Série n°1 . Ensembles et Fonctions convexes

Exercice n°1 :

1) Soit f une fonction linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que le graphe de f est un ensemble convexe.

2) Soit le rectangle S défini par :

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 2 \}$$

Montrer que S est un ensemble convexe.

3) Soit $S = \{ x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2 \,/\, x_1 + x_2 \leq 4\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} \}$

Montrer que S est un ensemble convexe.

Exercice n°2 :

a) Soient $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions convexes, on considère l'ensemble A défini par :

$$A = \{ (y_0, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \exists x \in S \ .\ g(x) \leq y \text{ et } f(x) \leq y_0 \ \text{ où } S \subseteq \mathbb{R}^n \ \ S \text{ ensemble convexe} \}$$

Montrer que A est un ensemble convexe.

b) Soit $S = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x_1 > 0 \text{ et } x_2 \geq \frac{1}{x_1} \}$

Montrer que S est ensemble convexe.

Exercice n°3.

- Déf + sup + hypo
(Ram Déf + hy)

1) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow f(x) = x + \log x$

2) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4$

3) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow f(x) = e^{-x_1} + x_2$

Montrer que ces fonctions sont des fonctions convexes.

Exercice n°4 :

- Soit f une fonction convexe sur S, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ convexe
- Montrer que la fonction g définie par :

$g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$\theta \longrightarrow g(\theta) = f(x + \theta(y-x))$ est une fonction convexe de θ, pour $\theta \in [0,1]$ $\forall x, y \in S$.

Exercice n° 5:

Soit $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, pour x, y fixés dans $\mathbb{R}^n$, on définit la fonction $\Phi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lambda \longrightarrow \Phi(\lambda) = \frac{g(x) - g(x+\lambda y)}{\lambda}, \ \forall \lambda$$

Montrer que si g est convexe alors Φ est une fonction décroissante.

Convexe ؛ كن، مقعرة

Concave ؛ مقعرة