Chapitre 1 : Géométrie affine

Dans tout ce chapitre $(E,+,.)$ désigne un espace vectoriel sur le corps de nombres réels $\mathbb{R}$.

1.1 Espace affine

Définition 1.1. Un espace affine attaché à E est un couple $(\mathcal{E}, +)$ formé d'un ensemble $\mathcal{E}$ non vide et d'une loi externe + qui à tout couple (A, u) de $\mathcal{E} \times E$ associe un élément $A + u$ de $\mathcal{E}$ vérifiant les axiomes suivants :

1) pour tout $A \in \mathcal{E}$, $A + 0_E = A$.
2) pour tout $A \in \mathcal{E}$ et $u, v \in E$, $A + (u + v) = (A + u) + v$.
3) pour tout $A, B \in \mathcal{E}$, il existe un et un seule $u \in E$ tel que $B = A + u$.

- E s'appelle l'espace vectoriel directeur de l'espace affine $\mathcal{E}$.
- Les éléments $\mathcal{E}$ s'appellent des points et ceux de E s'appellent des vecteurs.
- On note les points par A, B, C….et les vecteurs par $u, v, w, \ldots$
- Si E est de dimension finie n, on dit que $\mathcal{E}$ est de dimension finie n.
- Pour tout $A, B \in \mathcal{E}$, on note $\overrightarrow{AB}$ l'unique $u \in E$ vérifiant $B = A + u$ alors $B = A + \overrightarrow{AB}$.

Remarque 1.2. On ne s'intéresse qu'à des espaces affines de dimension finie, donc dans ce cours 'un espace affine' signifiera toujours espace affine de dimension finie.

Exemples

- E est un espace affine dont le directeur est E lui-même et la loi externe et la loi '+' interne de E elle-même. En effet,

- pour tout $x \in E$, $x + 0_E = x$.
- pour tout $x, y, z \in E$, $x + (y + z) = (x + y) + z$.
- pour tout $, y \in E$, il existe un et un seule $u = y - x$ tel que $y = x + u$.

- Soient F un sous-espace vectoriel de E et $v \in F$ alors $F + v = \{u + v : v \in F\}$ est un espace affine attaché à F dont la loi externe et la loi '+' interne. En effet,

- pour tout $x + v \in (F + v)$, $x + y + 0_E = x + v$.
- pour tous $x + v \in (F + v)$ et $y, z \in F$,

$$(x + v) + (y + z) = \big((x + v) + y\big) + z.$$

- pour tout $x + v, y + v \in (F + v)$, il existe un et un seule $u = y - x \in F$ tel que $y + v = x + v + u$.

- Soit (π) le plan usuel (par exemple la feuille). Soit $\overrightarrow{E_{(\pi)}}$ l'ensemble de vecteurs de (π). Alors, $\overrightarrow{E_{(\pi)}}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 et (π) est un espace affine attaché à $\overrightarrow{E_{(\pi)}}$.
- Soit (σ) l'espace usuel. Soit $\overrightarrow{E_{(\pi)}}$ l'ensemble de vecteurs de (σ). Alors, $\overrightarrow{E_{(\sigma)}}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 et (σ) est un espace affine attaché à $\overrightarrow{E_{(\sigma)}}$.

- On note $\vec{0}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots,$ les éléments de $\overrightarrow{E_{(\sigma)}}$ (et donc de $\overrightarrow{E_{(\pi)}}$ puisque $\overrightarrow{E_{(\pi)}} \subset \overrightarrow{E_{(\sigma)}}$).
- Pas mal de propriétés de (π) et (σ) sont connues, donc on va illustrer les concepts de ce cours par des exemple dans ces deux espaces affines.

1.2 Repère d'un espace affine

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n attaché à E.

Un repère de E est un couple (O, B), où O est un point de $\mathcal{E}$ et $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E. Le point O est l'origine du repère et les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont les vecteurs de la base du repère.

Pour tout point M de $\mathcal{E}$, les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base B sont dénommées les cordonnées de M dans Le repère R.

Ainsi, si $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans la base B alors

$$\overrightarrow{OM} = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n,$$

et on écrit $M\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ ou $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Exemple

Nous avons l'habitude de munir l'espace (σ) et le plan (π) de repères $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ respectivement**.**

1.3 Notion de barycentre

La notion de barycentre dans les espaces affines joue un rôle analogue à celui de la notion de combinaison linéaire dans les espaces vectoriels.

Dans cette section, $\mathcal{E}$ désigne un espace affine attaché à un espace vectoriel E.

Théorème 1.3. (et définition)
Soient $N \in \mathbb{N}$, $A_1, A_2, \dots, A_N \in \mathcal{E}$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ telles que $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \neq 0$. Alors, il existe un unique point $G \in \mathcal{E}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = 0_E.$$

G est appelé le barycentre des points pondérés $(A_i, \alpha_i), i = 1, \dots, N$.

- Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_N = 1$ alors G est appelé l'isobarycentre des points pondérés (A_i, α_i).
- En particulier l'isobarycentre du couple de points (A, B) est le milieu de ces deux points.

Démonstration.
Soit $O \in \mathcal{E}$ un point quelconque. Pour tout point M de $\mathcal{E}$, on a

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} - \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i\right) \overrightarrow{OM},$$

Comme $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \neq 0$, il existe un unique point G donné par

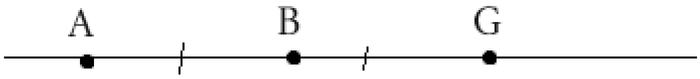
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \overrightarrow{OA_i},$$

vérifiant $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = 0_E$.

Exemple.

Soit A, B deux points du plan (π). On détermine le barycentre du points pondérés $(A\,,1)$ et $(B, -2)$. On a, $-1 + 2 \neq 0$, donc ce barycentre G existe, unique et vérifie $-\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} = \vec{0}$.

Alors, $\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{AG} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB}$.



Remarque 1.4.

- Si $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 0$ dans le **Théorème 1.3.** alors l’application qui à tout $M \in \mathcal{E}$ associe $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}$ est constante.
- Soit G le barycentre des points pondérés $(A_i, \alpha_i), i = 1, \dots, N$. On munit $\mathcal{E}$ d’un repère $\big(O, (e_1, \dots, e_n)\big)$, avec

$$A_i \begin{pmatrix} x_1^i \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^i \end{pmatrix}, 1 \leq i \leq n,$$

alors les cordonnées de $G(g_1, \dots, g_n)$ dans ce repère sont donnée par

$$g_j = \frac{\alpha_1 x_j^1 + \cdots + \alpha_1 x_j^N}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_N}$$

pour tout $1 \leq j \leq N$

Exemple.

On muni l'espace (σ) d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit $A(1,-2,3), B(0,5,4), C(1,0,1)$ trois points de (σ) et G le barycentre des points pondérés $(A,1),(B,-2),(C,3)$, alors

$$G\left(\frac{1\times 1-2\times 0+3\times 1}{1-2+3},\frac{1\times(-2)-2\times 5+3\times 0}{1-2+3},\frac{1\times 3-2\times 4+3\times 1}{1-2+3}\right)$$

donc $G(2,-6,-1)$.

Proposition 1.5.

1. Le barycentre de points pondérés ne dépend pas de l'ordre de ces points pondérés.
2. Le barycentre de de points pondérés (A_i,α_i) ne change pas lorsque on multiplie tous les α_i par un même réel non nul. En particulier, si G est le barycentre des points pondérés (A_i,α_i), $i=1,\dots,N$, alors

$$\sum_{i=1}^{N}(-\alpha_i)\overrightarrow{GA_i}=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\overrightarrow{A_iG}=0_E.$$

3. Si $A_1=A_2=\cdots=A_N=A$ alors, toute barycentre de pondérés $(A_i,\alpha_i), i=1,\dots,N$, est A lui-même.
4. Si $0\neq\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_N$ alors, le barycentre de points pondérés $(A_i,\alpha_i), i=1,\dots,N$, est l'isobarycentre du point $A_1,A_2,\dots,A_N$ c-à-dire le barycentre de pondérés $(A_i,1), i=1,\dots,N$.

Démonstration.

1. Evident !
2. Soit λ un réel non nul. Si G est le barycentre des points pondérés $(A_i,\alpha_i), i=1,\dots,N$, alors

$$\sum_{i=1}^{N}(\lambda\alpha_i)\overrightarrow{GA_i}=\lambda\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{GA_i}=\lambda 0_E=0_E,$$

donc G est le barycentre des points pondérés $(A_i,\lambda\alpha_i), i=1,\dots,N$.

3. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ telles que $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \neq 0$ et G est le barycentre de points pondérés $(A, \alpha_i), i = 1, \dots, N$, alors
$$0_E = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \overrightarrow{AG} = \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i\right) \overrightarrow{AG},$$
donc $\overrightarrow{AG} = 0_E$, d'où $G = A$.
4. Soit $\lambda = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_N$, d'après 2., le barycentre de points pondérés $(A_i, \alpha_i), i = 1, \dots, N$, est le barycentre de points pondérés $\left(A_i, \frac{\alpha_i}{\lambda}\right), i = 1, \dots, N$ qui est le barycentre de pondérés $(A_i, 1), i = 1, \dots, N$.

Proposition 1.6.
Le barycentre d'un système de points pondérés ne change pas lorsqu'on remplace certains de ces points par leur barycentre affecté de la somme des coefficients correspondants (bien sûr cette somme doit être non nulle).

Démonstration
Soit G le barycentre des points pondérés $(A_i, \alpha_i), i = 1, \dots, N$. On suppose que $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \neq 0$, avec $m < n$ (sinon, on change l'ordre des points pour obtenir ça). Soit H le barycentre de points pondérés $(A_i, \alpha_i), i = 1, \dots, m$, alors
$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{HA_i} = 0_E.$$
Donc
$$\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\right) \overrightarrow{GH} + \sum_{i=m+1}^{N} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{GH}\right) + \sum_{i=m+1}^{N} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(\overrightarrow{GA_i} + \overrightarrow{A_iH}\right)\right) + \sum_{i=m+1}^{N} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}$$

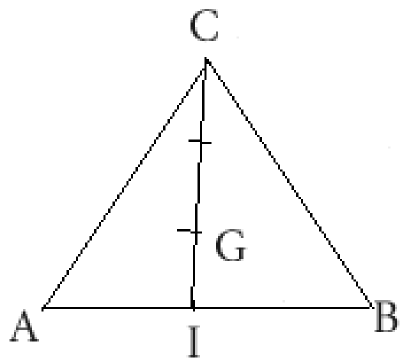
$$= \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{HA_i}$$

$$= 0_E + 0_E = 0_E,$$

alors, G est le barycentre de points pondérés $(H, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i)$, $(A_i, \alpha_i), i = m+1, \dots, N$.

Exemple

On se place dans le plan (π). Soit ABC un triangle. On va construit G le centre de gravité du triangle ABC qui est l'isobarycentre de points A, B et C i.e. le barycentre de points pondérés $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$.
Soit I le barycentre de points pondérés $(A, 1), (B, 1)$, alors I est le milieu du segment $[AB]$, d'après la **Proposition 1.6.** G est le barycentre de points pondérés $(I, 2), (C, 1)$.
On a $2\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$, alors $2\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IG} = \vec{0}$, d'où $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$.



1.4 Sous-espaces affines

Dans tout ce paragraphe, $\mathcal{E}$ désigne un espace affine attaché à E.

1. 4. 1 Définitions et premières propriétés

> **Définition 1.7.**
> On appelle sous-espace affine de $\mathcal{E}$ tout partie non vide $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ qui est stable par « barycentration », c'est-à-dire tout barycentre de points de $\mathcal{F}$ est un point de $\mathcal{F}$.

Exemples

- Soit A un point de $\mathcal{E}$, alors $\{A\}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. En effet, $\{A\}$ est non vide et si G est le barycentre des points pondérés $(A, \alpha_i), i = 1, \dots, N$, alors
$$\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i\right)\overrightarrow{AG} = 0_E.$$
Donc $\overrightarrow{AG} = 0_E$ et $G = A \in \{A\}$.
- D'après la définition du barycentre, tout barycentre de points de $\mathcal{E}$ est un point de $\mathcal{E}$. Alors, $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ lui-même.
- Toute droite de (π) est un sous-espace affine de (π). En effet, si (d) est une droite de (π) et G et le barycentre de points pondérés$(A_i, \alpha_i), i = 1, \dots, n$, où les A_i sont des points de (d) alors $G \in (d)$, car, $\overrightarrow{A_1G} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i} \overrightarrow{A_1A_\imath}$, d'où la stabilité de (d) par barycentration.
- De même, toute droite de l'espace (σ) est un sous-espace affine de (σ) et tout plan de (σ) est un sous-espace affine de (σ).

Proposition 1.8. (et définition)
Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Alors, l'ensemble
dir($\mathcal{F}$) = $\{\overrightarrow{MH} : M, H \in \mathcal{F}\}$
est un sous-espace vectoriel de E appelé la direction du sous-espace affine $\mathcal{F}$.

Démonstration

$\mathcal{F}$ est non vide, donc il existe un point A de $\mathcal{E}$ qui appartient à $\mathcal{F}$, alors $O_E = \overrightarrow{AA} \in$ dir($\mathcal{F}$), alors, dir($\mathcal{F}$) est non vide.

Soient $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \in$ dire($\mathcal{F}$) (i.e. $A, B, C, D \in \mathcal{F}$) et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a, $\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{CD} \in E$. Soit $G \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AG} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{CD}$.

On a, $\overrightarrow{AG} = \alpha\overrightarrow{AG} + \alpha\overrightarrow{GB} + \beta\,\overrightarrow{CG} + \beta\,\overrightarrow{GD}$, alors

$(1-\alpha)\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{GB} - \beta\,\overrightarrow{GC} + \beta\,\overrightarrow{GD} = 0_E$,

donc, G est le barycentre de points pondérés $(A, 1-\alpha), (B, \alpha), (C, -\beta)$, (D, β)

Comme $\mathcal{F}$ est stable par barycentration**,** il vient $G \in \mathcal{F}$, donc

$\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG} \in$ dire ($\mathcal{F}$), ainsi, dire ($\mathcal{F}$) est un sous-espace vectoriel de E.

Exemples

- dir $(\{A\}) = \{\overrightarrow{AA}\} = \{0_E\}$, qui est bien un sous-espace vectoriel de E.
- dir $(\mathcal{E}) = \{\overrightarrow{MH} : M, H \in \mathcal{E}\} = E$.
- Dans (π) ou (σ) la direction d'une droite et le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points distincts de cette droite.
- Dans (σ) la direction d'un plan et le sous-espace vectoriel engendré par les deux vecteurs non colinéaire $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ où A, B et B sont trois points de cet plan deux à deux disjoints.

Proposition 1.9.
Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, alors $\mathcal{F}$ est un espace affine attaché à dir ($\mathcal{F}$).

Démonstration
Exercice.

Proposition 1.10.
Soit F un sous-espace vectoriel de E et A un point de E. Alors, il existe un et un seule sous-espace affine de $\mathcal{E}$ contenant A et de direction F. On le note par $A + F = \{A + u : u \in F\}$ ou encore
$A + F = \{M \in \mathcal{E} : \overrightarrow{AM} \in F\}$.

Démonstration

Soit $\mathcal{F} = A + F$. Montrons que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ contenant A et de direction F.

- On a, $A = A + 0_E \in \mathcal{F}$, car $0_E \in F$.
- Soit G est le barycentre des points pondérés $(A_i, \alpha_i), i = 1, \dots, N$, avec $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, \dots, N$, alors

$$\overrightarrow{AG} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i} \overrightarrow{AA_i},$$

les vecteurs $\overrightarrow{AA_i}$ sont des éléments de F, donc $\overrightarrow{AG} \in F$ comme combinaison linéaire des éléments de F, alors, $G = G + \overrightarrow{AG} \in \mathcal{F}$ d'où la stabilité de $\mathcal{F}$ par barycentration, ainsi, $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$.

- Montrons maintenant que dir $(\mathcal{F}) = F$. Soit $\overrightarrow{MH} \in$ dir $(\mathcal{F})$ alors $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AM} \in F$, car $M, H \in \mathcal{F}$, donc dir $(\mathcal{F}) \subset F$.

Inversement, si $u \in F$ alors $B = A + u \in \mathcal{F}$, donc $u = \overrightarrow{AB} \in$ dir $(\mathcal{F})$, d'où $F \subset$ dir $(\mathcal{F})$ ainsi dir $(\mathcal{F}) = F$.

- Il reste à montrer que $\mathcal{F}$ est l'unique sous-espace affine de $\mathcal{E}$ contenant A et de direction F. Soit $\mathcal{G}$ un autre sous-espace affine de $\mathcal{E}$ contenant A et de direction F.

On a $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, car si $M \in \mathcal{G}$ alors $\overrightarrow{AM} \in F$ d'où l'appartenance de M à $\mathcal{F}$.
Inversement, si $M \in \mathcal{F}$, alors $\overrightarrow{AM} \in F =$ dire $(\mathcal{G})$, donc il existe $B, C \in \mathcal{G}$ tels que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}$ i.e. $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = O_E$, alors M est le barycentre de points pondérés $(A, 1), (B, -1), (C, 1)$, donc $M \in \mathcal{G}$ (puisque $\mathcal{G}$ est stable par barycentration), d'où $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, ainsi $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

Exemple

- La **Proposition 1.10** est une généralisation de la propriété connue en géométrie dans le plan (π) (et même dans l'espace (σ)) par l'expression ' il existe une et une seule droite contenant un point connu et orienté par un vecteur connu'.

- Dans l'espace (σ), on sait qu'il existe un et un seule plan contenant un point connu et orienté par deux vecteur non colinéaires connus.

Proposition 1.11.
Soient $\mathcal{F}$ le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction dir $(\mathcal{F})$ contenant le point A, alors, dir $(\mathcal{F}) = \{\overrightarrow{AM} : M \in \mathcal{F}\}$.

Démonstration
On a dir $(\mathcal{F}) = \{\overrightarrow{MH} : M, H \in \mathcal{F}\}$.
Clairement $\{\overrightarrow{AM} : M \in \mathcal{F}\} \subset$ dire $(\mathcal{F})$. Soit $u \in$ dir $(\mathcal{F})$, alors $M = A + u \in \mathcal{F}$, d'où $u = \overrightarrow{AM} \in \{\overrightarrow{AM} : M \in \mathcal{F}\}$, donc
dire $(\mathcal{F}) \subset \{\overrightarrow{AM} : M \in \mathcal{F}\}$ et dire $(\mathcal{F}) = \{\overrightarrow{AM} : M \in \mathcal{F}\}$.

Définition 1.12.
La dimension d'un sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ est la dimension du sous-espace vectoriel dir $(\mathcal{F})$.

Exemples

- Un sous-espace affine de dimension 0 est un singleton (ensemble qui contient exactement un seule élément).
- Dans (π) et (σ) une droit est un sous-espace affine de dimension 1.
- Dans (σ) un plan est un sous-espace affine de dimension 2.

1. 4. 2 Position relative de deux sous-espaces affines

Dans cette section $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$.

Définition 1.13.
On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles au sens fort si dire$(\mathcal{F})$ = dire $(\mathcal{G})$.
On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles au sens faible si dire $(\mathcal{F}) \subset$ dire $(\mathcal{G})$ ou dir $(\mathcal{G}) \subset$ dir$(\mathcal{F})$.

- Il est clair que si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles au sens fort alors ils sont de même dimension.
- Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ne sont pas de même dimension, alors ils ne peuvent pas être parallèles au sens fort, dans ce cas, l'expression $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèle signifie qu'ils sont parallèles au sens faible.

Proposition 1.14.

- Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ alors dir (F) ⊂ dir ($\mathcal{G}$).
- Si dir ($\mathcal{F}$) ⊂ dir ($\mathcal{G}$) et $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide alors $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

Démonstration

- Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ alors $M, H \in \mathcal{F}$ implique $M, N \in \mathcal{G}$, d'où

dir($\mathcal{F}$) $=\{\overrightarrow{MN}, M, H \in \mathcal{F}\} \subset \{\overrightarrow{MH}, M, H \in \mathcal{G}\}=$ dir($\mathcal{G}$) .

- Supposons dir ($\mathcal{F}$) ⊂ dir ($\mathcal{G}$) et $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide, alors il existe $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ et

$\mathcal{F}$ $=\{M \in \mathcal{E} : \overrightarrow{AM} \in$ dire ($\mathcal{F}$)$\} \subset \{M \in \mathcal{E} : \overrightarrow{AM} \in$ dire ($\mathcal{G}$) $\} = \mathcal{G}$.

Exemple

- Dans (σ), si (d) est une droit orientée par $\vec{u}$ et contenant dans un plan (P) alors, (P) est orienté par $\vec{u}$ et un autre vecteur $\vec{v} \in \vec{E}_{(\sigma)}$ non colinéaire avec $\vec{u}$.
- Dans (σ), si (P) est un plan orienté par les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et (d) est une droit orientée par $\vec{u}$, et il existe un point commun entre (P) et (d) alors $(d) \subset (P)$.

Corollaire 1.15.

- Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles au sens fort alors ils sont soit disjoints soit égaux.
- Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont de même dimension alors $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ implique

$\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

Démonstration

- Supposons $\operatorname{dir}(\mathcal{F}) = \operatorname{dir}(\mathcal{G})$. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ son disjoints il n'y a rien à montrer. Supposons que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ont une intersection non vide alors $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ car dire$(\mathcal{F}) \subset \operatorname{dir}(\mathcal{G})$, de même $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ car $\operatorname{dir}(\mathcal{G}) \subset \operatorname{dir}(\mathcal{F})$, d'où $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.
- Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ alors $\operatorname{dir}(\mathcal{F}) \subset$ dire $(\mathcal{G})$, donc $\operatorname{dir}(\mathcal{F}) = \operatorname{dir}(\mathcal{G})$, puisqu'ils sont de même dimension. Alors, $\operatorname{dir}(\mathcal{G}) \subset \operatorname{dir}(\mathcal{F})$, donc $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ car $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ont une intersection non vide, d'où $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

Exemple

- Dans (π) et (σ), deux droites orientées par le même vecteur sont soit disjoints (parallèles) soit égaux.
- Dans (σ), deux plans orientées par les mêmes vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont soit disjoints (parallèles) soit égaux.
- Dans (π) et (σ), si une droite est inclue dans une autre, alors les deux droites sont égaux .
- Dans (σ), si un plan est inclus dans un autre, alors les deux plan sont égaux .

Proposition 1.16.

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$. L'intersection de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\operatorname{dir}(\mathcal{F}) \cap \operatorname{dir}(\mathcal{G})$.

Démonstration

Supposons $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide. Soit $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, alors

$\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{E} : \overrightarrow{AM} \in \text{dir}(\mathcal{F})\}$ et $\mathcal{G} = \{M \in \mathcal{E} : \overrightarrow{AM} \in \text{dir}(\mathcal{G})\}$, donc $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{M \in \mathcal{E} : \overrightarrow{AM} \in \text{dir}(\mathcal{F})$ et $\overrightarrow{AM} \in \text{dir}(\mathcal{G})\}$, d'où

$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{M \in \mathcal{E} : \overrightarrow{AM} \in \text{dir}(\mathcal{F}) \cap \text{dir}(\mathcal{G})\}$, ainsi $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de passant par A et de direction $\text{dir}(\mathcal{F}) \cap \text{dir}(\mathcal{G})$.

Exemple

- Dans (π), l'intersection de deux droites est soit vide (dans le cas où ces deux droites sont parallèles et non égaux), soit un singleton, soit une droite (dans le cas où ces deux droites sont égaux).
- Dans (σ), l'intersection de deux droites est soit vide (dans le cas où ces deux droites sont parallèles ou ne sont pas de même plan), soit un singleton, soit une droite (dans le cas où ces deux droites sont égaux).
- Dans (σ), l'intersection de deux plan est soit vide (dans le cas où ces deux plan sont parallèles et non égaux), soit une droite, soit un plan (dans le cas où ces deux plans sont égaux).
- Dans (σ), l'intersection d'une droite et d'un plan est soit vide (dans le cas où la droite et le plan sont parallèles), soit une droite (dans le cas où la droite est contenue dans le plan), soit un singleton (dans le cas où la droite et le plan ne sont pas parallèles).

1.5 Droites et Hyperplans

Définition 1.17.

- On appelle droite affine de $\mathcal{E}$ tout sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de dimension 1.
- On appelle plan affine de $\mathcal{E}$ tout sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de dimension 2.
- On appelle hyperplan de $\mathcal{E}$ tout sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de dimension $n-1$ (ou n est la dimension de $\mathcal{E}$) .

.

Exemples

- Si $\mathcal{E}$ est de dimension 2. Alors, $\mathcal{E}$ contient un seule plan affine qui est $\mathcal{E}$ lui-même.
- Si $\mathcal{E}$ est de dimension 2. Alors, les hyperplans de $\mathcal{E}$ sont les droites affines de $\mathcal{E}$.
- Si $\mathcal{E}$ est de dimension 3. Alors, les hyperplans de $\mathcal{E}$ sont les plans affines de $\mathcal{E}$.

Equations et paramétrage de sous-espaces affines en dimensions 2 et 3

Equation d'une droite en dimension 2

On suppose dans ce paragraphe que $\mathcal{E}$ et de dimension 2 et on le munit d'un repère $(O, i, j) = (O, (i, j))$.

Une droite de $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de dimension 1, donc si (d) est une droite de $\mathcal{E}$, il existe un vecteur non nul $u \in E$ tel que $dir\ ((d)) = vect(u)$ autrement dit pour tout vecteur $w \in dir((d))$ il existe un réel t tel que $w = tu$.

On dit que la droite (d) est orientée par le vecteur u.

Soit (d) la droite orientée par le vecteur non nul $u\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ et contient le point $A(x_0, y_0)$. Pour tout point $M(x, y) \in (d)$ on a $\overrightarrow{AM} \in dir((d))$, alors, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = tu$, donc $\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \end{cases}$.

1. Le système $\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, est appelé un paramétrage de la droite (d) (passant par le point $A(x_0, y_0)$ et orientée par le vecteur $u\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$) et on écrit (d): $\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.
2. Inversement, soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de points $M(x, y)$ donné par $\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta\ t + y_0 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

Si $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$, alors $\mathcal{F}$ est la droite passant par le point $A(x_0,y_0)$ est orientée par le vecteur $u\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$.

Si $(a,b) = (0,0)$, alors $\mathcal{F}$ est le singleton $\{A(x_0,y_0)\}$.

3. Soit $(d)\colon\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \end{cases} t \in \mathbb{R}$.

On a $\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \end{cases}$ implique $\begin{cases} bx = abt + bx_0 \\ ay = abt + ay_0 \end{cases}$ alors

$$\beta x - \alpha y = \beta - \alpha x_0,$$

Cette équation est appelée l'équation de la droite (d) dans le repère (O,j,j).

4. Inversement, l'ensemble de points $M(x,y) \in \mathcal{E}$ vérifiant l'équation $\alpha x + \beta y = \gamma$ avec $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ et $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ est une droite orientée par le vecteur $\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$.

Application

Soient $(d)\colon\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $(d')\colon\begin{cases} x = \alpha' t' + x'_0 \\ y = \beta' t' + y'_0 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$ deux droites de $\mathcal{E}$.

Afin d'étudier l'intersection des deux droites (d) et (d') nous résout le système d'inconnu $(t,t') \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \alpha t + x_0 = \alpha' t' + x'_0 \\ \beta t + y_0 = \beta' t' + y'_0 \end{cases} \qquad (S_1)$$

- Si le système (S_1) n'admet pas des solutions, alors, (d) et (d') sont d'intersection vide, donc parallèles.
- Si le système admet une infinité de solutions, alors, (d) et (d') sont égaux.
- Si le système admet une solution unique (t_0,t'_0), alors,

$$\begin{aligned}(d) \cap (d') &= \{(\alpha t_0 + x_0, \beta t_0 + y_0)\} \\ &= \{(\alpha' t'_0 + x'_0, \beta' t'_0 + y'_0)\}.\end{aligned}$$

Equations d'une droite en dimension 3

On suppose dans ce paragraphe que $\mathcal{E}$ et de dimension 3 et on le munit d'un repère $(O, i, j, k) = (O, (i, j, k))$.

Une droite de $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de dimension 1, donc si (d) est une droite de $\mathcal{E}$, il existe un vecteur non nul $u \in E$ tel que $dir\,((d)) = vect(u)$ autrement dit pour tout vecteur $w \in dir((d))$ il existe un réel t tel que $w = tu$.

On dit que la droite (d) est orientée par le vecteur u.

Soit (d) la droite orientée par le vecteur non nul $u\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ et contient le point $A(x_0, y_0, z_0)$. Pour tout point $M(x, y, z) \in (d)$ on a $\overrightarrow{AM} \in dir((d))$, alors, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = tu$, donc $\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ y = \gamma t + z_0 \end{cases}$.

1. Le système $\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ y = \gamma t + z_0 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, est appelé un paramétrage de la droite (d) (passant par le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et orientée par le vecteur $u\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$) et on écrit (d): $\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ y = \gamma t + z_0 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
2. Inversement, soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de points $M(x, y, z)$ donné par $\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ y = \gamma t + z_0 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

   Si $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$, alors $\mathcal{F}$ est la droite passant par le point $A(x_0, y_0, z_0)$ est orientée par le vecteur $u\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.

Si $(\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0)$, alors $\mathcal{F}$ est le singleton $\{A(x_0, y_0, z_0)\}$.

3. Soit (d): $\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \,, t \in \mathbb{R}. \\ y = \gamma t + z_0 \end{cases}$

On suppose que $\alpha \neq 0$, alors $t = \frac{x - x_0}{\alpha}$, donc $\begin{cases} y = \beta \frac{x - x_0}{\alpha} + y_0 \\ z = \gamma \frac{x - x_0}{\alpha} + z_0 \end{cases}$, d'où

$\begin{cases} -\beta x + \alpha y = -\beta x_0 + \alpha y_0 \\ -\gamma x + \alpha z = -\gamma x_0 + \alpha z_0 \end{cases}$.

$$\beta x - \alpha y = \beta - \alpha x_0,$$

Ces équations sont appelées équations de la droite (d) dans le repère (O, i, j, k).

Application

Soient (d) : $\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0, t \in \mathbb{R} \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases}$ et (d) : $\begin{cases} x = \alpha' t' + x'_0 \\ y = \beta' t' + y'_0, t' \in \mathbb{R} \\ z = \gamma' t' + z'_0 \end{cases}$

deux droites de $\mathcal{E}$.

Afin d'étudier l'intersection des deux droites (d) et (d') on résout le système d'inconnu $(t, t') \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \alpha t + x_0 = \alpha' t' + x'_0 \\ \beta t + y_0 = \beta' t' + y'_0, t \in \mathbb{R} \\ \gamma t + z_0 = \gamma' t' + z'_0 \end{cases} \qquad (S_2)$$

- Si le système (S_1) n'admet pas des solutions, alors, (d) et (d') sont d'intersection vide, donc parallèles ou ne sont pas de même plan.
- Si le système admet une infinité de solutions, alors, (d) et (d') sont égaux.
- Si le système admet une solution unique (t_0, t'_0), alors,
$$\begin{aligned}(d) \cap (d') &= \{(\alpha t_0 + x_0, \beta t_0 + y_{0,}, \gamma t_0 + z_0)\} \\ &= \{(\alpha' t'_0 + x'_0, \beta' t'_0 + y'_0, \gamma' t'_0 + z'_0)\}.\end{aligned}$$

Equations d'un plan en dimension 3

Paramétrage d'un plan

On suppose dans ce paragraphe que $\mathcal{E}$ et de dimension 3 et on le munit d'un repère $(O, i, j, k) = (O, (i, j, k))$.

Un plan de $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de dimension 2. Si (p) est un plan de $\mathcal{E}$, il existe deux vecteurs non colinéaires et non nuls $u, v \in E$ tel que $dir\left((p)\right) = vect(u, v)$ autrement dit, pour tout vecteur $w \in dir((d))$ il existe deux réel t et t' tels que $w = tu + t'v$.

On dit que le plan (d) est orienté par les vecteurs u et v.

Soit (p) un plan orienté par les vecteurs $u\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ et $v\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$ et contient le point $A(x_0, y_0, z_0)$. Pour tout point $M(x, y, z) \in (p)$ on a $\overrightarrow{AM} \in dir((d))$, alors, il existe $t, s \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = tu$, d'où

$$\begin{cases} x = \alpha t + \alpha' s + x_0 \\ y = \beta t + \beta' s + y_0. \\ y = \gamma t + \gamma' s + z_0 \end{cases}$$

4. Le système $\begin{cases} x = \alpha t + \alpha' s + x_0 \\ y = \beta t + \beta' s + y_0 \\ y = \gamma t + \gamma' s + z_0 \end{cases}$ est appelé un paramétrage du plan (p) (passant par le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et orientée par le vecteur $u\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ et $v\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$) et on écrit

$$\begin{cases} x = \alpha t + \alpha' s + x_0 \\ y = \beta t + \beta' s + y_0 \ t, s \in \mathbb{R}. \\ y = \gamma t + \gamma' s + z_0 \end{cases}$$

Application

Soient

(p) : $\begin{cases} x = \alpha t + \alpha' s + x_0 \\ y = \beta t + \beta' s + y_0 \\ y = \gamma t + \gamma' s + z_0 \end{cases}$ $t, s \in \mathbb{R}$ et (p') $\begin{cases} x = as' + a's' + x_0 \\ y = bs' + b's' + y_0 \\ y = cs' + c's' + z_0 \end{cases}$ $t', s' \in \mathbb{R}$.

deux plans de $\mathcal{E}$.

Afin d'étudier l'intersection des deux droites (d) et (d') on résout le système d'inconnu$(t, t', s, s') \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{cases} \alpha t + \alpha' s + x_0 = at' + a's' + x'_0 \\ \beta t + \beta' s + y_0 = bt' + b's' + y'_0 \\ \gamma t + \gamma' s + z_0 = ct' + c's' + z'_0 \end{cases} \qquad (S_3)$$

- Si le système (S_3) n'admet pas des solutions, alors, (p) et (p') sont d'intersection vide, donc parallèles ou ne sont pas de même plan.
- Si le système admet une infinité de solutions, alors, (p) et (p') sont égaux ou leurs intersections et une droite.

Equation d'un plan

(p) : $\begin{cases} x = \alpha t + \alpha' s + x_0 \\ y = \beta t + \beta' s + y_0 \\ z = \gamma t + \gamma' s + z_0 \end{cases}$ $t, s \in \mathbb{R}$ un plan de $\mathcal{E}$.

On suppose que le système d'équations $\begin{cases} \alpha t + \alpha' s = x_0 - x \\ \beta t + \beta' s = y_0 - y \end{cases}$ d'inconnu (t, s) admet une solution unique $(t(x, y, x_0), s(x, y, y_0))$ (sinon on choisit un système de deux équations parmi les trois équations du paramétrage du plan (p) qui admet une solution unique). Si $M(x, y, z) \in (P)$ alors $z = \gamma t(x, y, x_0) + \gamma' s(x, y, y_0) + z_0$, cette équation est appelée équation cartésienne du plan (p) dans le repère (O, i, j, k).

Exemple.

Soit (p) : $\begin{cases} x = t - s \\ y = -2t + s \\ z = t + 2s + 3 \end{cases}$ $t, s \in \mathbb{R}$.

On a $\begin{cases} x = t - s \\ y = -2t + s \end{cases}$ implique $(t, s) = \left(-x - y, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right)$.

Si $M(x, y, z) \in (P)$ alors $z = -x - y + 2\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right) + 3$.

Alors, $z = -2y + 3$ est une équation cartisienne de (p).

1.6 Applications affines et formes affines

Dans cette section, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ désignent deux espaces affines attachées *à* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{E}'$ respectivement.

Définition 1.18.

- Une application $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ est dite affine si elle conserve les barycentres, autrement dit, l'image d'un barycentre de points de $\mathcal{E}$ est le barycentre des images de ces points, avec les mêmes coefficients.
- Si $\mathcal{E}' = \mathbb{R}$(considéré comme espace affine attaché a $\mathbb{R}$) alors l'application affine f est dite forme affine sur $\mathcal{E}$.

Exemple.

- L'identité de $I_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ est une application affine.
- L'application définie de $\mathbb{R}$ dans lui-même qui à tout x associe $ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ est une forme affine sur $\mathbb{R}$.

Théorème 1.19. (et Définition)

Pour toute application affine f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$. Il existe une unique application linéaire de E dans E' notée $Linf$ (appelé la partie linéaire de f) vérifiant :

Pour tous $A, B \in \mathcal{E} : f(B) = f(A) + Linf(\overrightarrow{AB})$.

Démonstration.

Pour simplifier la notation, on note $A', B', C', ...$ les images de $A, B, C, ...$ par l'application f. Alors, l'expression $f(B) = f(A) + Linf(\overrightarrow{AB})$ s'écrit $B' = A' + Lin\, f(\overrightarrow{AB})$ qui signifie $\overrightarrow{A'B'} = Lin\, f(\overrightarrow{AB})$.

Soient $A, B, C, D \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

On a $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}$, ceci signifie que D est le barycentre de points pondérés $(A, 1), (B, 1)$ et $(C, -1)$ ce qui implique que D' est le barycentre de points pondérés $(A', 1), (B', 1)$ et $(C', -1)$ car f est affine. D'où $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.
On a montré que le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ ne dépend pas de point A et B, il ne dépend que du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Soit $Linf$ l'unique application définie de E dans E qui à tout $u \in E$ associe le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ où A et B sont deux points de E tels que $u = \overrightarrow{AB}$.
Montrons que $Linf$ est linéaire.
Soient $u, v \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AB} = u$, $\overrightarrow{AC} = v$ et $\overrightarrow{AD} = \alpha u + \beta v$. Alors, $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$, donc D est le barycentre de points pondérés $(A, \alpha + \mathrm{B} - 1), (B, -\alpha)$ et $(C, -\beta)$, ainsi D' est le barycentre de points pondérés $(A', \alpha + \mathrm{B} - 1), (B', -\alpha)$ et $(C', -\beta)$, donc $\overrightarrow{A'D'} = \alpha\overrightarrow{A'B'} + \beta\overrightarrow{A'C'}$, ceci implique
$Lin\, f(\alpha u + \beta v) = \alpha Lin\, f(u) + \beta Lin\, f(v)$, d'où la linéarité de $Lin\, f$.

Proposition 1.20.
Soit $H \in \mathcal{E}$, $H' \in \mathcal{E}'$ et $\varphi: E \to E'$ une application linéaire.
Alors il existe une seule application affine et $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ telle que $f(H) = H'$ et $Lin\, f = \varphi$.

Démonstration.
Soit $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ l'unique application définie par $f(M) = H' + \varphi(\overrightarrow{HM})$. On a $f(H) = H' + \varphi(0_E) = H'$ (car φ est linéaire).
Montrons que f est affine.
Soit G le barycentre de points pondérés (A_i, α_i), $1 \leq i \leq N$, avec $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i$=1 (On peut toujours revenir à cette situation en divisant chaque coefficient de points pondérés par la somme de ses coefficients).
Soient $G' = f(G)$ et $A'_i = f(A_i)$, $1 \leq i \leq N$.

On a $\overrightarrow{H'G'} = \varphi\left(\overrightarrow{HG}\right)$
$= \varphi\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \overrightarrow{HA_\iota}\right)$
$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi\left(\overrightarrow{HA_\iota}\right)$
$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \overrightarrow{H'A'_\iota}.$
Donc G' est le barycentre de points pondérés (A'_i, α_i), $1 \leq i \leq N$, alors f est affine.
Montrons que $Linf = \varphi$.
Soient $A, B \in \mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{H'B'} = \varphi(\overrightarrow{HB})$, alors
$\overrightarrow{H'A'} + \overrightarrow{A'B'} = \varphi\left(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}\right) = \varphi\left(\overrightarrow{HA}\right) + \varphi\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{H'A'} + \varphi(\overrightarrow{AB})$,
donc $\overrightarrow{A'B'} = \varphi(\overrightarrow{AB})$, autrement dit $f(B) = f(A) + \varphi(\overrightarrow{AB})$, d'où $Linf = \varphi$, car $Linf$ est la seule application linéaire de $E \to E'$ vérifiant $f(B) = f(A) + \varphi(\overrightarrow{AB})$, pour tout $A, B \in \mathcal{E}$.

Théorème 1.21.
Soit $A \in \mathcal{E}$. Une application $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est affine si et seulement si l'application φ définie de $E \to E'$ par $\varphi(u) = \overrightarrow{AA_u}$, (où $A_u = f(A+u)$ est linéaire, et dans ce cas $Linf = \varphi$.

Démonstration.
Soit $u \in E$, l'écriture $\varphi(u) = \overrightarrow{AA_u}$ signifie que $f(A+u) = f(A) + \varphi(u)$.
($\Longrightarrow$) Supposons que f est affine, alors pour $A, B \in \mathcal{E}$.
$f\left(A + \overrightarrow{AB}\right) = f(A) + \varphi(\overrightarrow{AB})$, d'où $f(B) = f(A) + \varphi(\overrightarrow{AB})$, d'après le **Théorème 1.19.** φ est linéaire et $\varphi = Linf$**.**
($\Longleftarrow$) Supposons que φ est linéaire, alors f est l'unique application affine de partie linéaire φ qui envoir A sur $f(A)$($voir$ **Proposition 1.20.**).

Proposition 1.21.
Soient $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ et $g: \mathcal{E}' \to \mathcal{E}''$deux applications affines. Alors $f \circ g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}''$ est une application affine et $Lin(f \circ g) = Linf \circ Ling$.

Démonstration.
Voir Exercice 11.

Proposition 1.22.
Soit $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ une application affine. Alors

1- f est injective $\Leftrightarrow$ $Lin\, f$ est injective,
2- f est surjective $\Leftrightarrow$ $Lin\, f$ est surjective,
3- f est bijective $\Leftrightarrow$ $Lin\, f$ est bijective, et dans ce cas f^{-1} est une application affine et $Lin(f^{-1}) = (Lin f)^{-1}$.

Démonstration.
Voir Exercice 12.

Proposition 1.23.
Soit $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ une application affine.

- Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ alors $f(\mathcal{F})$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}'$ et dir$(f(\mathcal{F}))$ = $Lin f$(dir($\mathcal{F}$)).
- Soit $\mathcal{G}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}'$ alors f^{-1} ($\mathcal{G}$) est vide ou un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ et dir$(f^{-1}(\mathcal{G}))$ = $Lin f^{-1}$(dir($\mathcal{G}$)).

Démonstration.
Voir Exercice 13.

1.7 Translation et homothétie

Définition 1.24.
Soit $u \in E$. La translation est de vecteur u est l'application $t_u: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ définie qui à tout $M \in \mathcal{E}$ associe $M + u$.

Proposition 1.25.

- Soit $u \in E$. Alors t_u est une application affine sa partie linéaire est $Id_{\mathcal{E}}$.

- Toute application affine dont sa partie linéaire est l'identité est une translation.

Démonstration.

- Soit G le barycentre de points pondérés (A_i, α_i), $1 \leq i \leq N$.

On note G' , A'_i $1 \leq i \leq N$ les images de points G A_i $1 \leq i \leq N$ par t_u respectivement. On a

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{G'A'_\iota} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(\overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GA'_\iota}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(\overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GA_\iota} + \overrightarrow{A_\iota A'_\iota}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(-u + \overrightarrow{GA_\iota} + u\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \overrightarrow{GA_\iota} = 0_E.$$

Donc G' est le barycentre pondérés (A'_i, α_i), $1 \leq i \leq N$. Donc, t_u est une application affine.

Soient $A, B \in \mathcal{E}$, $A' = t_u(A)$, $B' = t_u(B)$, et alors $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = u$.

On a $lint_u\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = -u + \overrightarrow{AB} + u = \overrightarrow{AB}$.

Les points A et B sont quelconques donc $lint_u = Id_{\mathcal{E}}$.

- Soit f une application affine telle que sa partie linéaire soit $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

Soient $A \in \mathcal{E}$, $A' = t_u(A)$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a

$$f(M) = A' + Linf\left(\overrightarrow{AM}\right) = A' + \overrightarrow{AM} = A' + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M} = M + \overrightarrow{AA'},$$

Donc f est la translation du vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

Remarque 1.26.
Les axiomes de la **définition 1.1.** reviennent ainsi à dire que

1) t_{0_E} est l'application identité définie de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.
2) Pour tout $u, v \in E$: $t_{u+v} = t_u \circ t_v$.
3) pour tout $A, B \in \mathcal{E}$, il existe un et un seule $u \in E$ tel que

$B = t_u(A)$.

Définition 1.27.
Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application. Un point A est dit point fixe de f si et seulement si $f(M) = M$.

Proposition 1.28.
- Tout point de $\mathcal{E}$ est un point fixe de t_{0_E}.
- Si $u \neq 0_E$ alors t_u n'admet aucun point fixe.

Démonstration.
- Comme $t_{0_E} = Id_{\mathcal{E}}$ il vient que $t_{0_E}(A) = A, \forall A \in \mathcal{E}$.
- Soit $u \neq 0_E$, alors $A + u \neq A, \forall A \in \mathcal{E}$, donc $t_u(A) \neq A, \forall A \in \mathcal{E}$.

Homothétie

Définition 1.29.
L'homothétie vectorielle h_α de rapport $\alpha \in \mathbb{R}$ est l'application de E dans lui-même qui à tout $v \in E$ associe le vecteur αv.

Définition 1.30.
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{E}$. L'homothétie affine de centre A et de rapport α, qu'on le note $H_{A,\alpha}$ est l'application définie de E dans lui-même qui à tout $M \in \mathcal{E}$ associe le point $M' \in \mathcal{E}$ telle que
$\overrightarrow{AM'} = \alpha\overrightarrow{AM}$ autrement dit $H_{A,\alpha}(M) = M' = A + \alpha\overrightarrow{AM}$.

Proposition 1.31.
1- $LinH_{A,\alpha}$ est l'homothétie vectorielle h_α.
2- f est une homothétie affine si et seulement si f est affine, admet au moins un point fixe et $Linf$ est une homothétie vectorielle.
3- Si $\alpha = 1$ alors $H_{\alpha,A} = Id_{\mathcal{E}}$.

4- Si $\alpha \neq 1$ alors $H_{A,\alpha}(M) = M$ si et seulement si $M = A$. autrement dit, $H_{A,\alpha}$ admet un point fixe unique qui est A.
5- Si $\alpha = 0$ alors $H_{A,\alpha}$ est l’application constante qui à tout $M \in \mathcal{E}$ associe A.
6- Si $\alpha \neq 0$ alors $H_{A,\alpha}$ est bijective et $\left(H_{A,\alpha}\right)^{-1} = H_{A,\frac{1}{\alpha}}$.

Démonstration.

1- Evident.
2- ($\Longrightarrow$)Soit $H_{A,\alpha}$l’homothétie affine de centre A et de rapport α. Soit G le barycentre de points pondérés (A_i, α_i), $1 \leq i \leq N$. On note $G' = H_{A,\alpha}(G)$ et $A'_i = H_{A,\alpha}(A_i)$, $1 \leq i \leq N$.

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(\overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{AA'_i}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(\alpha\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{AA_i}\right) = \alpha \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(\overrightarrow{GA_i}\right) = 0_E.$$

G' est le barycentre de points pondérés (A'_i, α_i), $1 \leq i \leq N$, donc $H_{A,\alpha}$ est une application affine.
($\Longleftarrow$) Supposons f affine, admet au moins un point fixe et $Linf$ une homothétie vectorielle. Alors, il existe $A \in \mathcal{E}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(A) = A \ et \ Linf(u) = \alpha u, \forall u \in E$. Soit $M \in E$ et $M' = f(M)$, alors $M' = f(M) = f(A) + Linf\left(\overrightarrow{AM}\right) = A + \alpha\overrightarrow{AM}$, donc f est l’homothétie affine de centre A et de rapport α.
3- Soit $\alpha = 1$ alors $AM' = AM$, donc $H_{A,\alpha}(M) = M' = M$.
4- Soit $\alpha \neq 1$, alors $H_{A,\alpha}(M) = M$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AM}$, donc $\overrightarrow{AM} = 0$ d’où $M = A$.
5- Evident.
6- Soit $\alpha \neq 0$ et h_α l’homothétie vectorielle de rapport α. On a h_α est bijective et $(h_\alpha)^{-1} = h_{\frac{1}{\alpha}}$, donc $H_{A,\alpha}$ est bijective est $(H_{A,\alpha})^{-1}$ est l’application affine qui admet A comme point fixe est de partie linéaire $h_{\frac{1}{\alpha}}$ ainsi $(H_{A,\alpha})^{-1}$ est l’homothétie affine de centre A et de rapport $\frac{1}{\alpha}$.