا الهدف، وبالتالي يمكن أن يكون هذا الهدف المراد تحقيقه مثلا هو الربح أو العوائد، فهنا يتم تعظيم قيمة دالة الهدف أو إيجاد النهاية العظمى، كما يمكن أن يكون الهدف هو تقليل قيمة وبالتالي يتم هنا إيجاد النهاية الصغرى إذا كان الهدف تكلفة، بمعنى أخر الوصول إلى أدنى تكلفة ممكنة.[10]

وتكتب دالة الهدف رياضيا بالصيغة التالية:

$$Max.\,or\,Min.\,Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

حيث:

Z: تمثل دالة الهدف المطلوب تعظيمها (Max) أو تدنئتها (Min).

C_j: معامل متغير القرار، ويمكن أن تعبر عن الربح أو عن التكلفة.

X_j: متغير القرار رقم (j)، ويمثل نشاط معين.

وتتكون دالة الهدف من مجموعة من المتغيرات؛ حيث معاملات هذه المتغيرات هي ربح الوحدة الواحدة مثلا أو سعر البيع في حالة تعظيم دالة الهدف، أو أنه يعبر عن تكلفة الوحدة الواحدة أو الخسارة الناجمة عن الوحدة في حالة تخفيض دالة الهدف.

- **تحديد القيود:** يمكن القول أن القيود هي محددات مشكلة لمؤسسة ما، وهي توضح ما تحتاجه كل وحدة منتجة من كل مورد من الموارد المتاحة (حيث تتصف هذه الموارد بأنها محدودة) في شكل متراجحات أو معادلات خطية، كما يمكن أن تتضمن الشكلين معا. مما سبق نقول أن القيود هي إمكانية التعبير عن العلاقة بين متغيرات القرار والإمكانيات المتوفرة أو المتاحة في صورة قيود خطية.[11]

---

[9] الشيخ، أبو القاسم مسعود، (2009) **بحوث العمليات**، الطبعة الثانية، المجموعة العربية للتدريب والنشر، القاهرة، مصر، ص 28

[10] الجواد، دلال صادق. والفتال، حميد ناصر، (2008)، **بحوث العمليات**، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، ص 24

[11] أنظر:

وتأسيسا على ما سبق يمكن كتابة الشكل الرياضي لقيود البرنامج كما يلي:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j(\leq, =, \geq)b_i \quad , \qquad (i = 1,2, \dots\dots, m)$$

حيث:

a_{ij}: تعبر عن كمية الموارد المحدودة من الصنف (i) المخصصة لكل وحدة واحدة من المنتج (j).

b_i: تمثل الموارد المحدودة من الصنف (i).

- **شرط عدم السلبية:** يقصد بهذا الشرط أن تكون جميع متغيرات القرار الداخلة في النموذج ذات إشارة موجبة أو تكون صفرية، ولا يمكن بأي حال من الأحوال أن تكون سالبة. رياضيا يمكن التعبير عن شرط عدم السلبية كما يلي:

$$X_j \geq 0 \quad , (j = 1,2, \dots\dots, n)$$

الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية: بناءا على ما تقدم ذكره يمكن وضع صيغة عامة لنموذج البرمجة الخطية كما يلي:

$Max\ or\ Min. Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$ **دالة الهدف**

Subject to :

$$\begin{cases} a_{11}X_2 + a_{12}X_2 + \cdots a_{1n}X_n(\leq, =\geq)b_1 \\ a_{21}X_2 + a_{22}X_2 + \cdots a_{2n}X_n(\leq, =\geq)b_2 \\ a_{m1}X_2 + a_{m2}X_2 + \cdots a_{mn}X_n(\leq, =\geq)b_m \end{cases}$$ **القيود**

$X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0$ **شرط عدم السلبية**

الجواد، دلال صادق. والفتال، حميد ناصر، مرجع سبق ذكره، ص 24

بني هاني، جهاد صياح. وملكاوي، نازم محمد. والحوري فاتح عبد القادر، مرجع سبق ذكره، ص 87

أمثلة تطبيقية عن مسائل البرمجة الخطية:

مثال تطبيقي رقم 01:

تحتوي مؤسسة اقتصادية على 03 ورشات لإنتاج 03 أنواع من المنتجات هي: خزائن حديدية، مكاتب إدارية وكراسي. بحيث أن كل منتج يمر عبر الثلاث ورشات على النحو التالي:

- **الورشة الأولى:** تجرى بها عملية صناعة الهياكل، طاقة العمل القصوى هي: 24 ساعة عمل يوميا، (أي 04 عمال كل عامل يشتغل 06 ساعات يوميا).
- **الورشة الثانية:** تجري بها عملية تركيب الملحقات، طاقة العمل القصوى بها هي: 24 ساعة عمل يوميا.
- **الورشة الثالثة:** تجرى بها عملية الإنهاء (طلاء، تزيين، تغليف)، طاقة العمل القصوى بها هي: 16 ساعة عمل يوميا.

هذه المؤسسة تسعى لتحقيق أكبر ربح ممكن، ولأجل ذلك بينت لها الدراسة التقنية التي قامت بها أن الوحدة الواحدة من المنتج الأول تتطلب 04 ساعات عمل في الورشة الأولى و02 ساعة عمل في الورشة الثانية و02 ساعة عمل في الورشة الثالثة. بينما الوحدة الواحدة من المنتج 02 تتطلب 04 ساعات عمل في الورشة الأولى و04 ساعات عمل في الورشة الثانية و02 ساعة عمل في الورشة الثالثة. وأخيرا الوحدة الواحدة من المنتج 03 تتطلب 05 ساعات عمل في الورشة الأولى و03 ساعة عمل في الورشة الثانية و01 ساعة عمل في الورشة الثالثة. كما أن الربح الصافي للوحدة الواحدة من كل منتج هو: المنتج الأول: 200 دج. المنتج الثاني: 150 دج. المنتج الثالث: 120 دج.

المطلوب: أوجد الصيغة الرياضية لهذه المسألة والتي من شأنها إيجاد الكميات من كل منتج لأجل تعظيم ربح هذه المسألة.

حل المثال التطبيقي رقم 01:

أولا: صياغة دالة الهدف

نقوم في الخطوة الأولى بصياغة دالة الهدف المتعلقة بهذه المسألة، ونلاحظ أن هذا المستثمر يسعى لتحقيق أكبر ربح ممكن وعليه تكتب دالة الهدف للبرنامج الرياضي السابق كما يلي:

دالة الهدف: $Max\ Z(x_1, x_2, x_3) = 200x_1 + 150x_2 + 120x_3$

ثانيا: كتابة قيود البرنامج حيث بحسب العمليات التي تحدث على مستوى كل ورشة فإن قيود البرنامج تكتب كما يلي:

القيد الأول: يتمثل في الورشة الأولى والتي تتم بها عملية صناعة الهياكل، حيث أن أقصى زمن متاح في هذه الورشة هو 24 ساعة، وحيث أن الوحدة الواحدة من الخزائن الحديدية يتطلب 04 ساعات، كما أن الوحدة الواحدة من المكاتب الإدارية تتطلب 4 ساعات، في حين أن الوحدة الواحدة من الكراسي تتطلب 5 ساعات. وبالتالي يمكن صياغة القيد الأول كما يلي:

$$4x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 24$$

القيد الثاني: يتمثل في الورشة الثانية والتي تتم بها عملية تركيب الملحقات، ونلاحظ أن الزمن المتاح ضمن هذه الورشة هو 24 ساعة أيضا كما هو الحال في الورشة الأولى. وحيث أن الوحدة من الخزائن الحديدية تتطلب ساعتين، كما أن الوحدة من المكاتب الإدارية تتطلب 04 ساعات، وأن الوحدة من الكراسي تتطلب 3 ساعات. وعليه يكون القيد الثاني كما يلي:

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 24$$

القيد الثالث: يتمثل في قيد الورشة الثالثة والتي تتم بها عملية الإنهاء من طلاء وتزيين وتغليف. نلاح أن الوقت الأقصى المتاح في هذه الورشة هو 16 ساعة، وحيث أنه لإنتاج وحدة من الخزائن الحديدية يتطلب وقت قدره 02 ساعة، كما أن الوحدة الواحدة من المكاتب الإدارية يتطلب وقت مقداره 02 ساعة، كما أن الوحدة الواحدة من الكراسي يتطلب ساعة. وعليه يكون القيد الثالث كما يلي:

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 16$$

ثالثا: قيود عدم السلبية

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

وعليه يكتب البرنامج الخطي الموافق للمسالة السابقة بالشكل الرياضي الموالي:

$$Max\ Z(x_1, x_2, x_3) = 200x_1 + 150x_2 + 120x_3$$

Sobject to :

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 24 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

مثال تطبيقي رقم 02: مصنع ينتج منتجين P1 وP2 ويقوم باستعمال عدد من الموارد؛ المعدات، يد عاملة ومواد أولية، والجدول الموالي يوضح احتياجاته من هذه الموارد، حيث أن الموارد محدودة بالنسبة للمؤسسة.

الموارد	المنتج P_1	المنتج P_2	المتاح من الموارد
المعدات	03	09	81
اليد العاملة	04	05	55
المواد الأولية	02	01	20

كل وحدة مباعة من المنتجين P1 وP2 تحقق ربح للمؤسسة مقداره 6 وحدة نقدية و4 وحدة نقدية على التوالي.

المطلوب: ما هي الكميات من P1 وP2 التي تبعها المؤسسة من أجل تحقيق أقصى ربح باستخدام طريقة الحل البياني.

حل المثال التطبيقي رقم 02:

الخطوة الأولى: صياغة دالة الهدف

في البداية يتم كتابة دالة الهدف لهذا البرنامج، فعلى اعتبار أن هدف المؤسسة هو تعظيم الربح وأن ربح الوحدة من المنتجين P1 وP2 هو 6 و4 على التوالي؛ فإن دالة الهدف تكتب كما يلي:

$$Max\ Z(x_1, x_2,) = 6x_1 + 4x_2$$

الخطوة الثانية: كتابة قيود البرنامج

يتم في هذه الخطوة كتابة مختلف قيود البرنامج، والتي تعبر عن الوقت اللازم على الألات والبد العاملة وأيضا المادة الأولية المستعملة لإنتاج كل وحدة واحدة، وهذا كما يلي:

القيد الأول: وهو القيد الذي يعبر عن المعدات، حيث يتم كتابته كما يلي

$$3x_1 + 9x_2 \leq 81$$

القيد الثاني: يعبر القيد الثاني عن اليد العاملة ويكتب بالشكل الموالي

$$4x_1 + 5x_2 \leq 55$$

القيد الثالث: يعبر القيد الثالث عن كمية المادة الأولية المستعملة لإنتاج وحدة واحدة من المنتجات التامة

$$2x_1 + 1x_2 + \leq 20$$

ثالثا: قيود عدم السلبية

وهو شرط أساسي في كتابة أي برنامج خطي؛ حيث يلزم بانه لا يمكن أن تأخذ متغيرات البرنامج قيما أقل من الصفر، أي:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

وفي النهاية يتم كتابة البرنامج الخطي الموافق لهذه المسألة كما يلي:

$$Max\ Z(x_1, x_2,) = 6x_1 + 4x_2$$

Sobject to :

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

مثال تطبيقي رقم 03:

أمين رجل أعمال جزائري في تركيا، قرر العودة إلى أرض الوطن والاستثمار، ففكر في بناء مصنع صغير لإنتاج نوعين من القمصان: رجالي حيث أن ربح القميص الواحد هو 80 دج ونسائي حيث كان ربح القميص هو 100 دج. وأن هذين النوعين من الألبسة يمر عبر 03 ورشات إنتاجية:

- **ورشة الغزل:** طاقتها الإنتاجية لا تتجاوز 54 ساعة عمل للدورة الواحدة وأن القمصان النسائية كان يحتاج 03 ساعات عمل في هذه الورشة، أما النوع الرجالي فيحتاج الى 06 ساعات عمل.
- **ورشة النسيج:** تبلغ الطاقة الإنتاجية لها بحدود 48 ساعة عمل للدورة الواحدة، يحتاج النوع النسائي في هذه الورشة الى 06 ساعات عمل في حين يحتاج النوع الرجالي الى 03 ساعات عمل.
- **ورشة التجهيز النهائي والتعبئة:** الطاقة الإنتاجية لها في حدود 90 ساعة عمل -لا يمكن تجاوزها في العملية الإنتاجية- بواقع 09 ساعات عمل لكلا النوعين من القمصان.

المطلوب: تتجلى مشكلة أمين في معرفة العدد من نوعي القمصان الذي يسمح بتحقيق أعظم ربح.

حل المثال التطبيقي رقم 03

كتابة البرنامج الخطي الموافق للمسألة.

أولا: كتابة دالة الهدف

بالعودة للمسألة نجد أن هذا المستثمر يحقق ربحا للوحدة عن المنتجين بمقدار 80 دج و100 دج على التوالي. فإذا رمزنا لمنتج القميص الرجالي بـ X_1 ومنتج القميص النسائي بـ X_2 يمكننا كتابة دالة الهدف لهذا البرنامج بالشكل الموالي:

$$Max\ Z(x_1, x_2,) = 80x_1 + 100x_2$$

ثانيا: كتابة قيود البرنامج

بالعودة للمسألة نلاحظ بأن قيود البرنامج تعبر عن الوقت المستغرق لانتاج كل وحدة من القمصان على مستوى ثلاث ورشات.

القيد الأول: يعبر عن ورشة الغزل؛ حيث الوقت الأقصى المتاح في هذه الورشة هو 54 ساعة، وعليه يكتب القيد الأول كما يلي:

$$6x_1 + 3x_2 \leq 54$$

القيد الثاني: بالنسبة لهذا القيد فهو يعبر عن الوقت المتاح في ورشة النسيج وأيضا عدد الساعات اللازمة لإنتاج كل وحدة من المنتوجين ضمن هذا الورشة.

$$3x_1 + 6x_2 \leq 48$$

القيد الثالث: يتعلق هذا القيد بورشة التجهيز النهائي والتعبئة، حيث توضح المسألة الوقت المتاح في هذه الورشة وأيضا الوقت المستغرق لإنتاج كل وحدة من المنتجين.

$$9x_1 + 9x_2 \leq 90$$

ثالثا: قيود عدم السلبية:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

وفي الأخير يمكننا كتابة البرنامج الخطي الموافق للمسألة السابقة كما يلي:

$$Max\ Z(x_1, x_2,) = 80x_1 + 100x_2$$

Sobject to :

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 \leq 54 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 48 \\ 9x_1 + 9x_2 \leq 90 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

مثال تطبيقي رقم 04:

مؤسسة صناعية تصنع منتجين T وU، حيث أن الهامش على التكلفة المتغيرة للوحدة هو: 240 دج و350 دج على التوالي. فإذا علمت أن المؤسسة تهدف إلى تعظيم الهامش على التكلفة المتغيرة الكلي، وأن الطلب على المنتج T وكذا مستلزمات الإنتاج للمنتجين كما هو مبين في الجدول أدناه:

البيان	المنتج T	المنتج U	الحجم المتاح
الطلب الأقصى للإنتاج	1000 وحدة	--	--
المادة الأولية	06 كلغ	10 كلغ	150000 كلغ
ساعات عمل الآلة	03 ساعات	02 ساعة	42000 ساعة

كما تتوقع الشركة تحقيق ربح قدره 10 دج للطاولة و08 دج للكرسي الواحد.

المطلوب:

1. أكتب البرنامج الخطي الذي يعبر عن هذه المسألة.
2. استخدم طريقة الحل البياني (الطريقة البيانية) في حل هذه المسألة.